1. Resoleu l'equació $x^2 - 4x - 21 = 0$ mitjançant:

a) La fórmula general de resolució de les equacions de segon grau.

b) El mètode de completar quadrats.

a) En la fórmula general fem les substitucions $a = 1$, $b = -4$ i $c = -21$. En resulta:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} = \begin{cases} \boxed{7} \\ \boxed{-3}. \end{cases}$$

b) El binomi que interessa és $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, el qual caldrà completar per obtenir la part esquerra de l'equació. Així,

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \iff (x-2)^2 - 4 - 21 = 0 \iff (x-2)^2 = 25 \iff x - 2 = \sqrt{25} = \pm 5$$

$$\iff x = 2 \pm 5 = \begin{cases} \boxed{7} \\ \boxed{-3}. \end{cases}$$

2. Partim en dos trossos de longitud desconeguda un filferro de 40 cm de longitud. Amb els dos trossos resultants construïm els perímetres de dos quadrats. Si la suma de les àrees dels dos quadrats és de 54.5 cm^2, calculeu la longitud de cadascun dels dos trossos.

Siguin x i $40 - x$ les longituds dels trossos. Llavors, els costats dels quadrats mesuren

$$\frac{x}{4} \quad \text{i} \quad \frac{40-x}{4}.$$

Si calculem les àrees elevant al quadrat aquests dos valors i els sumem, la condició de l'enunciat es tradueix a l'àlgebra com

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{40-x}{4}\right)^2 = 54.5\,.$$

Aquesta equival a

$$\frac{x^2 + (1600 - 80x + x^2)}{16} = 54.5 \iff 2x^2 - 80x + 1600 = 872 \iff x^2 - 40x + 364 = 0$$

$$\iff x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1456}}{2} = \frac{40 \pm 12}{2} = \begin{cases} 26 \\ 14. \end{cases}$$

Així, $\left.\begin{array}{l} x = 26 \Longrightarrow 40 - x = 14 \\ x = 14 \Longrightarrow 40 - x = 26 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ els trossos mesuren $\boxed{\text{26 i 14 cm}}$.

3. Resoleu les equacions següents:

a) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$. b) $\sqrt{2+x} - 3x = 2$.

a) Anomenem $x^2 = t$. Llavors, $x^4 = t^2$, la qual cosa transforma l'exercici en un de segon grau:

$$4t^2 + 11t - 3 = 0 \iff t = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{48} = \frac{-11 \pm 8}{48} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ -3. \end{cases}$$

Llavors, $x^2 = t = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{4} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Longrightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{1}{2}} \\ -3 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow \text{no existeix com a nombre real.} \end{array} \right.$

b) $$\begin{aligned} \sqrt{2+x} - 3x = 2 &\iff \sqrt{2+x} = 3x+2 \Longrightarrow 2+x = (3x+2)^2 \\ &\Longrightarrow 2+x = 9x^2+12x+4 \Longrightarrow 9x^2+11x+2 = 0 \\ &\Longrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-72}}{18} = \frac{-11 \pm 7}{18} = \left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{2}{9} \\ -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Comprovació: $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \sqrt{2 - \dfrac{2}{9} - 3 \cdot \left(-\dfrac{2}{9}\right)} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2 \\ \bullet\ \sqrt{2-1} - 3 \cdot (-1) = \sqrt{1} + 3 = 4 \neq 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x = -\dfrac{2}{9}}.$

4. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{5 \cdot \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} \cdot 3}{5 - \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{21}{4}}$. b) $\dfrac{0.01^{-5}}{0.125^{\frac{1}{3}} \cdot 10^8}$. c) $\sqrt{63} - \dfrac{35}{\sqrt{28}}$. d) $\dfrac{\sqrt[3]{x\,y^2}\,\sqrt[4]{x\,y}}{\sqrt[6]{x^5\,y}}$.

a) $$\frac{5 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3}{5 - \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{4}} = \frac{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}}{5 - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}} = \frac{3}{\frac{40-35}{8}} = \boxed{\frac{24}{5}}.$$

b) $$\frac{0.01^{-5}}{0.125^{\frac{1}{3}} \cdot 10^8} = \frac{\left(\frac{1}{100}\right)^{-5}}{\left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 10^8} = \frac{100^5}{\frac{5}{10} \cdot 10^8} = \frac{(10^2)^5}{5 \cdot 10^7} = \frac{10^{10}}{5 \cdot 10^7} = \frac{10^3}{5} = \boxed{200}.$$

c) $$\sqrt{63} - \frac{35}{\sqrt{28}} = 3\sqrt{7} - \frac{35}{2\sqrt{7}} = \frac{42-35}{2\sqrt{7}} = \frac{7}{2\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}}.$$

d) $$\frac{\sqrt[3]{x\,y^2}\,\sqrt[4]{x\,y}}{\sqrt[6]{x^5\,y}} = \sqrt[12]{\frac{x^4y^8x^3y^3}{x^{10}y^2}} = \sqrt[12]{\frac{y^9}{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{x^3y^3}}{x}}.$$

5. Tres socis han invertit, respectivament, 40000, 100000, i 140000 euros en un negoci. Al cap d'un temps es volen repartir els beneficis obtinguts que són de 39298 euros. Decideixen fer-ho en proporció directa a la inversió realitzada. Quants euros s'emportarà cadascun d'ells.

Hi ha d'haver una proporció directa entre els beneficis i la inversió. A la taula adjunta les dues col·leccions de nombres han de ser directament proporcionals.

	Inversió	Benefici
Soci 1	40000	x_1
Soci 2	100000	x_2
Soci 3	140000	x_3
Total	280000	39298

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{40000}{280000} = \dfrac{x_1}{39298} \\ \dfrac{100000}{280000} = \dfrac{x_2}{39298} \\ \dfrac{140000}{280000} = \dfrac{x_3}{39298} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{7} \cdot 39298 = \boxed{5614 \text{ euros}} \\ x_2 = \dfrac{5}{14} \cdot 39298 = \boxed{14035 \text{ euros}} \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 39298 = \boxed{19649 \text{ euros}}. \end{array}$$