1. Opereu i simplifiqueu, sense calculadora i sense utilitzar els nombres decimals:

a) $\dfrac{17}{10}-\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{7-\frac{1}{3}\cdot 5}{7\cdot\frac{1}{3}-5}$ c) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}\,\sqrt{24}}$ d) $\dfrac{\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{ab}}$ e) $2\sqrt{75}+\sqrt{27}-\sqrt{507}$

a) $\dfrac{17}{10}-\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{51-4+5}{30}=\dfrac{52}{30}=\boxed{\dfrac{26}{15}}.$

b) $\dfrac{7-\frac{1}{3}\cdot 5}{7\cdot\frac{1}{3}-5}=\dfrac{7-\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}-5}=\dfrac{\frac{21-5}{3}}{\frac{7-15}{3}}=\dfrac{16\cdot 3}{3\cdot(-8)}=\boxed{-2}.$

c) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}\,\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{75}{48}}=\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\boxed{\dfrac{5}{4}}.$

d) $\dfrac{\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{ab}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^6b^3a^{10}}{a^3b^3}}=\sqrt[6]{a^{6+10-3}}=\sqrt[6]{a^{13}}=\boxed{a^2\,\sqrt[6]{a}}.$

e) $2\sqrt{75}+\sqrt{27}-\sqrt{507}=2\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{169\cdot 3}=10\sqrt{3}+3\sqrt{3}-13\sqrt{3}$
$=(10+3-13)\sqrt{30}\cdot\sqrt{3}=\boxed{0}.$

2. La Marta ha gastat el 36% dels seus estalvis en la compra d'un cotxe i el 20% de la resta en un viatge. Després d'aquesta despesa li han quedat 21760 €. Calculeu els euros gastats en el cotxe i en el viatge.

- El cotxe li costa el 36% dels estalvis.
- El viatge li costa el 20% del 64% dels estalvis$=\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{64}{100}=0.2\cdot 0.64=0.128=\dfrac{12.8}{100}=12.8\%$.

El percentatge que representa els 21760€ que li queden és:

$$100\%-(36\%+12.8\%)=51.2\%$$

- Anomenem x el preu del cotxe i y el preu del viatge. Apliquem la proporcionalitat entre percentatge i nombre d'euros:

Preu del cotxe: $\dfrac{36}{51.2}=\dfrac{x}{21760}\Longrightarrow x=\dfrac{36\cdot 21760}{51.2}=\boxed{15300€}.$

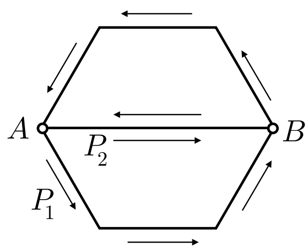
Preu del viatge: $\dfrac{12.8}{51.2}=\dfrac{y}{21760}\Longrightarrow y=\dfrac{12.8\cdot 21760}{51.2}=\boxed{5440€}.$

3. Trieu i resoleu tres qüestions entre les quatre següents:

a) Justifiqueu que $\sqrt[11]{b^{2009}} = b^{182} \cdot \sqrt[11]{b^7}$.

b) Dibuixeu sobre la recta numèrica, amb regle no graduat, compàs i escaire, el nombre $2.8\widehat{3}$.

c) Dues partícules P_1 i P_2 surten al mateix temps del vèrtex A d'un hexàgon regular de costat 1 m, a una velocitat de 1 m/s.
La partícula P_1 recorre reiteradament el seu perímetre en sentit antihorari.
La partícula P_2 recorre reiteradament la diagonal AB en trajectes d'anada i tornada.
Estudieu quants segons passaran fins que es trobin en el punt A i quants fins que es trobin en el punt B.

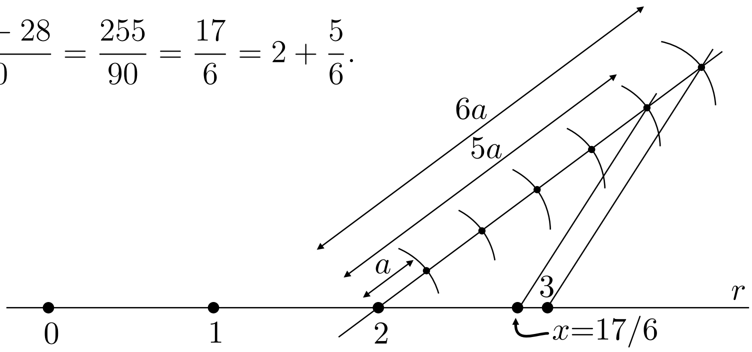


d) Expresseu, si es pot, en forma de fracció irreductible el resultat de la suma d'infinits sumands següent i raoneu si és un nombre racional o irracional.

