IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO — 20/06/2011
Millora — $20 + 20 + 20 + 20 + 30 + 30$

1. Dues aixetes amb flux constant poden omplir un gran dipòsit en 2 h 24 min si s'obren alhora. Si només se'n obrís una tardaria en omplir el dipòsit tota sola, dues hores més que l'altra si aquesta última s'obrís sola. Calculeu quan tardaria cada aixeta en omplir el dipòsit per separat.

	temps (h) necessari per omplir el dipòsit	fracció de dipòsit que omple en 1 hora
Aixeta ràpida	x	$\frac{1}{x}$
Aixeta lenta	$x+2$	$\frac{1}{x+2}$
Les dues juntes	2.4	$\frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$$

Per tant, en resulta, $12(x+2+x) = 5x(x+2) \Longrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$

$$\Longrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{5} = \frac{7 \pm 13}{5} = \begin{cases} 4 \\ -6/5 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = 4\,\mathrm{h},\ x+2 = 6\,\mathrm{h}}.$$

2. Resoleu les equacions: a) $x + 7\sqrt{x} = 15 - x$ b) $\sqrt{1-3x} + \sqrt{x+9} = 6$

a) $2x + 7\sqrt{x} - 15 = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{9}{4}}. \\ -5 \Longrightarrow x = 25. \end{cases}$

Es comprova que la solució emmarcada és bona i la segona no ho és.

b) $1 - 3x = 36 + x + 9 - 12\sqrt{x+9} \Longrightarrow -4x - 44 = -12\sqrt{x+9}$

$\Longrightarrow x + 11 = 3\sqrt{x+9} \Longrightarrow x^2 + 22x + 121 = 9x + 81 \Longrightarrow x^2 + 13x + 40 = 0$

$$\Longrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169-160}}{2} = \frac{-13 \pm 3}{2} = \begin{cases} \boxed{-5} \\ \boxed{-8}. \end{cases}$$

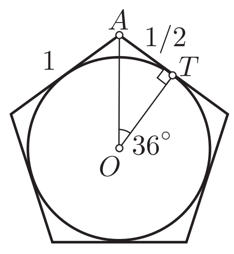
Es comprova que els dues solucions són bones.

3. La mesura del costat d'un pentàgon regular és igual a 1 m. Calculeu la seva àrea i la del cercle inscrit.

Si observem el triangle rectangle $\triangle OTA$, tenim $\tan 36° = \frac{1/2}{OT}$.

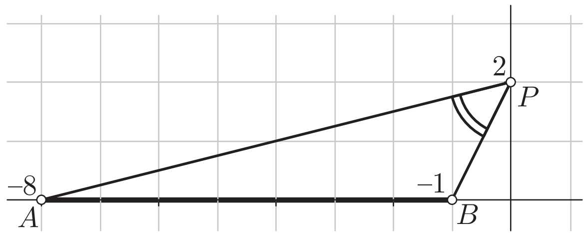
Àrea(pentàgon)$= \frac{5 \cdot OT}{2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2\tan 36°}}{2} = \boxed{\frac{5}{4\tan 36°} \approx 1.72\,\mathrm{m}^2}.$

Àrea(cercle)$= \pi \cdot OT^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2\tan 36°}\right)^2 \approx \boxed{1.49\,\mathrm{m}^2}.$



4. Considereu uns eixos de coordenades perpendiculars i graduats amb la mateixa unitat de mesura. Un observador està situat en el punt de coordenades $P(0,2)$. Calculeu sota quin angle veu el segment determinat pels punts $A(-8,0)$ i $B(-1,0)$.

Aplicarem el teorema del cosinus sobre el triangle $\triangle APB$.



Observem que $AP = \sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68}$, $BP = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ i $AB = 7$. Llavors,

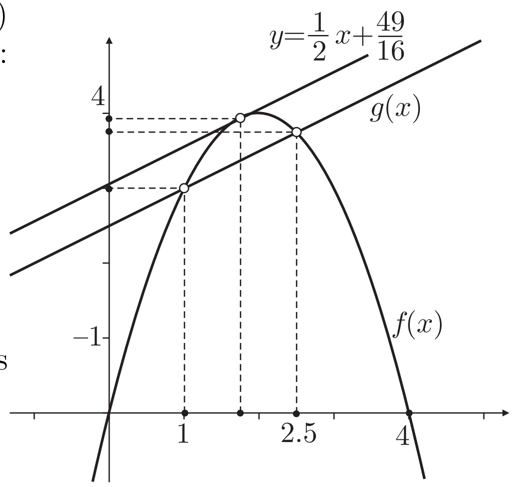
$$7^2 = 68 + 5 - 2\sqrt{68\cdot 5}\cdot\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{49-73}{-2\sqrt{68\cdot 5}} = \frac{6}{\sqrt{85}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 49^\circ\, 23'\, 55''}.$$

5. Considereu les funcions $f(x) = 4x - x^2$ i $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

a) Trobeu raonadament els punts x tals que $f(x) < g(x)$.

b) Trobeu l'equació de la recta paral·lela al gràfic de $g(x)$ que és tangent al gràfic de $f(x)$ i dibuixeu els tres gràfics.

