1. Resoleu: a) $4x^2+5x-6=0$. b) $(x^2-4)(x^2+4)=x^2+14$. c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{12}{x+3}=5$

d) $\begin{cases} x+4y=1 \\ x^2+4y^2=2\,. \end{cases}$ e) $\dfrac{2x}{3}=4-\sqrt{2x^2-8}$.

a) $4x^2+5x-6=0 \Longrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+96}}{8}=\dfrac{-5\pm 11}{8}= \begin{cases} \dfrac{6}{8}=\boxed{\dfrac{3}{4}} \\ \dfrac{-16}{8}=\boxed{-2}. \end{cases}$

b) $(x^2-4)(x^2+4)=x^2+14 \Longrightarrow x^4-16=x^2+14 \Longrightarrow x^4-x^2-30=0$

$\Longrightarrow$ (fem $x^2=z$) $z^2-z-30=0 \Longrightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+120}}{2}=\dfrac{-1\pm 11}{2}= \begin{cases} 6 \\ -5 \end{cases}$

$\Longrightarrow x^2=z= \begin{cases} 6 \Longrightarrow x=\boxed{\pm\sqrt{6}} \\ -5 \Longrightarrow \text{no existeix } x. \end{cases}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{12}{x+3}=5 \Longrightarrow x+3+12x=5x(x+3) \Longrightarrow 3+13x=5x^2+15x$

$\Longrightarrow 5x^2+2x-3=0 \Longrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{10}=\dfrac{-2\pm 8}{10}= \begin{cases} \dfrac{6}{10}=\boxed{\dfrac{3}{5}} \\ \dfrac{-10}{10}=\boxed{-1}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+4y=1 \\ x^2+4y^2=2\,. \end{cases} \overset{x=1-4y}{\Longrightarrow} (1-4y)^2+4y^2=2 \Longrightarrow 1+16y^2-8y+4y^2=2$

$\Longrightarrow 20y^2-8y-1=0 \Longrightarrow y=\dfrac{8\pm\sqrt{64+80}}{40}=\dfrac{8\pm 12}{40}= \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{10}\,. \end{cases}$

Finalment, $\begin{cases} \boxed{y=\dfrac{1}{2} \Longrightarrow x=1-4\cdot\dfrac{1}{2}=-1} \\ \boxed{y=-\dfrac{1}{10} \Longrightarrow x=1-4\cdot\left(-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{14}{10}=\dfrac{7}{5}}. \end{cases}$

e) $\dfrac{2x}{3}=4-\sqrt{2x^2-8} \Longrightarrow (2x-12)^2=\left(-\sqrt{2x^2-8}\right)^2 \Longrightarrow 4x^2-48x+144=9(2x^2-8)$

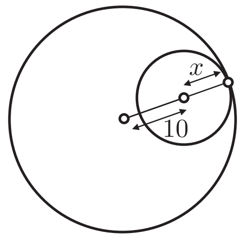
$\Longrightarrow 14x^2+48x-216=0 \Longrightarrow 7x^2+24x-108=0$

$\Longrightarrow x=\dfrac{-24\pm\sqrt{576+3024}}{14}=\dfrac{-24\pm 60}{14}= \begin{cases} \dfrac{36}{14}=\boxed{\dfrac{18}{7}} \\ -\dfrac{84}{14}=\boxed{-6} \end{cases}$

Comprovació: $\begin{cases} \boxed{x=\dfrac{18}{7}} : \quad 4-\sqrt{2\cdot\left(\frac{18}{7}\right)^2-8}=4-\sqrt{\frac{648-392}{49}}=4-\frac{16}{7}=\frac{12}{7}=2\cdot\frac{18/7}{3} \\ \boxed{x=-6} : \quad 4-\sqrt{2\cdot(-6)^2-8}=4-\sqrt{64}=4-8=-4=\frac{2\cdot(-6)}{3}\,. \end{cases}$

2. Dues circumferències són tangents interiorment. Els seus centres es troben separats per una distància de 10 cm. Calculeu els seus radis si sabem que l'àrea de la gran és igual a 9 vegades l'àrea de la petita.

Recordem que dues circumferències tangents tenen alineats els seus centres amb el punt de tangència. Llavors, si anomenem x el valor del radi de la circumferència petita, el radi de la circumferència gran és igual $10 + x$. Amb aquesta elecció de la incògnita presentem dues resolucions:



• **Resolució 1:** Tenim en compte que totes les circumferències són figures semblants entre si i que la raó entre les àrees és el quadrat que la raó de semblança (entre les línies). Llavors, en ser la raó entre les àrees igual a 9,

$$\frac{x+10}{x} = \sqrt{9} = 3 \iff x + 10 = 3x \iff 10 = 2x \iff x = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}.$$

Per tant els radis cercats són de $\boxed{5 \text{ cm i } 15 \text{ cm}}$.

• **Resolució 2:** Recordem que l'àrea d'un cercle es pot calcular amb la fórmula πr^2, en què r és el radi del cercle. Llavors, a partir de les dades obtenim:

$$\begin{aligned} \pi(x+10)^2 = 9\pi x^2 &\iff (x+10)^2 = 9x^2 \iff 8x^2 - 20x - 100 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 5x - 25 = 0 \iff x = \frac{5 \pm \sqrt{25+200}}{4} = \frac{5 \pm 15}{4} = \begin{array}{l} \nearrow\ 5 \\ \searrow\ -2.5. \end{array} \end{aligned}$$

En aquest cas, la solució negativa no és admissible i obtenim els radis de $\boxed{5 \text{ cm i } 15 \text{ cm}}$.

