

1. Opereu i expresseu en forma de fracció irreductible, (sense calculadora).

a)  $\frac{5}{16} + \frac{3}{40} - \frac{3}{15} + \frac{4}{30}$       b)  $\frac{3.1\overline{42}}{2 - \frac{1}{9}}$       c)  $\frac{\left(3 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}$

a)  $\frac{5}{16} + \frac{3}{40} - \frac{3}{15} + \frac{4}{30} = \frac{75 + 18 - 48 + 32}{240} = \boxed{\frac{77}{240}}$ .

b)  $\frac{3.1\overline{42}}{2 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{3142 - 31}{990}}{\frac{17}{9}} = \frac{3111 \cdot 9}{990 \cdot 17} = \frac{3111}{110 \cdot 17} = \boxed{\frac{183}{110}}$ .

c)  $\frac{\left(3 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{11}{4} \cdot \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{23}{8}} = \boxed{\frac{11}{23}}$ .

2. Simplifiqueu, sense calculadora, les expressions següents utilitzant les regles d'operacions amb radicals. (Recordeu d'extreure tots els factors possibles de dins del radical i no deixar cap resultat amb exponent negatiu o fraccionari):

a)  $\sqrt{98} - 4\sqrt{32} + 5\sqrt{50}$       b)  $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^5}}$       c)  $\sqrt[3]{0.125^{-8}}$       d)  $\frac{2 - 3\sqrt{12}}{\sqrt{3} - 1}$

a)  $\sqrt{98} - 4\sqrt{32} + 5\sqrt{50} = \sqrt{49 \cdot 2} - 4\sqrt{16 \cdot 2} + 5\sqrt{25 \cdot 2} = 7\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 25\sqrt{2}$   
 $= (7 - 16 + 25)\sqrt{2} = \boxed{16\sqrt{2}}$ .

b)  $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^5}} = \sqrt[12]{\frac{a^3 a^4 a^2}{a^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{a^9}{a^{10}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a}} \cdot \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \boxed{\frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{a}}$ .

c)  $\sqrt[3]{0.125^{-8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{125}{1000}\right)^{-8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{-8}} = \sqrt[3]{(2^{-3})^{-8}} = \sqrt[3]{2^{24}} = \boxed{2^8 = 256}$ .

d)  $\frac{2 - 3\sqrt{12}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2 - 3\sqrt{12}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{36} - 3\sqrt{12}}{3 - 1} = \frac{2\sqrt{3} + 2 - 18 - 6\sqrt{3}}{2}$   
 $= \frac{2 - 18 + (2 - 6)\sqrt{3}}{2} = \frac{-16 - 4\sqrt{3}}{2} = \boxed{-8 - 2\sqrt{3}}$ .

3. Resoleu les qüestions següents:

a) L'evolució del preu d'un producte durant tres setmanes és la següent:

	1a setmana	2a setmana	3a setmana
Preu	1200€	Puja un 10%	Baixa un 10% sobre el preu de la 2a setmana

Calculeu el preu en la tercera setmana i el percentatge d'augment o disminució d'aquest preu sobre el de la primera setmana.

b) Obro un compte amb 2000 € en règim d'interès compost de percentatge anual constant i desconegut. El mantinc durant 10 anys sense tocar-ne els diners. Al final d'aquest període hi ha un capital de 4000 €. Quin ha sigut el percentatge d'interès anual?

a) La pujada del 10% es tradueix en una multiplicació per 1.10. I la baixada del 10% es tradueix en una multiplicació per 0.90. Per tant,

$$\text{Preu final} = 0.9 \cdot 1.1 \cdot 1200 = \boxed{1188€}.$$

Quant al percentatge, el que la primera setmana costava 1200, a la tercera costa 1188. Llavors, la **disminució** de preu és de 12€, és a dir, en percentatge de  $\frac{12}{1200} = \frac{1}{100} = \boxed{1\%}$ .

b) Anomenem  $x$  el capital que s'obté a partir d'1€ en un any. Llavors,

$$x^{10} \cdot 2000 = 4000 \implies x^{10} = 2 \implies x = \sqrt[10]{2} \approx 1.07177 \implies \text{Interès anual} = \boxed{7.177\%}.$$