$$12 + \frac{45}{10^2} + \frac{45}{10^4} + \frac{45}{10^6} + \cdots$$

a) $\begin{array}{l|l} 2\,0\,0\,9 & 1\,1 \\ \cline{2-2} 0\,9\,0 & 1\,8\,2 \\ \;\;0\,2\,9 & \\ \;\;\;\;0\,7 & \end{array} \Longrightarrow 2009 = 11 \cdot 182 + 7 \Longrightarrow \sqrt[11]{b^{2009}} = \sqrt[11]{\left(b^{182}\right)^{11} \cdot b^7} = b^{182} \cdot \sqrt[11]{b^7}.$

b) $2.8\widehat{3} = \dfrac{283-28}{90} = \dfrac{255}{90} = \dfrac{17}{6} = 2 + \dfrac{5}{6}.$



c) Representem en dues taules els instants de temps en segons, en què les partícules passen per A i per B.

Passen pel puntA	P_1	P_2
	6	4
	12	8
	18	12
	24	16
	...	...

Passen pel puntB	P_1	P_2
	3	2
	9	6
	15	10
	21	14
	...	...

En al primera taula hem de trobar el primer múltiple comú de 6 i de 4, que resulta ser el 12. O sigui que, per primera vegada $\boxed{\text{es troben en } A \text{ en el segon } 12}$.

En la segona taula s'observa que la primera partícula passa en segons representats per nombres imparells, mentre que la segona partícula passa per B en segons representats per nombres parells. Per tant, $\boxed{\text{no es trobaran mai en } B}$.

d) $12 + \dfrac{45}{10^2} + \dfrac{45}{10^4} + \dfrac{45}{10^6} + \cdots = 12.\widehat{45} = \dfrac{1245-12}{99} = \dfrac{1233}{99} = \boxed{\dfrac{137}{11}}.$

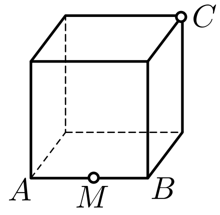
És racional perquè es pot presentar com una fracció d'enters.

4. En el cub de la figura adjunta de costat 10 m, calculeu la longitud del camí més curt entre el punt mitjà M de l'aresta AB i el vèrtex C, en dos casos.

a) Si es pot travessar pel seu interior.

b) Si només es pot recórrer la seva superfície.

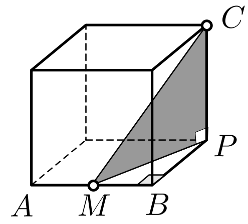
(Trobeu, a poder ser, les respostes exacta i aproximada.)



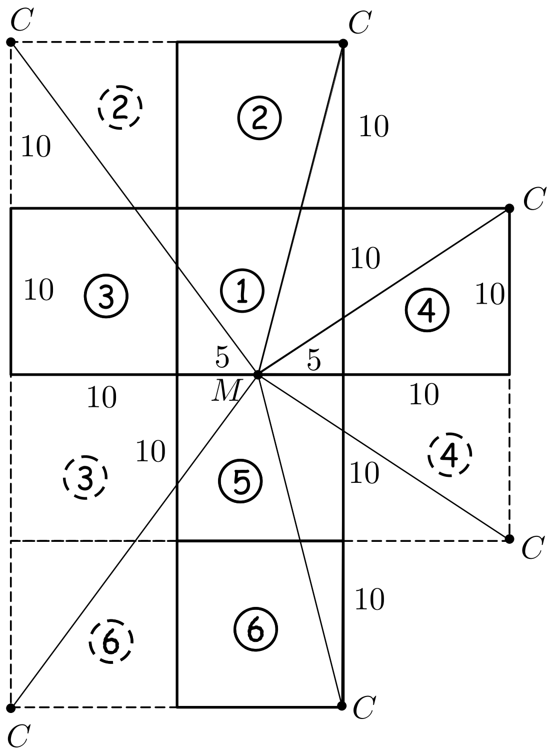
a) Per trobar MC considerem el triangle rectangle $\triangle MPC$, del qual coneixem el catet $PC = 10$ m i desconeixem el catet AP.
Per trobar AP considerem el triangle rectangle $\triangle MBP$, del qual coneixem el catet $MB = 5$ m i el catet $BP = 10$ m.
Llavors, si apliquem el teorema de Pitàgores, obtenim,

