IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 4T ESO B 25/05/2011

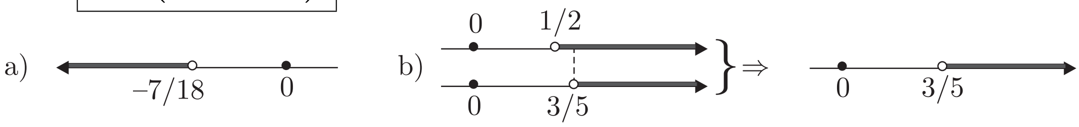
Inequacions i funcions – 3 $20 + (20 + 5 + 15) + (5 + 10 + 20 + 5 + 20)$

1. Resoleu i representeu les solucions sobre la recta real:

a) $\dfrac{2x-5}{12} > x - \dfrac{1-x}{15}$ b) $\begin{cases} 3x+2 > x+3 \\ 2-3x < 2x-1 \end{cases}$

a) $\dfrac{2x-5}{12} > x - \dfrac{1-x}{15} \overset{\times 60}{\Longleftrightarrow} 10x - 25 > 60x - 4 + 4x \Longleftrightarrow -21 > 54x \Longleftrightarrow \boxed{x < -\dfrac{21}{54} = -\dfrac{7}{18}}$

$\Longleftrightarrow \boxed{x \in \left(-\infty, -\dfrac{7}{18}\right)}$.



b) $\begin{cases} 3x+2 > x+3 \\ 2-3x < 2x-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 3 < 5x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} = 0.5 \\ x > \dfrac{3}{5} = 0.6 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{x > \dfrac{3}{5} \Longleftrightarrow x \in \left(\dfrac{3}{5}, +\infty\right)}$.

2. Considereu les funcions $f(x) = 1 - 9x^2$ i $g(x) = 1 - 9x$.

a) Trobeu els punts de tall del gràfic de $f(x)$ amb els eixos de coordenades, el seu vèrtex i feu la seva representació gràfica.

b) Resoleu, a partir de l'observació del gràfic anterior i amb l'explicació de com heu trobat el resultat, la inequació

$$1 - 9x^2 < 0.$$

c) Trobeu els nombres x tals que $f(x) > g(x)$.

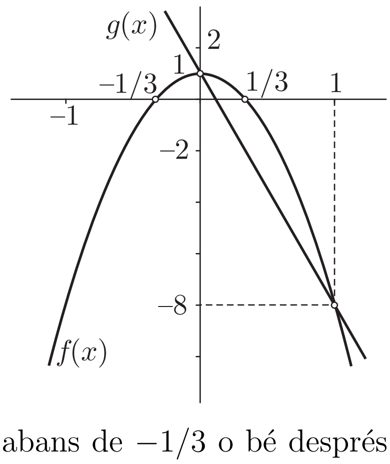
a) Talls OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow 1 - 9x^2 = 0$

$\Longrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\left(\dfrac{1}{3}, 0\right), \quad \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)}$.

Tall OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 - 9 \cdot 0^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{(0,1)}$.

Vèrtex : $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot (-9)} = 0$

$\Longrightarrow y_v = f(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{(0,1)}$.



S'obté el gràfic d'una paràbola amb les branques avall, que concorda amb el signe negatiu del coeficient del terme de grau 2.

b) En el gràfic, tots els nombres x que es troben sobre l'eix OX abans de $-1/3$ o bé després d'1/3, tenen la seva imatge $f(x) = 1 - 9x^2$ en la part negativa de l'eix OY. Per tant, $1 - 9x^2 < 0$ quan $\boxed{-1/3 < x < 1/3}$, és a dir, quan $\boxed{x \in (-\infty, 1/3) \cup (1/3, +\infty)}$.

c) Per estudiar, les interseccions dels gràfics de $f(x)$ i $g(x)$, imposem $g(x) = f(x)$. Llavors,

$$1 - 9x^2 = 1 - 9x \Longleftrightarrow 9x^2 - 9x = 0 \Longleftrightarrow 9x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = \begin{cases} 0 \Longrightarrow y = 1 \\ 1 \Longrightarrow y = -8. \end{cases}$$

Conseqüentment, des del gràfic adjunt obtenim $\boxed{f(x) > g(x) \Longleftrightarrow x \in (0,1)}$.

3. L'evolució dels beneficis $B(x)$ en euros d'una empresa al llarg d'un any, en funció del nombre de dies x transcorreguts des de l'inici d'any, s'han descrit amb una molt bona aproximació pel model que proporciona la funció

$$B(x) = \frac{1}{10}\,x^3 - 30x^2 + 2000x.$$

(Fem notar que $B(x) < 0$ es tradueix com que l'empresa té pèrdues i $B(x) > 0$ com que té guanys.)

a) Calculeu els beneficis quan $x = 50$ dies.

b) Observeu que $B(10) = 17100$€ . Existeix algun altre dia x en què $B(x) = 17100$€ ? En cas afirmatiu, trobeu-lo.

c) Trobeu els dies x en què $B(x) = 0$ i utilitzeu el resultat per fer la descomposició factorial de $B(x)$. Deduïu-ne la representació gràfica de $B(x)$.

d) Trobeu raonadament els dies que l'empresa presenta pèrdues.

e) Trobeu raonadament el dia en què, durant els primers 100 dies de l'any, la funció ha assolit un valor màxim i calculeu aquest valor.

a) $B(50) = \dfrac{50^3}{10} - 30 \cdot 50^2 + 2000 \cdot 50 = 12500 - 75000 + 100000 = 37500$€ .

