Encàrrec de feina – 2n BAT CCSS

Problemes d'optimització

Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1) Un mòbil **A** es desplaça en direcció Est a 9 km/h. Un altre mòbil **B** es troba a 20 km a l'Est d'**A** i es desplaça en direcció Sud a 12 km/h. Calculeu en quin moment la distància que separa els dos mòbils és mínima i el valor d'aquesta distància.

Indicació: La funció $s(t)$ que expressa la distància de separació entre els dos mòbils quan ha transcorregut un temps t és

$$s(t) = \sqrt{225t^2 - 360t + 400}\,, \quad \text{en què } t \geq 0.$$

2) Es vol construir un cilindre amb tapes de 20 litres de capacitat. Calculeu la superfície mínima de xapa necessària per construir el cilindre.

Indicació: La funció $S(r)$ que expressa la superfície total del cilindre de volum 20 en funció del seu radi r és

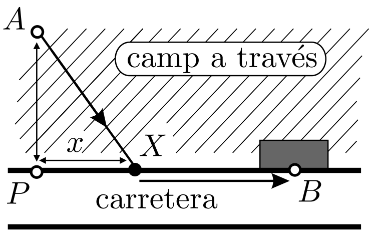
$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{40}{r}\,, \quad \text{en què } r > 0.$$

3) Considereu la paràbola d'equació $y = 4 - x^2$, en el domini $-2 \leq x \leq 2$. Trobeu el rectangle d'àrea màxima que es pot inscriure entre aquest gràfic i l'eix d'abscisses. (Un costat del rectangle té l'eix d'abscisses de suport.)

Indicació: La funció $A(x)$ que expressa l'àrea del rectangle en funció de la meitat x del costat sobre l'eix d'abscisses és

$$A(x) = 8x - 2x^3\,, \quad \text{en què } 0 < x < 2.$$

4) Un mòbil s'ha desplaçar des d'A fins a B. Sabem que $AP = 2$ km i $PB = 4$ km. Si al velocitat a través del camp és de 10 km/h i la velocitat per la carretera és de 25 km/h, calculeu la distància PX tal que el temps invertit en el trajecte AXB sigui mínim.



Indicació: La funció $t(x)$ que expressa el temps en hores invertit en funció de la distància $x = PX$ en km, en què X és el punt d'incorporació del mòbil a la carretera és

$$t(x) = \frac{1}{50}\left(8 - 2x + 5\sqrt{4 + x^2}\right)\,, \quad \text{en què } 0 \leq x \leq 4.$$

5) Calculeu la distància mínima entre el punt $P(4, 0)$ i la paràbola d'equació $y = x^2$. (Aproximeu l'abscissa del punt de la paràbola més proper al punt P amb un error més petit que 10^{-1}.)

Indicació: La funció $d(x)$ que expressa la distància del punt P al punt de la paràbola d'abscissa x és

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 8x + 16}\,, \quad \text{en què } x \in \mathbb{R}.$$

6) Amb una cartolina circular de radi fixat R volem construir un con mitjançant el retall d'un sector circular d'angle α. Calculeu el valor d'α per tal que el volum del con sigui màxim. **Indicació:** La funció $V(h)$ que expressa el volum del con en funció de la seva altura h, a partir del radi R de la cartolina, és

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h - h^3\right)\,, \quad \text{en què } 0 < h < R.$$

SOLUCIONS

1) Al cap de 48 min els separen 16 km.

2) Radi= $\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} \approx 14.71$ cm.

Altura= $2\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} \approx 29.42$ cm.

Superfície= $6\pi\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi^2}} \approx 4078.82$ cm^2.

3) Costats de longitud $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ i $\dfrac{8}{3}$.

Àrea= $\dfrac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6.15$.

4) $PX = \dfrac{4}{\sqrt{21}}$ km ≈ 873 m.

Temps invertit= $\dfrac{4+\sqrt{21}}{25}$ h ≈ 0.343303 h ≈ 20 min 36 s.

5) L'abscissa del punt més proper és $x \approx 1.1$. (Amb ajut del teorema de Bolzano)

Distància≈ 3.14231.

L'aproximació que proporciona el GEOGEBRA amb 5 decimals és

$$x = 1.12817. \qquad \text{Distància} = 3.14123.$$

6) $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}\left(3-\sqrt{6}\right)$ rad $\approx 66°3'40.4''$.