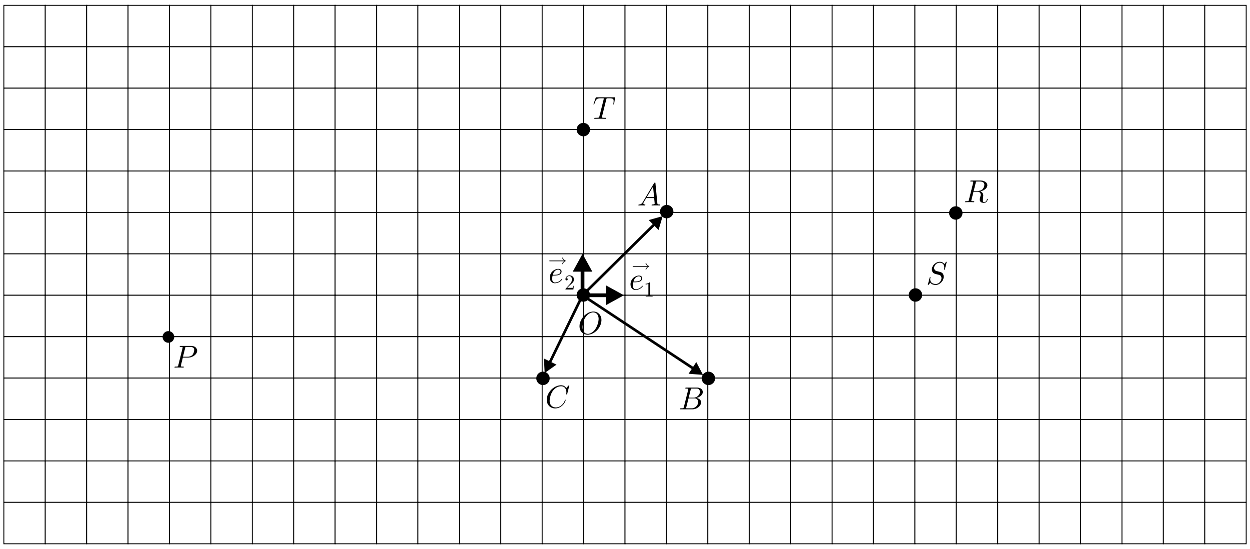
1. Siguin els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.



a) Trobeu, analítica i gràficament (dibuixant els vectors implicats), el punt Q tal que

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}.$$

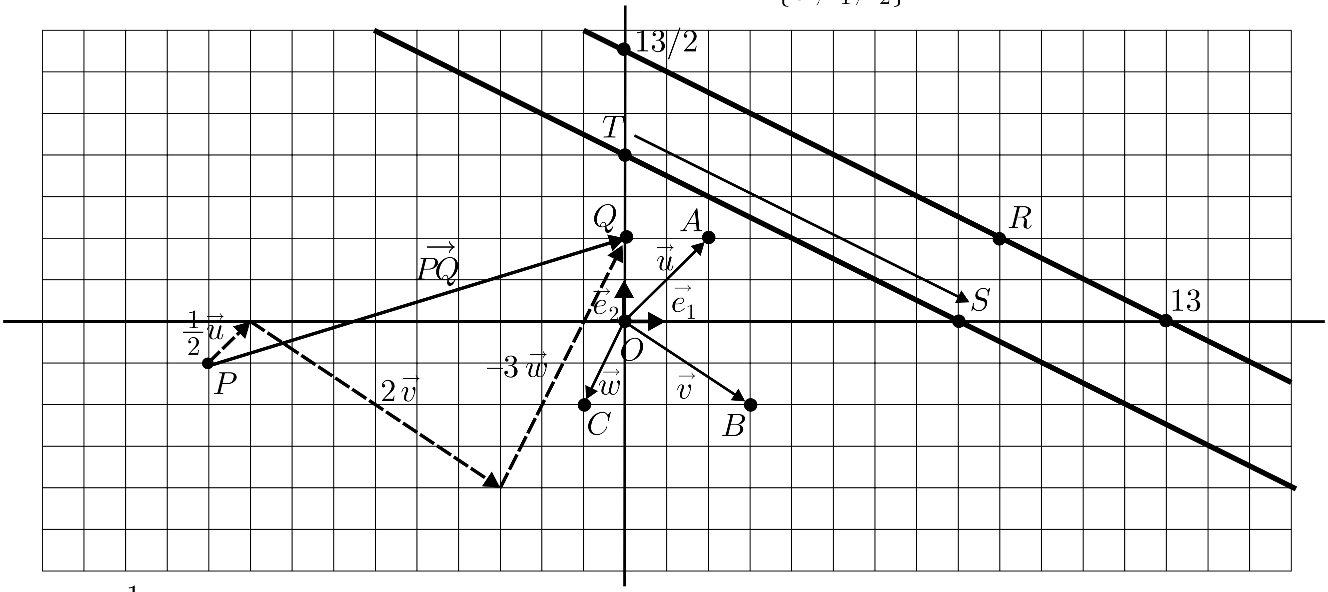
b) Trobeu les equacions vectorial, paramètriques, contínua, punt-pendent, explícita i implícita de la recta que passa pels punts T i S.

