IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4t ESO B/C 09/02/2010
Nombres i àlgebra $30 + 20 + 20 + 40 + (20 + 10) + 15 + 10$

• L'alumnat amb la 1a Avaluació pendent treballarà els nombres 1, 2, 3, 4a, 4b i 6.
• L'alumnat amb la 1a Avaluació aprovada treballarà els nombres 3, 4, 5, 6 i 7.

1. Resoleu,

a) $x - (3 + 2x) = \frac{x}{2} - 1$ b) $\frac{x}{3} + \frac{1-x}{6} = \frac{x}{4}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 5y - 12x = 7 \end{cases}$

a) $x - (3 + 2x) = \frac{x}{2} - 1 \Longleftrightarrow 2x - 6 - 4x = x - 2 \Longleftrightarrow (2 - 4 - 1)x = 6 - 2$

$$\Longleftrightarrow -3x = 4 \Longleftrightarrow \boxed{x = -\frac{4}{3}}.$$

b) $\frac{x}{3} + \frac{1-x}{6} = \frac{x}{4} \Longleftrightarrow 4x + 2(1 - x) = 3x \Longleftrightarrow (4 - 2 - 3)x = -2 \Longleftrightarrow -x = -2 \Longleftrightarrow \boxed{x = 2}$.

c) $\begin{cases} E_1: & 3x + y = 2 \\ E_2: & 5y - 12x = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} E_1: & 3x + y = 2 \\ 4E_1 + E_2: & 9y = 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{15}{9} & \Longrightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}} \\ x = \frac{2 - \frac{5}{3}}{3} & \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{9}} \end{cases}.$

2. La Marta i el Josep han estalviat la mateixa quantitat de diners. Se'n van de viatge, per la qual cosa la Marta inverteix la meitat dels seus estalvis i el Josep la tercera part dels seus. Si el viatge els ha costat un total de 915 €, quants diners els queden a cadascun d'ells?

Anomenem x el valor dels estalvis de cadascun d'ells. Llavors,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 915 \Longleftrightarrow 3x + 2x = 5490 \Longleftrightarrow x = \frac{5490}{5} = \boxed{1098\ €}.$$

A la Marta li quedaran $\frac{x}{2} = \frac{1098}{2} = \boxed{549\ €}$. Al Josep li quedaran $\frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 1098}{3} = \boxed{732\ €}$.

3. Un tipus d'embotit que té molta demanda puja el seu preu un 2% cada mes sobre el preu del mes anterior. Actualment amb 22 € puc comprar 800 gr d'aquest embotit, quants grams podré comprar amb els mateixos diners d'aquí a 12 mesos?

Preu inicial per gram $= \frac{22}{800}$ € $\Longrightarrow$ Preu final per gram $= \frac{1.02^{12} \cdot 22}{800}$ €.

Embotit que puc comprar al cap de 12 mesos amb 22 €: $\dfrac{22\ €}{\frac{1.02^{12} \cdot 22}{800}\ €/\mathrm{g}} = \frac{800}{1.02^{12}}\ \mathrm{g} = \boxed{630.79\ \mathrm{g}}$.

4. Resoleu,

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $x^4 - x^2 - 6 = 0$
c) $x + 1 - \sqrt{x^2 + 33} = 2 + 3x$
d) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x^2 - 5y^2 = 20 \end{cases}$

a) Utilitzem la fórmula reduïda, $x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \dfrac{2 \pm 4}{3} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

b) Anomenem $x^2 = t$ i, per tant, $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Llavors cal resoldre $t^2 - t - 6 = 0$.

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow \; 3 \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{t} = \pm\sqrt{3}} \\ \searrow \; -2 \Longrightarrow x = \sqrt{t} = \sqrt{-2}, \text{ la qual no és solució real.} \end{cases}$$

c) Mirarem d'eliminar l'arrel, i no oblidarem que quan elevem al quadrat hi ha la possibilitat que s'introdueixin solucions estranyes a l'equació.

$$-\sqrt{x^2+33} = 1 + 2x \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 33 = 1 + 4x^2 + 4x \Longrightarrow 3x^2 + 4x - 32 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{3} = \frac{-2 \pm 10}{3} = \begin{cases} \nearrow \; \frac{8}{3} \\ \searrow \; -4 \end{cases}$$

La solució $x = \dfrac{8}{3}$ no és admissible perquè,

$$\frac{8}{3} + 1 - \sqrt{\frac{64}{9} + 33} = \frac{8}{3} + 1 - \frac{19}{3} = -\frac{8}{3} \neq 2 + 3 \cdot \frac{8}{3} = 10.$$

La solució és $\boxed{x = -4}$ perquè,

$$-4 + 1 - \sqrt{16+33} = -3 - 7 = -10 = 2 + 3 \cdot (-4).$$

d) Aïllem la incògnita y en la primera equació i la substituïm en la segona,

$$y = 2x - 4 \Longrightarrow 4x^2 - 5(2x-4)^2 = 20 \Longrightarrow 4x^2 - 5(4x^2 - 16x + 16) = 20 \Longrightarrow -16x^2 + 80x - 100 = 0.$$

