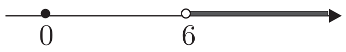
IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B — 11/05/2011
Inequacions i funcions – 2 — $30 + (20 + 5) + (10 + 15) + (5 + 10 + 20 + 5)$

1. Resoleu i representeu les solucions sobre la recta real:

a) $3x + 5 < 5x - 7$ b) $\dfrac{4x-3}{4} - \dfrac{1-x}{6} \leq x$ c) $\begin{cases} x - 2 \geq 3x + 5 \\ 3 + x \geq 5 - 2x \end{cases}$

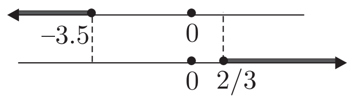
a) $3x + 5 < 5x - 7 \iff 5 + 7 < 5x - 3x \iff 12 < 2x \iff \boxed{x > 6 \iff x \in (6, +\infty)}$.

b) $\dfrac{4x-3}{4} - \dfrac{1-x}{6} \leq x \overset{\times 12}{\iff} 12x - 9 - 2 + 2x \leq 12x \iff 2x \leq 11 \iff \boxed{x \leq \dfrac{11}{2} \iff x \in \left(-\infty, \dfrac{11}{2}\right]}$.

a) 

b) 

c) $\begin{cases} x - 2 \geq 3x + 5 \\ 3 + x \geq 5 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} -7 \geq 2x \\ 3x \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -\dfrac{7}{2} = -3.5 \\ x \geq \dfrac{2}{3} \approx 0.67 \end{cases} \iff \boxed{\text{No existeix } x}$.



$\Longrightarrow$ No hi ha punts compartits

2. Sigui $f(x) = 2x^2 + x - 10$.

a) Trobeu els punts de tall del seu gràfic amb els eixos de coordenades, el vèrtex i feu-ne la representació gràfica.

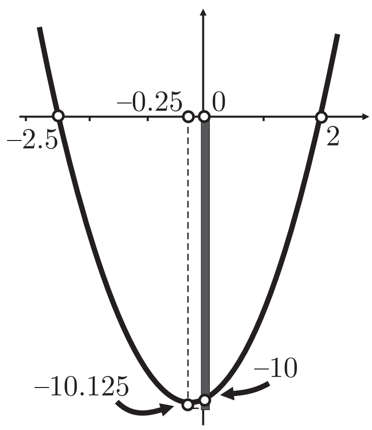
b) Resoleu, a partir de l'observació del gràfic anterior i amb l'explicació de com heu trobat el resultat, la inequació

$$2x^2 + x - 10 < 0.$$

a) Talls OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$

$$\Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -5/2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} (2, 0) \\ (-2.5, 0)\,. \end{matrix}}$$



Tall OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - 10 = -10 \Longrightarrow \boxed{(0, -10)}$.

Vèrtex : $x_v = -\dfrac{1}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{4}$

$\Longrightarrow y_v = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 10 = -\frac{81}{8} \Longrightarrow \boxed{(-0.25, -10.125)}$.

En resulta un gràfic amb les branques amunt, d'acord amb el signe positiu del coeficient del terme de grau 2.

b) Observem que tots els nombres x que es troben entre -2.5 i 2, a l'eix OX, tenen la seva imatge $f(x) = 2x^2 + x - 10$ en la part negativa de l'eix OY. Per tant, $2x^2 + x - 10 < 0$ quan $\boxed{-2.5 < x < 2}$, és a dir quan $\boxed{x \in (-2.5, 2)}$.

3. Sigui el polinomi $p(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

a) Trobeu el quocient i el residu que resulten de dividir-lo per $x + 2$ i comproveu el resultat.

b) Trobeu les arrels de $p(x)$ i la seva descomposició factorial.

a) Utilitzem la regla de Ruffini per fer la divisió.