4. Resoleu les equacions:

a)  $\frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{2} = 1 - \frac{x}{4}$       b)  $x^2 + 8x + 15 = 0$       c)  $x^3 + 2x^2 + x = 0$

d)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$       e)  $\frac{x-3}{2} + x = \frac{30}{x}$       f)  $(x-3)^2 = 9x + (2x-3)^2$

a)  $\frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{2} = 1 - \frac{x}{4} \xLeftrightarrow{(\times 12)} 4x + 4 + 12x - 6 = 12 - 3x$

$$\iff (4 + 12 + 3)x = 12 - 4 + 6 \iff \boxed{x = \frac{14}{19}}.$$

b)  $x^2 + 8x + 15 = 0 \iff x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \boxed{-3} \\ \boxed{-5} \end{cases}.$

c)  $x^3 + 2x^2 + x = 0 \iff x(x^2 + 2x + 1) = 0$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \text{o bé} \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff \boxed{x = -1} \end{cases}.$$

d)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$$\iff x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} \boxed{3} \\ \boxed{-2} \end{cases}.$$

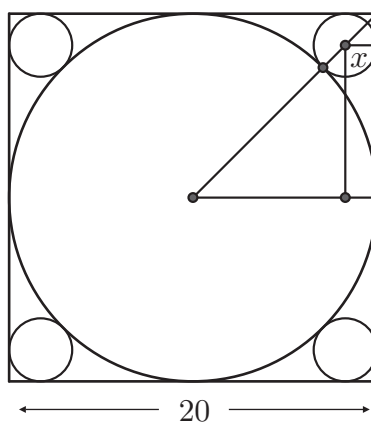
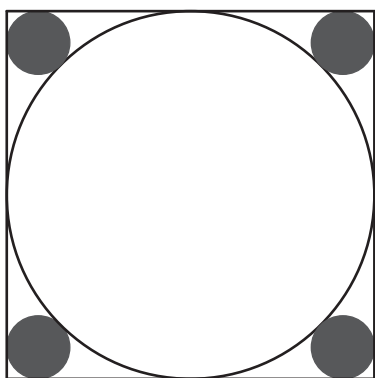
$$e) \frac{x-3}{2} + x = \frac{30}{x} \stackrel{(\times 2x)}{\iff} x^2 - 3x + 2x^2 = 60 \iff 3x^2 - 3x - 60 = 0$$

$$\iff x^2 - x - 20 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

$$f) (x-3)^2 = 9x + (2x-3)^2 \iff x^2 - 6x + 9 = 9x + 4x^2 - 12x + 9$$

$$\iff 3x^2 + 3x = 0 \iff 3x(x+1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bé} \\ x + 1 = 0 \iff x = -1 \end{cases}$$

5. Observeu la figura adjunta en què s'observa el disseny d'una rajola amb cinc cercles inscrits en què tots els contactes són tangents. Sabem que el costat de la rajola mesura 20 cm. Es demana que calculeu el valor exacte i el valor aproximat del radi  $x$  dels cercles petits.

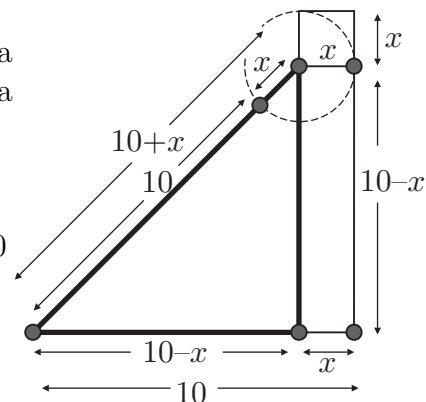


A partir de les dades i de l'elecció de la incògnita  $x$ , obtenim la informació del triangle rectangle de la dreta. Apliquem el teorema de Pitàgores i en resulta,

$$(10+x)^2 = (10-x)^2 + (10-x)^2$$

$$\iff 100 + x^2 + 20x = 200 + 2x^2 - 40x \iff x^2 - 60 + 100 = 0$$

$$\iff x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 400}}{2} = \frac{60 \pm 40\sqrt{2}}{2} = 30 \pm 20\sqrt{2}$$



A partir de les dades s'observa que només és admissible la solució menor. Així, el valor del radi dels cercles petits és

$$\boxed{30 - 20\sqrt{2} \approx 1.7157 \text{ cm}}$$