3. Calculeu de dues maneres diferents les raons trigonomètriques d'un angle α tal que $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$:

a) Sense calculadora i fent ús de les identitats trigonomètriques.

b) Trobant prèviament l'angle α amb calculadora i, tot seguit, mitjançant l'ús d'aquesta per trobar les seves raons. Compareu els resultats dels dos apartats.

Presenteu un procediment per fer el càlcul d'aquestes raons d'una manera aproximada, sense calculadora i utilitzant estris de dibuix i un semicercle graduat.

$$\text{a) } \cos\alpha = \frac{1}{3} \Longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{8}}{3}} \\ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{8}/3}{1/3} = \boxed{\sqrt{8}}. \end{cases}$$

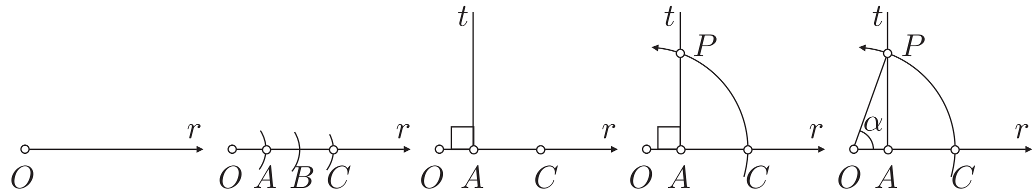
$$\text{b) } \cos\alpha = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = \overbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\cos}}^{\cos^{-1}}\ \boxed{(}\,\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{)} \approx 70^\circ\ 31'\ 43.6'' \Longrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \sin\alpha \approx 0.9428094 \\ \tan\alpha \approx 2.8284271 \end{array}} \right.$$

Si trobem, amb la calculadora, els valors de l'apartat (a), coincideixen amb aquests últims.

El procediment mitjançant un dibuix el representem en l'esquema següent:

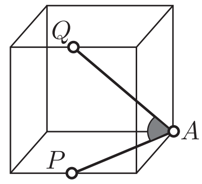
L'objectiu és la construcció del triangle rectangle $\triangle OAP$ final amb l'angle α de l'enunciat. Ho hem fet a partir de la informació $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Llavors, per calcular el sinus i la tangent d'aquest angle només caldrà mesurar, amb un regle amb marques, OA, AP i OP en l'etapa (5) i calcular

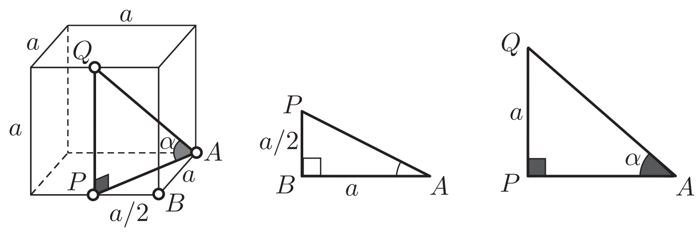
$$\sin\alpha = \frac{\text{mesura}(AP)}{\text{mesura}(OP)} \quad \text{i} \ \tan\alpha = \frac{\text{mesura}(AP)}{\text{mesura}(OA)}\,.$$



(1) (2) (3) (4) (5)

4. Calculeu l'angle $\angle PAQ$, en graus, minuts i segons, del cub de la figura adjunta. Els punts P i Q són els punts mitjans de les arestes.





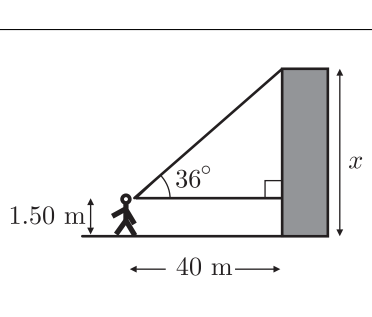
Anomenem a el valor de l'aresta del cub. Observem que si tracem el segment PQ s'obté el triangle rectangle $\triangle APQ$. Calcularem l'angle α a partir dels valors de AP i $PQ = a$ i la raó trigonomètrica $\tan\alpha$ que els relaciona. Per aconseguir-ho caldrà calcular AP, la qual cosa farem amb el teorema de Pitàgores sobre el triangle $\triangle ABP$.

$$AP = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \tan\alpha = \frac{PQ}{AP} = \frac{a}{a\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 41^\circ\ 48'\ 37.13''}\,.$$

5. Ens trobem a 40 m de la façana d'un edifici. L'angle d'elevació de la seva cornisa superior mesurat des del nivell dels nostre ull és de 36°. Si la distància del nostre ull al terra és de 1.50 m, calculeu l'alçada de l'edifici.

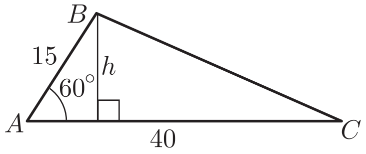
En el triangle rectangle de la figura adjunta, la raó trigonomètrica que relaciona la distància a l'edifici amb la seva alçada des del nivell dels nostres ulls és $\tan 36^\circ$. Per tant, si anomenem x l'alçada, tenim

$$x = 40 \cdot \tan 36^\circ + 1.50 \approx 29.06 + 1.50 = \boxed{30.56 \text{ m}}\,.$$



6. Un terreny triangular $\triangle ABC$ té les mesures següents. $AB = 15$ m, $AC = 40$ m i $\widehat{BAC} = 60°$. Calculeu la mesura de la seva superfície.

Considerem l'altura h sobre el costat AC de 40 m. Llavors,



$$
\begin{aligned}
\text{Àrea} &= \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{40 \cdot 15 \cdot \sin 60°}{2} \\
&= 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{150\sqrt{3} \approx 259.81 \text{ m}^2}.
\end{aligned}
$$