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -4 & -4 \\ -2 & & -6 & 20 \\ \hline & 3 & -10 & 16 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Quocient: } 3x - 10 \\ \text{Residu: } 16\end{array}}$$

Comprovació:

$$\begin{array}{rrr} & 3x & -10 \\ \times & x & +\ 2 \\ \hline + & 6x & -20 \\ 3x^2 & -10x & \\ \hline 3x^2 & -\ 4x & -20 \\ & & +16 \\ \hline 3x^2 & -\ 4x & -\ 4 \end{array}$$

b) Busquem les arrels amb l'algoritme de resolució de les equacions de segon grau.

$$\text{Arrels: } 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \boxed{2} \\ \boxed{-\frac{2}{3}} \end{cases}.$$

Descomposició factorial: $\boxed{p(x) = 3(x - 2)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x - 2)(3x + 2)}$.

4. Tenim un cos d'altura x variable tal que el seu volum $V(x)$ varia segons indica la funció

$$V(x) = x^3 - 13x^2 + 52x - 60.$$

a) Quin és el seu volum quan l'altura mesura 4 unitats.

b) Per a quines altures el volum del cos mesura 6 unitats cúbiques.

c) S'observa que per alguns valors de l'altura x el cos deixa d'existir perquè té volum $V(x) \leq 0$. Per exemple, $V(1) = -10$ i $V(6) = 0$. Calculeu:

(1) Els valors de x per als quals $V(x) = 0$.

(2) Els valors de x per als quals $V(x) < 0$.

d) Feu un esquema gràfic de la funció $V(x)$.

a) $V(4) = 4^3 - 13 \cdot 4^2 + 52 \cdot 4 - 60 = \boxed{4}$, o també per Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -13 & 52 & -60 \\ 4 & & 4 & -36 & 64 \\ \hline & 1 & -9 & 16 & \boxed{4 = V(4)} \end{array}$$

b) $V(x) = 6 \Longleftrightarrow x^3 - 13x^2 + 52x - 60 = 6 \Longleftrightarrow x^3 - 13x^2 + 52x - 66 = 0$.

Buscarem una solució per Ruffini i les altres dues a partir de l'equació de segon grau resultant.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -13 & 52 & -66 \\ 3 & & 3 & -30 & 66 \\ \hline & 1 & -10 & 22 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 10x + 22 = 0$$

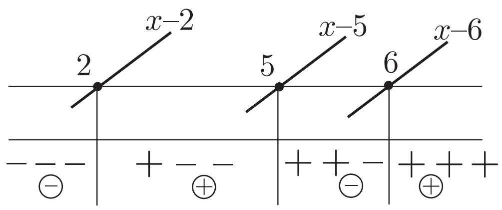
$$\Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 88}}{2} = \frac{10 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 + \sqrt{3} \\ 5 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

El cos mesura 6 unitats cúbiques per a les altures $\boxed{3,\ 5-\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3}}$.

c.1 i c.2) Utilitzem la regla de Ruffini per resoldre $V(x) = 0$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -13 & 52 & -60 \\
2 & & 3 & -30 & 66 \\
\hline
 & 1 & -11 & 30 & 0 \\
5 & & 5 & -30 & \\
\hline
 & 1 & -6 & 0 &
\end{array}
\quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p(x) = (x-2)(x-5)(x-6)\,, \text{ i les seves arrels són} \\ \boxed{x=2,\ x=5,\ x=6}. \end{array} \right.
$$

Les solucions de $V(x) < 0$ les podem trobar si estudiem el signe de cadascun dels tres factors i després els multipliquem. Ho fem en la figura adjunta:



En resulta, $V(x) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{x < 2 \text{ o bé } 5 < x < 6}$. És a dir $\boxed{x \in (-\infty, 2) \cup (5, 6)}$.

d) Amb tota la informació recollida podem fer un esquema del gràfic de la funció $V(x)$. Caldrà,

– Marcar els talls amb els eixos, (les arrels de $V(x)$ i $V(0)$).

– Observar quan $V(x)$ és positiva i quan és negativa des de l'estudi fet a l'apartat (c).

– Deduir-ne que quan x tendeix a $-\infty$ també hi tendeix $V(x)$, i que quan x tendeix a $+\infty$ també ho fa $V(x)$.