

Exercicis i problemes de nombres, polinomis i trigonometria

1. Simplifiqueu i racionalitzeu:

$$\text{a) } \frac{ab}{\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{a}} \quad \text{b) } \frac{6}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} \quad \text{c) } \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt[10]{a}\sqrt{b}\sqrt[6]{b^7}}{\sqrt[12]{b^5}\sqrt{a}} \quad \text{e) } \frac{x^2+x+2\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{x}}$$

2. Comproveu, sense calculadora, si és cert o fals que $\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

3. És cert que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9$? Demostreu-ho.

4. Trobeu, sense calculadora, el valor de $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. Resoleu les inequacions següents amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^5 + x^4 + 2x^3 < 0. & \text{e) } x^8 - 10x^4 + 9 \geq 0. \\ \text{b) } x^3 - 3x - 2 < 0. & \text{f) } 6x^3 + 31x^2 + 23x - 20 > 0. \\ \text{c) } 4x - x^3 < 0. & \text{g) } 16 + 4x - 4x^2 - x^3 \geq 0. \\ \text{d) } x^2 - 6x + 10 < 0. & \text{h) } (x+3)^5 < 0. \end{array}$$

6. Si un nombre x és irracional, quin tipus de nombre és $\sqrt[n]{x}$, on $n > 1$? Demostreu la vostra resposta.

7. Resoleu les equacions següents:

$$\text{a) } \frac{x}{x^2-4} + \frac{66}{x^2-x-2} = 6. \quad \text{b) } \frac{x^3}{x^3-x} - \frac{6-x^2}{x^2} = 0. \quad \text{c) } 8x^5 + 15x^2 = \frac{2}{x}.$$

8. Existeix algun valor de m per al qual les següents fraccions admetin simplificació? En cas afirmatiu, presenteu la fracció simplificada.

$$\text{a) } \frac{x^4 - mx^3 + 3}{x^2 - 1}. \quad \text{b) } \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3}{x^2 + m}.$$

9. Simplifiqueu les expressions:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}. \\ \text{b) } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}. \\ \text{c) } \binom{2007}{0} 2007^{2007} + \binom{2007}{2} 2007^{2005} + \binom{2007}{4} 2007^{2003} + \dots + \binom{2007}{2004} 2007^3 + \binom{2007}{2006} 2007. \end{array}$$

10. El terme mitjà del desenvolupament de $(x-y)^8$ val 1120. El valor total del desenvolupament és 1. Calculeu els valors de x i y si sabem que són positius.

11. Trobeu el terme constant (independent de x) del desenvolupament de $\left(2x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$.

12. Trobeu, sense calculadora, totes les raons trigonomètriques de

a) 1680° b) 315° c) 75° .

13. Trobeu, sense calculadora, el sinus, el cosinus i la tangent dels angles de 108° i 36° .

Indicació: Treballeu sobre un pentàgon regular.

14. Resoleu les qüestions següents sense calculadora i després comproveu els resultats amb la calculadora:

a) Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i $\operatorname{cosec} \alpha = 2$, trobeu $\tan(\pi + \alpha)$.

b) Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ i $\tan \alpha = -5$, trobeu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

c) Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ i $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, trobeu $\cos(\pi - \alpha)$.

d) Si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ i $\sec \alpha = 4$, trobeu $\cotan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

15. Calculeu el perímetre i l'àrea d'un sector circular de 0.8 rad d'una circumferència de 4 cm de radi.

16. Considereu una circumferència de 5 cm de radi i les rectes tangents a aquesta que passen per un punt P que es troba a 15 cm del centre A de la circumferència. Considereu les circumferències que passen per A i són tangents a les rectes anteriors. Calculeu les longituds dels seus radis.

17. Calculeu la longitud del radi d'una circumferència circumscrita a un pentàgon regular de costat 10 .

18. Trobeu, sense calculadora, els angles α tals que

a) $\sin(4\alpha) = \frac{1}{2}$. b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ c) $\sec\left(3\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$.

19. Trobeu els angles d'un rombe tal que el costat és mitjana proporcional entre la diagonal major i la diagonal menor. Això vol dir, amb unes altres paraules, que la proporció entre la diagonal major i un costat és igual a la proporció entre el costat i la diagonal menor.

20. Un triangle rectangle té catets de longituds a i b . Trobeu la longitud del segment de bisectriu de l'angle recte, interceptat pel triangle.

21. Considereu la diagonal d'una cara d'un cub i la diagonal interior del cub que incideix en un vèrtex amb la diagonal anterior. Trobeu l'angle que formen.

22. Un tetraedre té tres arestes perpendiculars que incideixen en un vèrtex. Les longituds d'aquestes arestes són iguals a 2 , 3 i 5 metres. Calculeu la superfície total del tetraedre.

23. Considereu dues circumferències de radi igual a r , tals que cadascuna d'elles passa pel centre de l'altra. Trobeu la mesura de l'àrea comuna.

24. Demostreu les identitats següents:

a) $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \tan(2x)$.

c) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{cosec} x - \cotan x$.

d) $\tan(2x) + \sec(2x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.

e) $\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

f) $\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

g) $\tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

25. Resoleu les equacions

a) $\sin x + \cos(2x) = 1$.

d) $\cos(3x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

b) $\cos(3x) + \sin x = \cos x$.

e) $4 \cos^3(2x) + 4 \cos^2(2x) = 14 \cos^2 x - 9$.

c) $\tan(2x) = \cotan x$.

