IES Pons d'Icart
Matemàtiques 2n de BAT
Exercicis i problemes de funcions 2005/06

1. Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & , x < 2 \\ x^2 - x & , x \geq 2. \end{cases}$

a) Estudieu-ne la continuïtat.

b) Representeu-la gràficament.

2. Considereu tots els triangles rectangles, —amb longituds variables x, y dels seus catets—, tals que el seu perímetre és igual 100.

a) Proveu que l'equació que descriu la relació entre els catets és

$$y = 100 \cdot \frac{x-50}{x-100}.$$

b) Proveu que la funció $A(x)$ que descriu l'àrea dels triangles en funció del catet x és

$$A(x) = 50 \cdot \frac{x^2 - 50x}{x-100}, \quad \text{en què } 0 < x < 50.$$

c) Calculeu $A'(x)$, feu un estudi gràfic del seu signe, deduïu-ne la monotonia d'$A(x)$, les longituds dels catets del triangle d'àrea màxima i el valor d'aquesta àrea.

3. Trobeu les equacions de les rectes tangents al gràfic de $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$, paral·leles a la recta $3x + 2y = 0$.

4. Sigui la funció $f(x) = x^2$

a) Trobeu les equacions de les rectes tangents al gràfic de f que passen pel punt $(1, -3)$.

b) Representeu gràficament la funció f i les rectes trobades.

5. Trobeu el domini i les derivades de les funcions:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{6x^4 + 13x^3 - 4x}$. b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{3-x}$ c) $h(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x-2}\right)$.

6. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

a) Feu-ne l'estudi complet i representeu-la gràficament.

b) Trobeu les seves funcions inverses i representeu-les gràficament.

7. Feu l'estudi complet i el gràfic de la funció

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}\,.$$

8. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Calculeu $f'(x)$ mitjançant:

a) La definició de derivada.

b) Les regles del càlcul de derivades.

9. Sigui la funció $f(x) = e^{\frac{x}{x-10}}$.

a) Si $f(x) = 20$, trobeu el valor de x.

b) Estudieu-ne els límits laterals i la continuïtat en el punt $x = 10$.

c) Trobeu els seus punts d'inflexió.

d) Trobeu la seva asímptota horitzontal.

10. L'equació de la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 13 és $x^2 + y^2 = 169$. Trobeu les equacions de les rectes tangents en el punt d'abscissa $x = 5$.

Indicacions i/o solucions:

1. a) Discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$. En el punt $x = 2$ és contínua perquè $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-1} = 2$, $\lim_{x\to 2^+} x^2 - x = 2$ i $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.

2. c) $A'(x) = 50\,\dfrac{x^2 - 200x + 5000}{(x-100)^2}$. Els catets valen el mateix: $100 - 50\sqrt{2} \approx 29.289$. L'àrea és igual a $7500 - 5000\sqrt{2} \approx 428.932$.

3. $3x + 2y - 24 = 0$.

4. a) $y = -2x - 1$, $y = 6x - 9$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{-2(9x^4 - 11x^3 - 39x^2 + 4)}{x^2(6x^3 + 13x^2 - 4)^2}$. $\quad$ $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

b) $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\right)$. $\quad$ $\operatorname{Dom} g = (-2, 3\,]$.

c) $h'(x) = \dfrac{1}{(1-x)(x-2)}$. $\quad$ $\operatorname{Dom} h = (1, 2)$.

6. a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$, $\quad f''(x) = 4\dfrac{3x^2 - 1}{(x^2+1)^3}$. Asímptota: $y = -1$.

b) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\quad y = -\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. El seu gràfic és el simètric del gràfic de $f(x)$ respecte la recta $y = x$.

7. $f'(x) = \dfrac{-24x}{(x^2-4)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{24(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$. Asímptotes: $y = 3$, $x = -2$, $x = 2$.

8. $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$.

9. a) $x = \dfrac{10 \ln 20}{\ln 20 - 1} \approx 15.0107$.

b) $\lim_{x\to 10^-} f(x) = 0$, $\quad \lim_{x\to 10^+} f(x) = +\infty$. Discontinuïtat de asimptòtica en $x = 10$.

c) $f'(x) = \dfrac{-10e^{\frac{x}{x-10}}}{(x-10)^2}$. $\quad f''(x) = \dfrac{20e^{\frac{x}{x-10}}(x-5)}{(x-10)^4}$. Punt d'inflexió en $x = 5$.

d) $y = e$.

10. $5x + 12y - 169 = 0$, $\quad 5x - 12y - 169 = 0$.