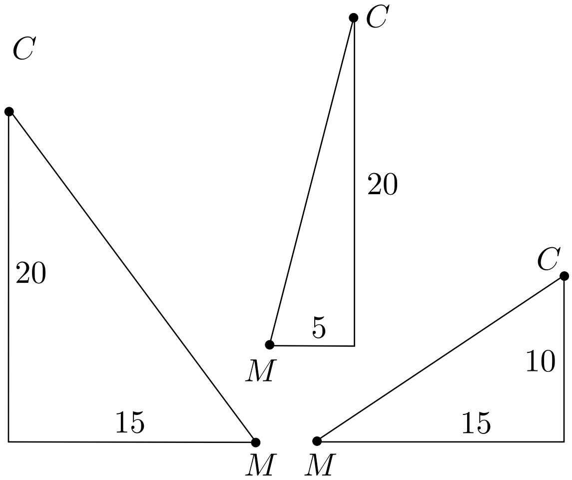
$$AC^2 = AP^2 + PC^2 = MB^2 + BP^2 + PC^2 = 5^2 + 10^2 + 10^2 = 225$$

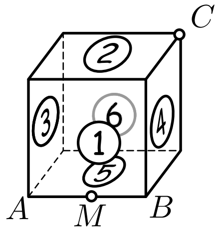
$$\Longrightarrow \boxed{MC = \sqrt{225} = 15 \text{ m}}.$$



b) Hem de buscar el camí més curt entre els que passen per les diferents cares que hem numerat del 1 al 6. Una manera de cercar-les és treballant sobre el desenvolupament pla del cub. Cadascun dels camins marcats és més curt que els que travessen la mateixa aresta, perquè la distància més curta, en el pla, entre dos punts és la determinada pel segment que uneix els punts.







Si apliquem el teorema de Pitàgores als tres triangles diferents que surten obtenim que el camí més curt és el determinat en el triangle de més a la dreta,

$$MC^2 = 15^2 + 10^2 = 325 \Longrightarrow MC = \sqrt{325} = \sqrt{5^2 \cdot 13} = \boxed{5\sqrt{13} \approx 18.03 \text{ m}}.$$

Exercici 2b del grup 4esoB

Dibuixeu sobre la recta numèrica, amb regle no graduat, compàs i escaire, el nombre $\sqrt{14}$, a partir del teorema de l'altura. Presenteu els teoremes en què es fonamenta la construcció.

Els teoremes en què es fonamenta la construcció són el teorema de l'altura i el teorema que relaciona el valor de l'angle inscrit en una circumferència amb l'angle central que l'angle inscrit determina sobre la circumferència.

Teorema de l'altura

En un triangle rectangle l'altura h sobre la hipotenusa i els segments p i q que determina sobre aquesta satisfan la relació $h^2 = p \cdot q$, o de manera equivalent, $\dfrac{p}{h} = \dfrac{h}{q}$. També es diu que l'altura h és la *mitjana geomètrica* dels segments p i q.

Teorema de l'angle inscrit

El valor de l'angle inscrit en una circumferència és la meitat del valor de l'angle central determinat per l'arc que subtendeix el primer. Una conseqüència del teorema és que l'angle inscrit amb costats que passen pels extrems d'un diàmetre té un valor de 90°.

Construcció de $\sqrt{14}$

Etapes

a) Sobre la recta triem una unitat de mesura i la dibuixem amb el compàs $7 + 2$ vegades.

b) Tracem la semicircumferència de diàmetre el segment dibuixat de mesura 9 unitats. (Trobem el centre amb el traçat de la mediatriu d'aquest segment.)

c) Tracem la perpendicular pel punt que parteix el segment de mesura 9 en dues parts de mesures 2 i 7 respectivament.

d) El segment d'extrems el punt esmentat en l'apartat anterior i el punt d'intersecció de la semicircumferència amb la perpendicular mesura, pel teorema de l'altura, $\sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14}$. (Es pot aplicar el teorema de l'altura perquè l'angle de vèrtex la intersecció citada i costats que passen per l'extrem del diàmetre de 9 unitats és de 90°.