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

26. Un mòbil porta una velocitat rectilínia constant de 80 km/h. A les 8 h es troba en un punt P i observa un punt A que es troba a 50 km. En el moment de l'observació l'angle que forma PA amb la direcció i sentit del moviment és de 60° . Esbrineu

a) A quina hora el mòbil es trobarà a 123 km d' A ?

b) A quina hora la separació entre el mòbil i el punt A serà mínima?

27. Ens trobem en un camp de futbol de 55 m d'amplada, amb porteries de 7 m. Un jugador es mou, tot just, sobre la línia de la banda lateral del camp.

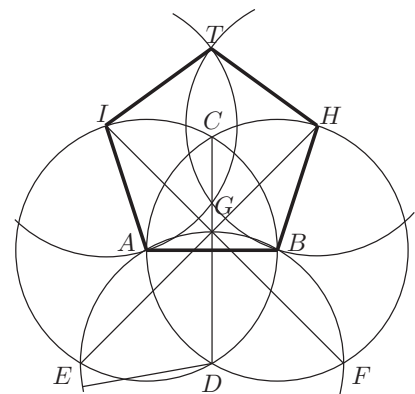
a) Expresseu la tangent de l'angle α , sota el que veu la porteria contrària, en funció de la distància x que el separa de la línia de fons sobre la qual es troba la porteria.

b) Trobeu el punt de la línia sobre la qual es mou el jugador en què l'angle de visió de la porteria és màxim.

28. En la figura adjunta, totes les circumferències estan traçades amb un mateix radi i centres A, B, D, I i H . Esbrineu si la figura construïda és un pentàgon regular.

29. En una circumferència de radi 10m, trobeu les àrees dels segments circulars determinats per una corda de 12 m.

30. En un triangle rectangle de catets AB i AC , tenim dos punts P i Q sobre AB que parteixen AB en tres parts iguals cadascuna d'elles al catet AC . És a dir, $AP = PQ = QB = AC$. Esbrineu, sense calculadora, el valor de la suma d'angles $\angle CBA + \angle CQA + \angle CPA$.



Solucions _____

1. a) $\sqrt[12]{b^8 a^9}$. b) $2 + \sqrt{10}$ c) $\sqrt[8]{x}$. d) $\sqrt[120]{a^7 b^{96}}$. e) $x + \sqrt{x}$.

2. Cert. 3. Cert. 4. $\sqrt{6}$.

5. a) $(-\infty, 0)$. b) $(-\infty, 2] - \{-1\}$. c) $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. d) $\nexists x$.

e) $(-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$. f) $\left(-4, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

g) $[-4, -2] \cup [2, +\infty)$. h) $(-\infty, -3)$.

6. És irracional. 7. a) $x = -3$. b) $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. c) $x = -\sqrt[3]{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

8. a) $\frac{x^3 - 3x^2 - 3x - 3}{x + 1}$, $\frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. b) $x^3 - 3x^2 + 2x$, $\frac{x^4 - 2x^3}{x + 1}$, $\frac{x^4 - x^3}{x + 2}$.

9. a) 2^n . b) 0. c) $\frac{2006^{2007} + 2008^{2007}}{2}$. 10. $x = 1, y = 2$ o bé $x = 2, y = 1$. 11. $\frac{20}{27}$.

12. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, -2 , $\frac{\sqrt{3}}{3}$. b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1 , $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -1 .

c) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, $2 + \sqrt{3}$, $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$, $2 - \sqrt{3}$.

13. $\cos 108^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, $\sin 108^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$, $\tan 108^\circ = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$,

$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$, $\tan 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

14. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. b) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$. c) $\frac{1}{3}$. d) $-\sqrt{15}$.

15. 11.2 cm i 6.4 cm².

16. 7.5 cm i 3.75 cm.

17. 8.5065

18. a) $\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{24} + n\frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{24} + n\frac{\pi}{2} \end{cases}$ b) $\alpha \in \mathbb{R}$. c) $\alpha = \begin{cases} \frac{5\pi}{36} + n\frac{2\pi}{3} \\ \frac{11\pi}{36} + n\frac{2\pi}{3} \end{cases}$.

19. 30° i 150° . 20. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. 21. $35^\circ 15' 51.8''$. 22. 25 m². 23. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$.

25. a) $x = \begin{cases} n\pi \\ \frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$ b) $x = \begin{cases} n\pi \\ \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{12} + n\frac{\pi}{2} \end{cases}$ c) $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n\pi \\ \frac{5\pi}{6} + n\pi \end{cases}$.

d) $x = \begin{cases} \frac{(1+2n)2\pi}{7} \\ \frac{(1+2n)2\pi}{5} \end{cases}$ e) $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n\pi \\ \frac{\pi}{3} + n\pi \end{cases}$ f) $x \in \mathbb{R}$.

26. a) 9 h 45 min 5.7 s b) 8 h 32 min 28.6 s 27. a) $\tan \alpha = \frac{7x}{x^2 + 744}$. b) 27.28 m.

28. No és regular perquè $\angle ABH = 108^\circ 21' 58''$.

29. $100 \arctan \frac{3}{4} - 48 = 16.35 \text{ m}^2$ i 297.81 m^2 . 30. 90° .