a) Buscarem els gràfics de les dues funcions i els punts on es tallen. Els talls amb els eixos de la paràbola són el $(0,0)$ i el $(4,0)$. El vèrtex és el $(2,4)$. Els dos gràfics es tallen en:



$$4x - x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Longleftrightarrow 8x - 2x^2 = x + 5$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4} = \begin{cases} 5/2 \\ 1. \end{cases}$$

Finalment, dels resultats obtinguts i si observem les imatges $f(x)$ i $g(x)$ en els gràfics, tenim

$$\boxed{f(x) < g(x) \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2.5, +\infty)}.$$

b) En ser paral·lela la recta cercada ha de tenir el mateix pendent $1/2$. Per tant serà del tipus $y = \frac{1}{2}x + k$. Llavors, per aconseguir la tangència, només caldrà imposar que el sistema que forma amb la paràbola tingui solució única.

$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + k \\ y = 4x - x^2 \end{array}\right. \text{ té solució única } \Longrightarrow x + 2k = 8x - 2x^2 \text{ té solució única.}$$

$$\Longrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 2k = 0 \text{ té solució única. } \Longrightarrow 49 - 16k = 0 \Longrightarrow K = \frac{49}{16}.$$

Per tant, l'equació de la recta tangent és $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{49}{16}}$.

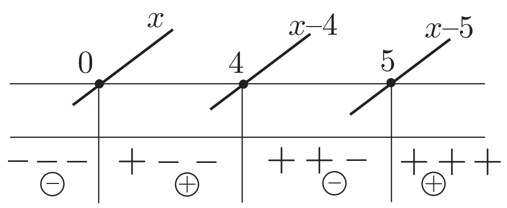
6. Considerem els ortoedres que tenen un volum $V(x)$ que varia en funció d'una de les seves arestes x segons descriu la fórmula $V(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$.

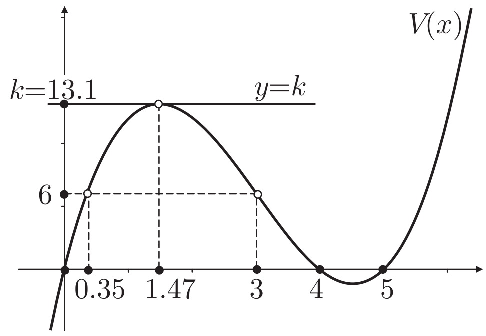
a) Trobeu la descomposició factorial de $V(x)$, utilitzeu-la per estudiar el seu signe i, a partir del resultat, feu un gràfic de $V(x)$.

b) Ens informen que els valors de x només poden ser els que es troben a l'interval $(0, 4)$. Trobeu els x per als quals $V(x) = 6$ i el valor de x tal que la caixa té volum màxim.

a) $V(x) = x^3 - 9x^2 + 10x = x(x^2 - 9x + 20) = \boxed{x(x-4)(x-5)}$, perquè les arrels del polinomi de segon grau $x^2 - 9x + 20$ són $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \dfrac{9 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 4. \end{array} \right.$

Llavors, de l'estudi adjunt del signe en resulta el gràfic inferior dret.





b) $V(x) = 6 \Longrightarrow x^3 - 9x^2 + 10x - 6 = 0$. En l'interval $(0, 4)$ les solucions les busquem en una primera etapa mitjançant la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -9 & 20 & -6 \\ 3 & & 3 & -18 & 6 \\ \hline & 1 & -6 & 2 & 0 \end{array} \Longrightarrow \text{ una solució és } x = 3 \text{ i les altres satisfan } x^2 - 6x + 20 = 0.$$

És a dir, $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-8}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 + \sqrt{7} > 4 \\ 3 - \sqrt{7} \approx 0.354. \end{array} \right.$

Per tant, $\boxed{V(x) = 6 \text{ i } 0 < x < 4 \Longleftrightarrow x = 3 \text{ o bé } x \approx 0.354}$.

El punt màxim és caracteritza per ser la intersecció de $V(x)$ amb la recta tangent $y = k$. Aquest punt resulta ser una arrel doble del sistema $y = V(x)$, $y = k$, és a dir, de l'equació

$$x^3 - 9x^2 + 20x - k = 0.$$

Imposem l'existència d'una solució doble d'aquesta equació i l'anomenem $x = a$. Ho farem aplicant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 20 & -k \\ a & & a & a^2 - 9a & a^3 - 9a^2 + 20a \\ \hline & 1 & a - 9 & a^2 - 9a + 20 & a^3 - 9a^2 + 20a - k = 0 \\ a & & a & 2a^2 - 9a & \\ \hline & 1 & 2a - 9 & 3a^2 - 18a + 20 = 0. & \end{array}$$

Llavors, $a = \dfrac{18 \pm \sqrt{324-240}}{6} = \dfrac{18 \pm 2\sqrt{21}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{9 + \sqrt{21}}{3} \approx 4.528 \\ \dfrac{9 - \sqrt{21}}{3} \approx 1.472 \end{array} \right.$

Així, el volum màxim si $0 < x < 4$ s'assoleix per a $\boxed{x \approx 1.472 \text{ i val } k \approx V(1.472) \approx 13.128}$.