IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B 14/03/2011
Equacions i trigonometria – 3 $40+20+10+15+15+(15+5)$

1. Resoleu: a) $3x^2-4x-4=0$ b) $(2x-3)^2=6-4x$ c) $(x^2-3)(x^2+3)=2x^2-1$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=9x-\dfrac{5}{2}$.

a) $3x^2-4x-4=0 \iff x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\dfrac{4\pm 8}{6}= \begin{cases}\boxed{2}\\ -\dfrac{4}{6}=\boxed{-\dfrac{2}{3}}\end{cases}$.

b) $(2x-3)^2=6-4x \iff (2x-3)^2+2(2x-3)=0 \iff (2x-3)(2x-3+2)=0$

$$\iff \begin{cases} 2x-3=0\\ \text{o bé}\\ 2x-1=0\end{cases} \iff x= \begin{cases}\boxed{\dfrac{3}{2}}\\ \boxed{\dfrac{1}{2}}\end{cases}.$$

Resolució alternativa: $(2x-3)^2=6-4x \iff 4x^2-12x+9=6-4x \iff 4x^2-8x+3=0$

$$\iff x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}=\frac{8\pm 4}{8}= \begin{cases}\dfrac{12}{8}=\boxed{\dfrac{3}{2}}\\ \dfrac{4}{8}=\boxed{\dfrac{1}{2}}\end{cases}.$$

c) $(x^2-3)(x^2+3)=2x^2-1 \iff x^4-9=2x^2-1 \iff x^4-2x^2-8=0 \overset{x^2=z}{\iff} t^2-2t-8=0$

$$\iff t=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}= \begin{cases}4 \implies x=\sqrt{4}=\boxed{\pm 2}\\ -2 \implies x=\sqrt{-2}\ \text{No existeix.}\end{cases}$$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=9x-\dfrac{5}{2} \iff \dfrac{1}{x}=81x^2+\dfrac{25}{4}-45x \iff \boxed{324x^3-180x^2+25x-4=0}$.

La solució de l'exercici és la solució d'aquesta equació. No la podeu solucionar a no ser que feu temptejos o utilitzeu un programari informàtic com el GEOGEBRA per aproximar-la. Si ho feu així obtindreu la solució aproximada $x\approx 0.4444$

2. Un mòbil recorre 28.8 km amb velocitat constant. Si disminueix la seva velocitat en 24 km/h, recorre la mateixa distància en 12 minuts més que abans. Calculeu els temps invertits en el recorregut en els dos casos.

Presentem les dades, les incògnites i les equacions que descriuen el moviment:

	distància	velocitat	temps
Cas primer	28.8	v	t
Cas segon	28.8	$v-24$	$t+\dfrac{12}{60}$
	km	km/h	h

$$\implies \begin{cases} 28.8=v\cdot t\\ 28.8=(v-24)\left(t+\dfrac{1}{5}\right)\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 28.8=v\cdot t\\ 0=\dfrac{v}{5}-24t-\dfrac{24}{5}\end{cases} \implies v=120t+24 \implies 120t^2+24t-28.8=0$$

$$\Longrightarrow 5t^2 + t - 1.2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{10} = \frac{-1 \pm 5}{10} = \begin{cases} 2/5 = 0.4\,\text{h} = 24\,\text{min} \\ -6/10\,, \text{ (no serveix).} \end{cases}$$

Per tant, els temps invertits són $\boxed{24\,\text{min i } 36\,\text{min}}$.

3. Si $\tan\alpha = \dfrac{7}{2}$ i $0° < \alpha < 90°$, trobeu el valor de $\cos\alpha$. Expliqueu com ho heu fet.

Utilitzem la identitat $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

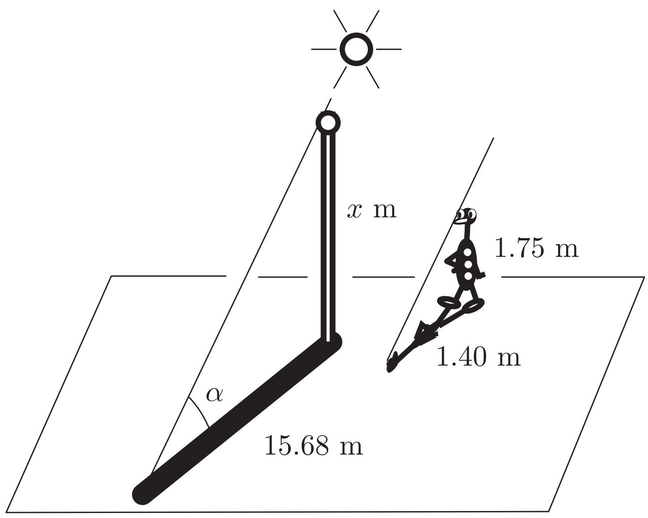
$$\cos\alpha = \frac{1}{+\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{+\sqrt{1+(7/2)^2}} = \frac{1}{+\sqrt{53/4}} = \boxed{\frac{2}{+\sqrt{53}} \approx 0.274721127}.$$

Hem triat l'arrel positiva perquè el cosinus per als angles del primer quadrant és positiu.