b) $B(x) = 17100 \Longleftrightarrow x^3 - 300x^2 + 20000x - 171000 = 0$. Si apliquem la regla de Ruffini per a l'arrel $x = 10$ d'aquesta última equació, obtindrem una equació de segon grau que proporcionarà les altres dues solucions d'aquesta equació:

	1	−300	20000	−171000
10		10	−2900	171000
	1	−290	17100	0

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 300x^2 + 20000x - 171000 = 0 \\ \quad \Longrightarrow (x-10)(x^2 - 290x + 17100) = 0 \\ \quad \Longrightarrow x^2 - 290x + 17100 = 0 \end{array} \right.$$

Per tant, $x = \dfrac{290 \pm \sqrt{84100 - 68400}}{2} = \dfrac{290 \pm \sqrt{15700}}{2} = \begin{cases} \approx 207.65 \\ \approx 82.35, \end{cases}$

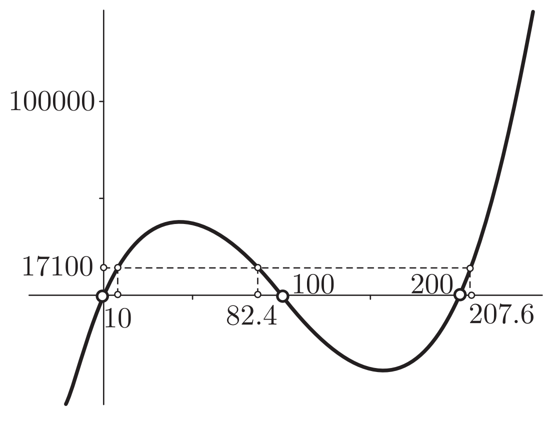
és a dir quan han transcorregut $\boxed{\text{82 dies i 207 dies}}$.

c) $B(x) = \frac{1}{10} \cdot x \cdot (x^2 - 300x + 20000) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o bé $x^2 - 300x + 20000 = 0$.

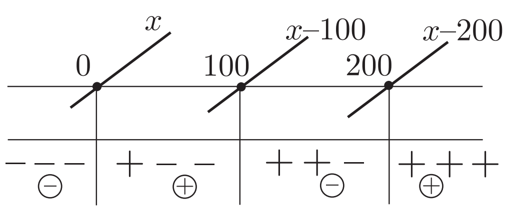
De la segona equació s'obté $x = \dfrac{300 \pm \sqrt{90000 - 80000}}{2} = \dfrac{300 \pm 100}{2} = \begin{cases} 200 \\ 100. \end{cases}$

Per tant,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} B(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = 100,\ x = 200 \\ B(x) = \frac{1}{10} \cdot x \cdot (x-100)(x-200). \end{array} \right.}$$

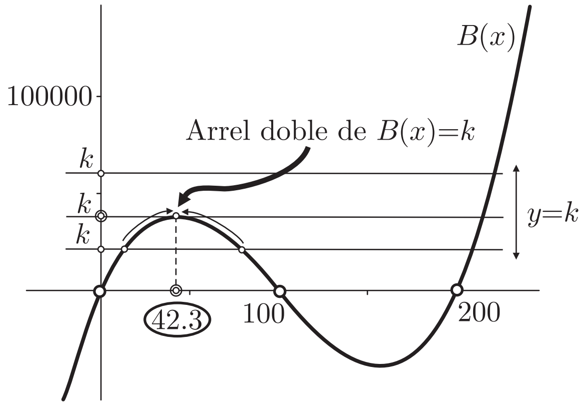


De tots els resultats obtinguts i de l'estudi del signe de $B(x)$ a partir dels signes dels seus factors s'obté el gràfic adjunt.



d) L'empresa $\boxed{\text{té pèrdues entre el dies 100 i 200}}$, en ser les ordenades $B(x)$ del gràfic negatives.

e) Considerem la col·lecció de rectes $y = k$ paral·leles a l'eix de les abscisses. La característica del punt màxim és que s'obté d'una solució doble de l'equació $B(x) = k$, que resulta de tallar $y = B(x)$ amb $y = k$. El concepte d'arrel doble s'explica a partir de que la recta talla el gràfic en dos punts quan la sotmetem a un petit desplaçament avall. Llavors, en desplaçar-la un altre cop fins que talla en el màxim, els dos punt s'identifiquen i això es tradueix algèbricament en l'aparició de dues arrels repetides de l'equació $B(x) = k$.



Imposem doncs l'existència d'una solució doble de l'equació

$$\frac{1}{10}x^3 - 30x^2 + 2000x = k \Longleftrightarrow x^3 - 300x^2 + 20000x - 10k = 0,$$

i l'anomenem $x = a$. Ho farem aplicant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -300 & 20000 & -10k \\ a & & a & a^2 - 300a & a^3 - 300a^2 + 20000a \\ \hline & 1 & a - 300 & a^2 - 300a - 20000 & a^3 - 300a^2 + 20000a - 10k = 0 \\ a & & a & 2a^2 - 300a & \\ \hline & 1 & 2a - 300 & 3a^2 - 600a + 20000 = 0. & \end{array}$$

Llavors, $a = \dfrac{600 \pm \sqrt{360000 - 240000}}{6} = \dfrac{600 \pm 20\sqrt{3}}{6} = \begin{cases} 157.73 \\ 42.26. \end{cases}$

Per tant el benefici màxim en els primers 100 dies s'obté quan han transcorregut

$$\boxed{\text{42 dies, i el seu valor és } B(42.26) \approx 38490.02\,€}\,.$$