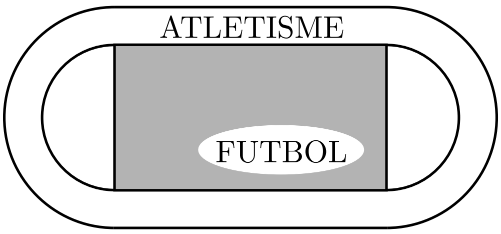
Si dividim els dos membres per -4 i resolem, obtenim

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{4} = \frac{10 \pm 0}{4} = \begin{cases} \nearrow \; \frac{5}{2} \\ \searrow \; \frac{5}{2}. \end{cases} \text{ És a dir, } \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = \frac{5}{2}}, \\ \boxed{y = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 = 1}. \end{array} \right.$$

5. La pista d'atletisme de la figura té un camp de futbol en el seu interior de 328 m de perímetre i 6324 m^2 de superfície. La part corba està formada per dues meitats de corona circular.

a) Calculeu el perímetre interior (la "*corda*") de la pista.

b) Si es vol recobrir la pista de material sintètic i cada metre quadrat d'aquest material costa 70 €, calculeu el preu del material necessari per cobrir tota la pista, si aquesta té 10 m d'amplada.



a) En primer lloc, calculem les dimensions del camp de futbol, per la qual cosa anomenem $x =$ amplada, $y =$llargada. En resulta,

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = 164 \\ xy = 6324 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = 164 - x \\ x(164 - x) = 6324 \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 + 164x + 6324 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 6324}}{1} = \frac{82 \pm 20}{1} = \begin{cases} \nearrow \; 102 \Longrightarrow y = 164 - 102 = 62 \\ \searrow \; 62 \Longrightarrow y = 164 - 62 = 102. \end{cases}$$

Consegüentment les dimensions del camp de futbol són de $102\,\text{m} \times 62\,\text{m}$. Llavors el perímetre de la "*corda*" es podrà calcular amb la suma de dues vegades la llargada del camp de futbol amb el perímetre d'una circumferència de diàmetre l'amplada del camp. És a dir,

$$\boxed{\textit{Corda} \text{ de la pista } = 2 \cdot 102 + \pi \cdot 62 \approx 398.7787 \text{ m}}$$

b) Calcularem el preu a partir de la superfície de la pista. Aquesta es pot descompondre en dos rectangles de dimensions 102×10, i una corona circular de radis 31 i 41.

$$\text{Superfície } = 2 \cdot 102 \cdot 10 + \pi(41^2 - 31^2) = 2040 + \pi \cdot 720 \approx 4301.9467 \text{ m}^2.$$

$$\text{Preu } = 70 \cdot \text{Superfície} = \boxed{301136.27\,€}.$$

6. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan sigui el cas. (Sense calculadora)

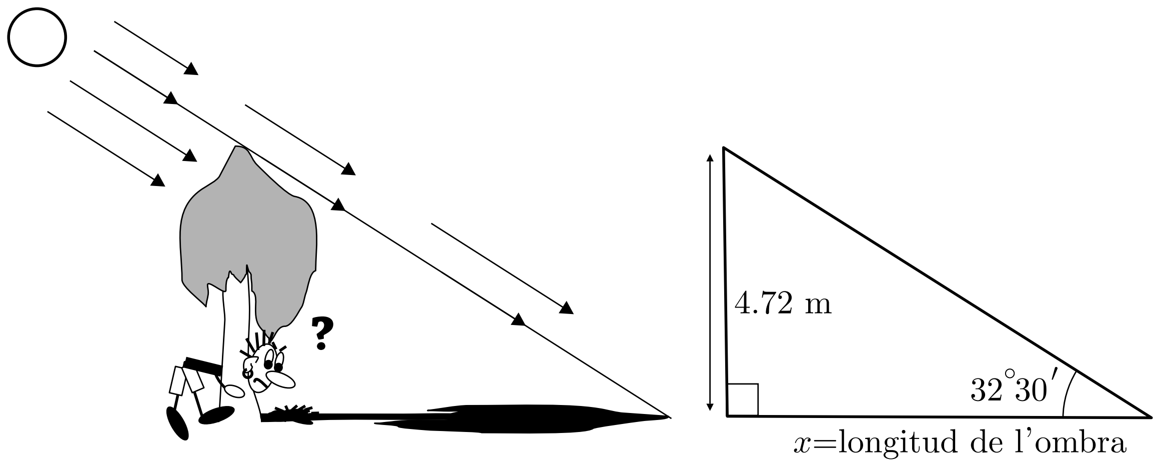
a) $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ b) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^3b}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$

a) $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{8}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^3b}} = \sqrt{\dfrac{ab}{a^3b}} = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}} = \boxed{\dfrac{1}{a}}$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}}$.

7. Calculeu la longitud de l'ombra d'un arbre de 4.72 m d'alçada en el moment que l'angle d'elevació del Sol sobre l'horitzó és de $32^\circ\,30'$.



Si observem el gràfic podem establir que

$$\tan 32^\circ 30' = \frac{4.72}{x} \Longrightarrow x = \frac{4.72}{\tan 32^\circ 30'} \approx \frac{4.72}{0.6370702} \approx \boxed{7.4089\,\text{m}}.$$