IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO C 10/XI/2005
Nombres reals $(2 \times 1) + (0.5 + 1 + 1) + 2 + (3 \times 0.5) + 2$

---

1. Opereu i simplifiqueu sense utilitzar la calculadora ni expressions decimals. En els resultats no han d'aparèixer exponents negatius:

a) $\dfrac{3 - \dfrac{2}{5} \cdot 4}{4 + 2\left(\dfrac{3}{5} - 1\right)}$. b) $0.08^{-3} \cdot 10^{12} \cdot \left(\dfrac{1}{12500}\right)^3$.

a) $$\frac{3 - \frac{2}{5} \cdot 4}{4 + 2\left(\frac{3}{5} - 1\right)} = \frac{3 - \frac{8}{5}}{4 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{15-8}{5}}{\frac{20-4}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{16}{5}} = \boxed{\frac{7}{16}}.$$

b) $$0.08^{-3} \cdot 10^{12} \cdot \left(\frac{1}{12500}\right)^3 = \left(\frac{100}{2^3}\right)^3 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1}{\left(5^3 \cdot 10^2\right)^3} = \frac{10^{6+12-6}}{2^9 \cdot 5^9} = \frac{10^{12}}{10^9} = 10^3 = \boxed{1000}.$$

2. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$. b) $\dfrac{\sqrt{a\,b^3}\,\sqrt[3]{a\,b}}{\sqrt[4]{a^3\,b^5}}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{27}} - \dfrac{\sqrt{48} - \sqrt{75}}{3\sqrt{243}}$.

a) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 4} = \boxed{5 + 2\sqrt{5}}.$$

b) **Mètode 1:** $$\frac{\sqrt{a\,b^3}\,\sqrt[3]{a\,b}}{\sqrt[4]{a^3\,b^5}} = \sqrt[12]{\frac{a^6 b^{18} a^4 b^4}{a^9 b^{15}}} = \sqrt[12]{a^{6+4-9}\,b^{18+4-15}} = \boxed{\sqrt[12]{a\,b^7}}.$$

Mètode 2: $$a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}} = a^{\frac{6+4-9}{12}} \cdot b^{\frac{18+4-15}{12}} = a^{\frac{1}{12}}\,b^{\frac{7}{12}} = \boxed{\sqrt[12]{a\,b^7}}$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{27}} - \frac{\sqrt{48} - \sqrt{75}}{3\sqrt{243}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{27\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{27\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{3\sqrt{3} + 1}{27}}.$$

3. Ampliem una fotografia rectangular un 40% cada costat. Tornem a ampliar la còpia resultant un 20% cada costat. Trobeu la fracció que proporciona la relació entre les àrees de la còpia final i la foto inicial.

	Inicial	1a. còpia	2a. còpia
costat	a	$a + 0.4\,a = 1.4\,a$	$1.4\,a + 0.2 \cdot 1.4\,a = 1.4 \cdot 1.2\,a = 1.68\,a$
costat	b	$b + 0.4\,b = 1.4\,b$	$1.4\,b + 0.2 \cdot 1.4\,b = 1.4 \cdot 1.2\,b = 1.68\,b$
àrea	$\boxed{a\,b}$	$1.4^2\,a\,b$	$\boxed{1.68^2\,a\,b}$

Per tant, $$\frac{\text{Àrea inicial}}{\text{Àrea final}} = \frac{1.68^2\,a\,b}{a\,b} = \boxed{1.68^2 = 2.8224 = \frac{1764}{625}}.$$

4. Resoleu tres qüestions entre les quatre següents:

a) Justifiqueu que $\sqrt[9]{a^{2000}} = a^{222}\sqrt[9]{a^2}$.

b) Trobeu dos nombres irracionals diferents tals que el seu producte sigui racional.

c) Desenvolupeu el producte $(2p+1)(2q+1)$, observeu el resultat i deduïu-ne si el producte de dos nombres imparells és parell o imparell.

d) Justifiqueu que si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ llavors, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

a) **Mètode 1:**

$$\left.\begin{array}{r|l} 2\,0\,0\,0 & 9 \\ \cline{2-2} 2\,0 & 2\,2\,2 \\ 2\,0 & \\ 2 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt[9]{a^{2000}} = \sqrt[9]{a^{222\cdot 9+2}} = \sqrt[9]{\left(a^{222}\right)^9 \cdot a^2} = \sqrt[9]{\left(a^{222}\right)^9} \cdot \sqrt[9]{a^2} = a^{222} \cdot \sqrt[9]{a^2}\,.$$

Mètode 2:

$$\left.\begin{array}{r} \left(\sqrt[9]{a^{2000}}\right)^9 = \sqrt[9]{\left(a^{2000}\right)^9} = a^{2000} \\ \left(a^{222}\sqrt[9]{a^2}\right)^9 = \left(a^{222}\right)^9 \sqrt[9]{\left(a^2\right)^9} = a^{1998}\,a^2 = a^{2000} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt[9]{a^{2000}} = a^{222}\sqrt[9]{a^2}.$$

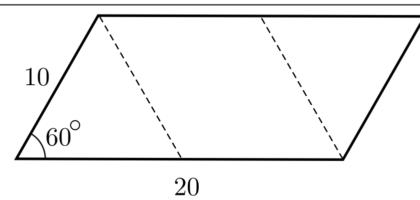
b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{3\cdot 12} = \sqrt{36} = 6$. Els dos radicals són irracionals perquè 3 i 12 no són quadrats perfectes. En canvi, el seu producte és 6. Aquest es pot presentar com $\frac{6}{1}$ que és racional.

c) $(2p+1)(2q+1) = 4pq+2p+2q+1$. Aquest resultat es pot presentar com $2(2pq+p+q)+1$, el qual és un nombre parell més 1, és a dir imparell. Per tant, el producte de dos imparells dóna sempre imparell.

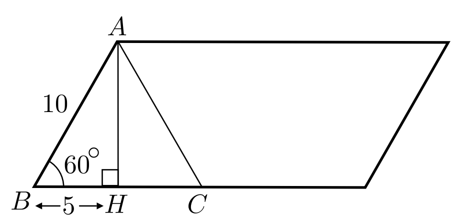
d) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+d} \Longleftrightarrow a(b+d) = (a+c)b \Longleftrightarrow ab+ad = ab+bc \Longleftrightarrow ad = bc \Longleftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Per tant, les dues expressions són equivalents. O sigui que qualsevol d'elles implica l'altra.

5. Els costats d'un paral·lelogram mesurem 10 cm i 20 cm. Si l'angle que formen aquest dos costats és de 60°, calculeu l'àrea del paral·lelogram. (Observeu la figura adjunta)



Per calcular l'altura AH del paral·lelogram considerem el triangle $\triangle ABC$ en què $AB = BC = 10$ i, per tant, $\angle BAC = \angle BCA = 60°$. O sigui que els tres angles són iguals i el triangle és equilàter.



Llavors, H parteix $BC = 10$ en dues parts iguals. Així, podrem calcular l'altura AH amb l'ajut del teorema de Pitàgoras aplicat al triangle rectangle $\triangle AHB$:

$$AH = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Finalment, per al paral·lelogram obtenim

$$\text{Àrea} = 20\cdot 5\sqrt{3} = \boxed{100\sqrt{3} \approx 173.205 \text{ cm}^2}\,.$$