c) Trobeu l'equació explícita de la recta paral·lela al segment TS que passa pel punt R, i calculeu l'àrea del triangle que la recta trobada forma amb els eixos de coordenades.

d) Expresseu el vector $\overrightarrow{OP}$ com una combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$, és a dir, trobeu els nombres reals a i b tals que $\overrightarrow{OP} = a\vec{v} + b\vec{w}$. Comproveu gràficament el resultat.

e) Calculeu el valor de l'angle $\widehat{AOB}$.

Presentem totes les coordenades en la referència ortonormal $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.



a) $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}(2,2) + 2(3,-2) - 3(-1,-2) = (1,1) + (6,-4) + (3,6) = (10,3)$. Per tant,

$$\boxed{Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-10,-1) + (10,3) = (0,2)}.$$

b) $T(= (0,4)$ i $S = (8,0)$ implica que un vector director de la recta TS és $\overrightarrow{TS} = (8,0) - (0,4) = (8,-4)$.

Vectorial: $(x,y) = (0,4) + \alpha(8,-4)$	Paramètriques: $\begin{cases} x = 8\alpha \\ y = 4 - 4\alpha \end{cases}$	Contínua: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y-4}{-4}$
Punt-pendent: $y - 4 = -\dfrac{1}{2}(x-0)$	Explícita: $y = -\dfrac{1}{2}\,x + 4$	Implícita: $x + 2y - 8 = 0$

c) La recta ha de passar pel punt $R = (9,2)$ i ha de tenir el mateix pendent que la recta TS. Per tant,

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-9) \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{13}{2} \text{ és la seva equació explícita}}.$$

Per a l'àrea cerquem els talls amb els eixos, $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = 13/2 \\ y = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{13/2}{1/2} = 13. \end{cases}$

Llavors l'àrea és igual a $\quad \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot \dfrac{13}{2} = \dfrac{169}{4} = \boxed{42.25}$.

d) $\overrightarrow{OP} = a\vec{v} + b\vec{w} \Longrightarrow (-10,-1) = a(3,-2) + b(-1,-2) = (3a-b, -2a, -2b) \Longrightarrow \begin{cases} 3a - b = -10 \\ -2a - 2b = -1. \end{cases}$

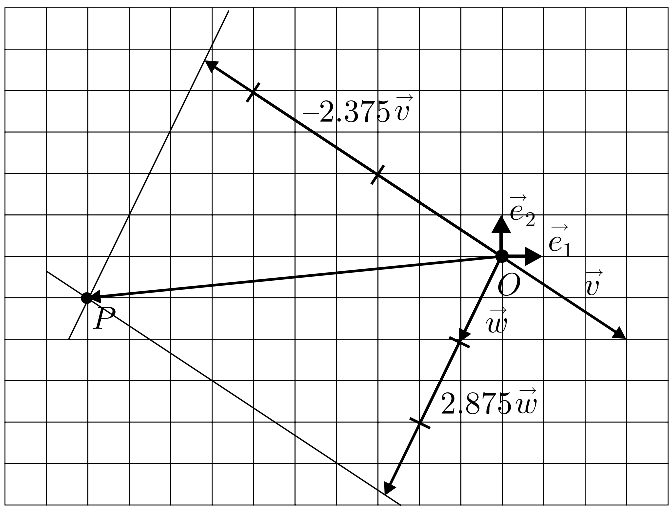
Multipliquem la primera equació per -2 i cerquem el valor d'a per reducció.

$$\begin{array}{l} -6a + 2b = 20 \\ \underline{-2a - 2b = -1} \\ -8a \qquad = 19 \quad \Longrightarrow a = -\dfrac{19}{8} = -2.375 \end{array}$$