4. En Carles mesura 1.75 m. Hem mesurat la seva ombra quan estava dret al pati i hem obtingut una longitud de 1.40 m. Calculeu:

a) La longitud del pal de suport d'un punt de llum del pati que a la mateixa hora tenia una ombra de longitud 15.68 m.

b) L'angle d'elevació del Sol sobre l'horitzó a la mateixa hora.



a) En ser els rajos del Sol paral·lels per trobar-se aquest a gran distància de la Terra, els triangles formats pels seus rajos, les ombres, en Carles i el pal de x metres són semblants. Per tant,

$$\frac{1.75}{1.40} = \frac{x}{15.68} \Longleftrightarrow x = \frac{15.68 \cdot 1.75}{1.40} = \boxed{19.6\,\text{m}}.$$

b) L'angle α l'obtenim de

$$\tan\alpha = \frac{19.6}{15.68} = \frac{1.75}{1.40}$$

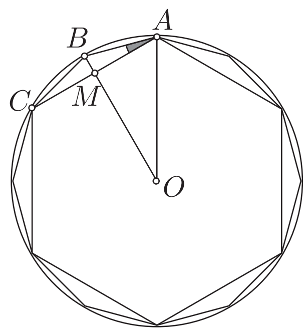
Per tant, $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1.75}{1.40}\right) = \boxed{51°\,20'\,24.69''}$.

5. Observeu en la figura adjunta el dodecàgon regular inscrit en un cercle.

a) Justifiqueu que l'angle $\widehat{CAB}$ mesura 15°.

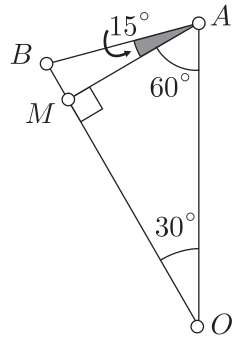
b) Considereu el radi OA igual a la unitat de mesura. Calculeu $\tan 15°$ sense calculadora.

c) Calculeu el valor exacte de la longitud del costat del dodecàgon.



a) L'angle central $\widehat{COB}$ mesura $\dfrac{360°}{12} = 30°$. Per tant, l'angle inscrit $\widehat{CAB} = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

b) El triangle $\triangle OAM$ és del tipus $30° - 60° - 90°$.



Per tant, $OA = 1$ implica $\begin{cases} AM = OA \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2}, \\ OM = OA \cdot \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ MB = OB - OM = 1 - \sqrt{3}/2 \end{cases}$

i, finalment,

$$\tan 15° = \frac{MB}{AM} = \frac{1-\sqrt{3}/2}{1/2} = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2-\sqrt{3} \approx 0.267949192}.$$

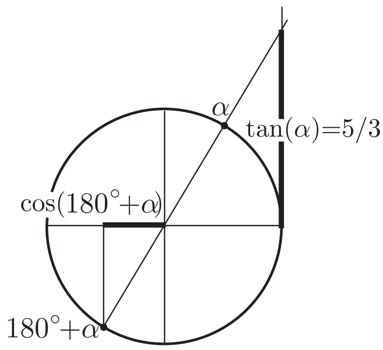
c) $AB = \dfrac{1/2}{\cos 15°} = \dfrac{1+\tan^2 15°}{2} = \dfrac{1+(2-\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0.51763809}.$

6. Si $0° < \alpha < 90°$ i $\tan\alpha = \dfrac{5}{3}$, calculeu:

a) El valor exacte de $\cos(180° + \alpha)$ sense calculadora i representant gràficament els angles implicats sobre la circumferència trigonomètrica.

b) El valor aproximat de $\cos(180° + \alpha)$ amb calculadora i sense l'ajut de les identitats trigonomètriques.

a) Del gràfic adjunt obtenim,



$$\begin{aligned} \cos(180° + \alpha) &= -\cos\alpha = -\frac{1}{+\sqrt{1+(5/3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{34/9}} \\ &= \boxed{-\frac{3}{\sqrt{34}}}. \end{aligned}$$

b) Amb calculadora: $\tan\alpha = \dfrac{5}{3} \Longrightarrow \alpha = 59°\, 2'\, 10.48''$

$$\Longrightarrow 180° + \alpha = 239°\, 2'\, 10.48'' \Longrightarrow \cos(180° + \alpha) \approx \boxed{-0.514495755},$$

i, a l'apartat (a), $-\dfrac{3}{\sqrt{34}} = -0.514495755$.