Egipte – Activitats – Notes per al professorat

Longituds i àrees als Papirs Egipcis, activitats per l'aula

Les activitats que es presenten a continuació constitueixen una part del mòdul "Lengths, Areas, and Volumes" dels *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics* (Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee, 2004). S'han triat i traduït pensant que havien de ser assequibles per a l'alumnat del Primer Cicle de l'ESO.

Temps aproximat: Quatre o cinc sessions de classe

Materials: Còpia dels "Fulls per l'alumnat", incloent-hi la solució als "Problemes dels Papirs Egipcis per l'alumnat".

Cursos: Aquesta activitat està dissenyada per a estudiants de 2n d'ESO .

Objectiu: Els estudiants experimentaran amb els problemes resolts a l'antic Egipte comparant els mètodes actuals amb els que van emprar, fa milers d'anys, els egipcis.

Suggeriments on emplaçar les activitats en el curs: Utilitzeu aquesta activitat després d'estudiar fórmules per àrees i volums.

Instruccions: Explicar el Mètode Egipci de multiplicació (veure més avall). L'alumnat treballarà en grups formats per 2-4 persones per resoldre els problemes. Cal que escriguin un paràgraf sobre cada problema comparant els mètodes utilitzats en l'actualitat enfront dels utilitzats en l'antic Egipte.

Mètode de la multiplicació a Egipte

Per a resoldre els problemes que apareixen als papirs de Moscou i Rhind, els antics egipcis feien la multiplicació mitjançant l'ús d'un mètode d'addició i duplicació per a arribar al producte requerit. Per exemple, si un escriba egipci volia multiplicar 25 per 18, començaria amb 1 i 25 per crear una taula mitjançant la contínua duplicació de les entrades a cada columna, fins que la suma d'alguns nombres de la primera columna fos 18. Fixeu-vos en les barres de la columna de l'esquerra que marquen el 2 i el 16 perquè la seva suma és un dels nombres que volem multiplicar. El producte s'obté sumant els nombres corresponents de la segona columna, 50 i 400, per obtenir 450. La columna de l'esquerra indica com un antic egipci mostraria el seu treball de multiplicar 25 per 18 si estigués escrivint en la nostra llengua.

Egipte – Activitats – Notes per al professorat

Mètode egipci en símbols moderns			Mètode alternatiu de la multiplicació que mostra perquè funciona el mètode egipci
	1	25	(18) (25)
/	2	50	= (2 + 16) (25) (escriu 18 com una suma de potències de 2)
	4	100	
	8	200	= (2 × 25) + (16 × 25) (propietat distributiva)
/	16	400	
	Total	450	= 50 + 400 = 450
Per tant, el producte de 25 i 18 és 450			

Notes d'història: Vegeu la secció **Longituds, Àrees i Volums a Egipte** d'aquest mòdul d'informació sobre el Papir de Rhind (o d'Ahmes), el Papir de Moscou i el Papir d'El Caire, i sobre les fórmules geomètriques conegudes pels egipcis.

Activitats d'ampliació:

1. Els estudiants mesuren diversos ítems utilitzant el *colze real* (al voltant de 20,6 polzades o 52,3 cm) o dels seus *colzes* personals (la distància des del colze a la punta dels dits). Calculen les àrees que es mesuren en *colzes quadrats* i els volums en *colzes cúbics*. Feu que els estudiants converteixin els resultats a altres unitats de mesura d'Egipte i/o anglosaxones o unitats mètriques.

2. El *doble-remen* era la longitud de la diagonal d'un quadrat amb el costat de longitud un *colze,* per tant, el *doble-remen* era $\sqrt{2}$ *colzes*, o aproximadament 29,1 polzades o 73,9 cm. Feu que els estudiants expliquin com el *doble-remen* es podria utilitzar per duplicar l'àrea d'un quadrat, i com el *remen* ($\sqrt{2}/2$ *colzes*) es podria utilitzar per reduir a la meitat l'àrea d'un quadrat donat (Gillings, 208-209). Tingueu en compte que un quadrat de costat 1 *colze* de longitud té una àrea d'1 *colze* quadrat, mentre que un quadrat de costat 1 *doble-remen* té una àrea d'1 *doble-remen quadrat*, o $\sqrt{2}\,\sqrt{2}=2$ *colzes quadrats*. Un quadrat de costat x *doble-remen* de longitud té dues vegades l'àrea d'un quadrat de costat x *colzes*, mentre que un quadrat de costat x *remen* de longitud té la meitat de l'àrea d'un quadrat de costat x *colzes*.

Longituds i àrees a Egipte. Solucions

1. *En un graner cilíndric de diàmetre 9 i altura 10. Quina és la quantitat de gra que hi cap?*
Papir Rhind Problema 41 (Chace, 46; Gillings, 146-147, 151)

Els estudiants han de calcular el volum V del graner cilíndric utilitzant la fórmula:

$$V = \text{àrea de la base x altura}$$

per obtenir,

$$V = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2(10) \approx 636{,}1725 \textit{ unitats cúbiques de gra}$$

En comparació amb la solució del Papir Rhind (veure solucions als problemes dels papirs egipcis) veiem que l'escriba Ahmes, utilitza la fórmula de l'antic Egipte:

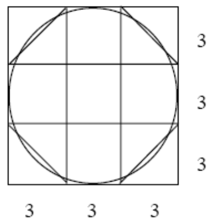
$$A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$$

Que resulta ser $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ per l'àrea d'un cercle, amb el diàmetre $d = 9$.