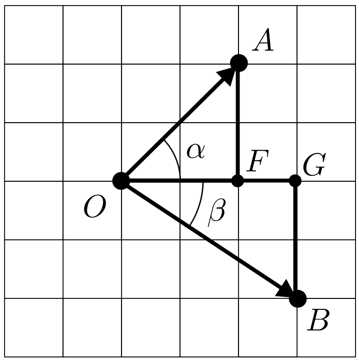
$$b = 3a + 10 = -\frac{57}{8} + 10 = \frac{23}{8} = 2.875$$

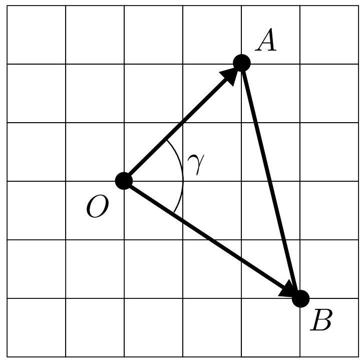
O sigui que $\boxed{\overrightarrow{OP} = -\dfrac{19}{8}\,\vec{v} + \dfrac{23}{8}\,\vec{w}}$.

La solució s'ajusta al gràfic obtingut amb les operacions producte per un número i suma de vectors.



e) Dos mètodes: Amb trigonometria de triangles rectangles o de triangles acutangles.





Si utilitzem la raó trigonomètrica tangent en els triangles $\triangle AFO$ i $\triangle BGO$,

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= \alpha+\beta \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 45^\circ+33^\circ 41' 24.24'' = \boxed{78^\circ 41' 24.24''}. \end{aligned}$$

Pel teorema del cosinus sobre $\triangle AOB$,

$$\begin{aligned} \sqrt{17}^{\,2} &= \sqrt{8}^{\,2}+\sqrt{13}^{\,2}-2\sqrt{8}\sqrt{13}\cos\gamma \\ \widehat{AOB} &= \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{17-8-13}{-2\sqrt{8}\sqrt{13}}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{13}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \\ &= \boxed{78^\circ 41' 24.24''}. \end{aligned}$$

2. Trobeu els valors de $k\in\mathbb{R}$ tals que el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y=k \\ x^2+y^2=9, \end{array}\right.$ tingui una única solució.
Indicació: Una estratègia possible passa per resoldre el sistema per substitució i imposar que l'equació de segon grau resultant només tingui una solució. També hi ha estratègies gràfiques.

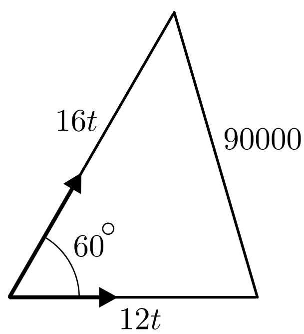
$$\left\{\begin{array}{c} x+y=k \\ x^2+y^2=9, \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=k-x \\ x^2+y^2=9, \end{array}\right. \Longrightarrow x^2+(x-k)^2=9 \Longrightarrow 2x^2-2kx+k^2-9=0.$$

Imposarem que l'equació tingui solució x única, igualant el seu discriminant a zero.

$$(-2k)^2-4\cdot 2\cdot(k^2-9)0 \Longrightarrow 4k^2-8k^2+72=0 \Longrightarrow -4k^2=-72 \Longrightarrow k^2=18 \Longrightarrow \boxed{k=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}}.$$

3. Dos mòbils surten del mateix punt, a la mateixa hora i segueixen trajectòries rectilínies que formen un angle de 60°. Si les seves velocitats són constants i iguals, respectivament, a 12 m/s i 16 m/s. Calculeu en hores minuts i segons el temps transcorregut quan la seva separació és de 90 km.

Anomenem t el temps transcorregut des del moment de la sortida fins que es troben separats 90 km. Apliquem el teorema del cosinus al triangle de la figura en què $16t$ i $14t$ són els km recorreguts fins el moment en que els separen 90 km. Obtenim,



$$\begin{aligned} &90000^2=(12t)^2+(16t)^2-2\cdot 12t\cdot 16t\cdot\cos 60^\circ \\ \Longleftrightarrow\quad & 90000^2=(144+256-192)t^2 \Longleftrightarrow t=\frac{90000}{\sqrt{208}}=\frac{22500}{\sqrt{13}}=6240.038 \text{ s}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Transcorren } 1\,\text{h } 44\,\text{min } 0.38\,\text{s}}$