1. Opereu i expresseu en forma de fracció irreductible, (sense calculadora).

a) $\dfrac{21}{10}-\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{5}{8}$ b) $\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{11}{6}-1\right)}{3.5\overparen{72}}$

a) $\dfrac{21}{10}-\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{21}{10}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{168-15}{80}=\boxed{\dfrac{153}{80}}$.

b) $\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{11}{6}-1\right)}{3.5\overparen{72}}=\dfrac{3\cdot\dfrac{5}{6}}{\dfrac{3572-35}{990}}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{\dfrac{3537}{990}}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{\dfrac{393}{110}}=\dfrac{5\cdot110}{2\cdot393}=\dfrac{5\cdot55}{393}=\boxed{\dfrac{275}{393}}$.

2. Simplifiqueu, sense calculadora, les expressions següents utilitzant les regles d'operacions amb radicals. (Recordeu d'extreure tots els factors possibles de dins del radical):

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$ b) $\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{25}$ c) $\sqrt{125}+\sqrt[4]{25}$ d) $\sqrt[3]{a\cdot b^2}\cdot\sqrt[3]{(a\cdot b)^{2010}}$
e) $\sqrt[8]{a^5\cdot b^9}\cdot\sqrt[12]{a^9\cdot b^8}$ f) $\sqrt{108}-4\sqrt{75}+\sqrt{588}$

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{6\cdot24}=\sqrt{144}=\sqrt{16\cdot9}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}=4\cdot3=\boxed{12}$.

b) $\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{25}=\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}=5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{5\cdot5}=5\cdot5=\boxed{25}$.

c) $\sqrt{125}+\sqrt[4]{25}=\sqrt{5^3}+\sqrt[4]{5^2}=5\sqrt{5}+\sqrt{5}=(5+1)\sqrt{5}=\boxed{6\sqrt{5}}$.

d) $\sqrt[3]{a\cdot b^2}\cdot\sqrt[3]{(a\cdot b)^{2010}}=\boxed{a^{670}b^{670}\sqrt[3]{ab^2}}$.

e) $\sqrt[8]{a^5\cdot b^9}\cdot\sqrt[12]{a^9\cdot b^8}=\sqrt[24]{a^{15}b^{27}a^{18}b^{16}}=\sqrt[24]{a^{33}b^{43}}=\boxed{ab\sqrt[24]{a^9b^{19}}}$.

f) $\sqrt{108}-4\sqrt{75}+\sqrt{588}=\sqrt{36\cdot3}-4\sqrt{25\cdot3}+\sqrt{196\cdot3}$
$=6\sqrt{3}-4\cdot5\sqrt{3}+14\sqrt{3}=(6-20+14)\sqrt{3}=0\cdot\sqrt{3}=\boxed{0}$.

3. Resoleu les qüestions següents:

a) Si obro un compte amb 1500 € en règim d'interès compost del 4.75% anual i no el toco durant quatre anys, quants diners hi haurà en el compte al final d'aquest període?

b) Obro un compte amb 10000 € en règim d'interès compost i i no el toco en sis anys. Al final d'aquest període hi han 16000 € en el compte. Quin ha sigut el percentatge d'interès anual?

a) Sabem que el capital que hi ha en el compte al final de cada any és igual al que hi havia al principi de l'any multiplicat pel factor 1.0475. En ser 4 anys el període de capitalització, s'haurà de multiplicar 4 vegades per aquest factor. És a dir,

$$\text{Capital final }=1500\cdot1.0475^4=\boxed{1805.96\text{ €}}.$$

b) Amb un raonament semblant podem escriure,

$$16000=10000\cdot x^6,\ \text{en què } x=1+\ \text{tant per u}.$$

Llavors, $x^6=\dfrac{16000}{10000}\Longrightarrow x=\sqrt[6]{\dfrac{16000}{10000}}=\sqrt[6]{1.6}=1.08148\Longrightarrow\text{Interés }=\boxed{8.15\%}$.

4. Descriviu les diferències que hi ha entre els nombres racionals i els irracionals.

Els nombres racionals es poden expressar com una fracció d'enters i els irracionals no.

Els nombres irracionals tenen un nombre infinit de xifres decimals que no es repeteixen periòdicament i els racionals no.

5. Resoleu les equacions:

a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}=1-\dfrac{x}{3}$ b) $2x-1+\dfrac{5x}{6}=\dfrac{10x-1}{2}-\dfrac{13x+3}{6}$

c) $2x^2-x-1=0$ d) $6-2x^2=x-(2x-3)^2$

a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}=1-\dfrac{x}{3}\overset{\times 6}{\Longleftrightarrow} 2x-3x=6-2x \Longleftrightarrow (2-3+2)x=6 \Longleftrightarrow \boxed{x=6}$.

b) $2x-1+\dfrac{5x}{6}=\dfrac{10x-1}{2}-\dfrac{13x+3}{6}\overset{\times 6}{\Longleftrightarrow} 12x-6+5x=30x-3-(13x+3)$

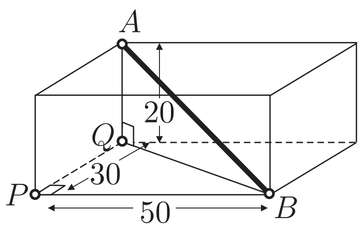
$\Longleftrightarrow 17x-6=17x-6 \Longleftrightarrow 0=0$ Això és cert per a qualsevol nombre que substituïm a la x. Per tant, $\boxed{\text{qualsevol nombre real és solució.}}$

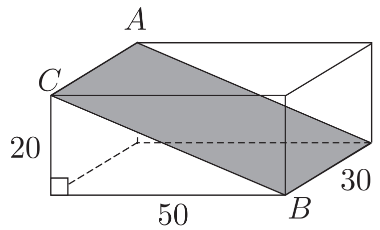
c) $2x^2-x-1=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}= \begin{cases}\boxed{1}\\ \boxed{-\dfrac{1}{2}}\end{cases}$

d) $6-2x^2=x-(2x-3)^2 \Longleftrightarrow 6-2x^2=x-(4x^2-12x+9) \Longleftrightarrow 2x^2-13x+15=0$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{4}=\frac{13\pm 7}{4}= \begin{cases}\boxed{5}\\ \boxed{\dfrac{3}{2}}\end{cases}$$

6. Teniu una caixa amb forma d'ortoedre. Té unes dimensions de 30 cm×50 cm×20 cm. Estudieu i raoneu si hi podríeu encabir, sense deformar la caixa, un bastonet recte de 60 cm. I una fullola rectangular rígida de 55 cm×30 cm?





El segment més llarg que es pot incloure dins l'ortoedre és la diagonal interior AB. La calcularem i la compararem amb la longitud del bastonet. Aplicarem el teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles $\triangle AQB$ i $\triangle QPB$ de la figura de l'esquerra en què hem remarcat els angles rectes.

$$QB=\sqrt{QP^2+PB^2}\Longrightarrow AB=\sqrt{QB^2+QA^2}=\sqrt{QP^2+PB^2+QA^2}$$

$$=\sqrt{30^2+50^2+20^2}=\sqrt{3800}\approx 61.64\text{ cm.}$$

En ser $60<61.64$, $\boxed{\text{podrem encabir el bastonet}}$.

Quant a la fullola, una petita anàlisi ens mostra que el més llarg dels seus costats no pot superar la longitud del costat BC del rectangle ombrejat de la dreta.

$$BC=\sqrt{50^2+20^2}=\sqrt{2900}\approx 53.85\text{ cm}<55\text{ cm}\Longrightarrow \boxed{\text{la fullola no hi cap}}.$$