És possible que vulgueu compartir aquesta fórmula amb els estudiants mentre treballen. En el Papir Rhind s'assumeix que les dimensions es donen en *colzes*, per tant el seu càlcul dóna un volum de $V = (64)(10) = 640$ *colzes cúbics*. A continuació, converteix la unitat a *khar* multiplicant per $3/2$. Finalment, es converteix en *quàdruple-hekat* multiplicant primer per $1/20$ i després per 100. L'*hekat* i el *quàdruple-hekat* eren les unitats estàndard de mesura de volum dels cereals i altres cultius. Les quantitats molt grans es mesuraven en 100 *quàdruple-hekat*, que és igual a 400 *hekat* = 20 *khar* ≈ 68 *peus cúbics* o 1,9 m^3

2. *Compara l'àrea d'un octògon i del seu quadrat circumscrit.*
*Papir Rhind Problema 48 (*Gillings, 141-143*)*

L'àrea del quadrat que es mostra en el diagrama és $9^2 = 81$ unitats quadrades, mentre que l'àrea de l'octògon és de $81 - 18 = 63$ unitats quadrades. Tingueu en compte que l'octògon no és regular, sinó que els costats mesuren 3 i $3\sqrt{2}$ alternativament. Ahmes assumeix que la unitat de longitud és el *khet*, així que la unitat de superfície és el *khet* quadrat, o *setat*.



Essent tan fàcil veure que l'octògon té una àrea de 63, per què calcula Rhind la seva superfície com $8^2 = 64$? Molts estudiosos moderns creuen que, en realitat, tractava de calcular l'àrea del cercle de diàmetre 9, perquè la seva fórmula

$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ donaria $A = 8^2 = 64\ setat$.

3. *Quina és l'àrea d'un camp circular de diàmetre 9 khet?*
Papir Rhind Problema 50 (Chace, 49)

Els estudiants han de calcular l'àrea del cercle com

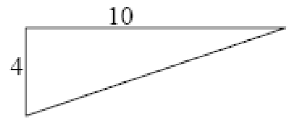
$$A = \pi\, r^2 = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 63{,}61725\ khet\ quadrats\,.$$

Aquí, de la mateixa manera que a l'activitat 1, l'escriba utilitza la fórmula

$$A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = 64\,khet\ quadrats = 64\ setat\,,$$

per a trobar l'àrea del cercle de diàmetre 9.

4. *Exemple d'un triangle de terra. Suposem el triangle que es mostra al dibuix. Quina és l'àrea del triangle de costat 10 khet i de base 4 khet?*
Papir Rhind Problema 51 (Chace, 49)

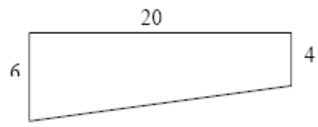


Atès que el triangle que es mostra en el diagrama és un triangle rectangle, els estudiants han de calcular la seva àrea com

$$A = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20 \ khet \ quadrats = 20 \, setat$$

Ahmes multiplica per 100 en els seus càlculs perquè ell va prendre les dimensions de 400 *colzes* i 1000 *colzes* (recordem que 1 *khet*=100 *colzes*). Aleshores la resposta és de 2000 *bandes de colze*. Una banda de *colze* és un rectangle de 1 *colze* per 1 *khet*, de manera que 200.000 *colzes quadrats* = 2.000 *bandes de colze* = 20 *setat*.

5. *Exemple d'un tros de terra triangular truncat. Quina és l'àrea d'un triangle truncat de 20 khet de costat, 6 khet de base i 4 khet en la seva línia de secció (Consell: Suposeu que el triangle és un triangle rectangle com a l'activitat 4.)*
Papir Rhind Problema 52 (Chace, 49)



Si assumim que el triangle és rectangle i que la línia de secció és paral·lela a la base de longitud 6 *khet*, llavors l'àrea A del trapezi resultant serà:

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6+4}{2} \cdot 20 = 100 \ khet \ quadrats = 100 \ setat$$

on a i b són les longituds dels costats paral·lels del trapezi i h és l'altura.

Ahmes, en els seus càlculs, utilitza les dimensions de 600 *colzes*, 400 *colzes*, 2000 *colzes*, amb la resposta de 10.000 *bandes de colze* = 100 *setat*.

6. *Mètode de càlcul d'un rectangle: Si et donen un rectangle d'àrea 12 i la màniga (ample) mesura 1/2+1/4 de la longitud. Quines són les seves dimensions (llarg i ample)?*
Papir de Moscou Problema 6 (Gillings, 137-138)

Si la longitud és x, llavors la màniga és $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x = \frac{3}{4}x$.

Com que l'àrea és 12, plantegem l'equació,

$$\frac{3}{4}x \cdot x = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{12 \cdot 4}{3} \Rightarrow x = 4$$

La longitud és $x = 4\ unitats$ i la màniga $\frac{3}{4}x = 3\ unitats$

En primer lloc, l'escriba anota $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right) = 1$,

és a dir, es dóna compte que $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$.

A continuació multiplica 12 per 1+1/3 = 4/3, i procedeix a resoldre l'equació

$$\frac{3}{4}x^2 = 12$$

7. *Si et donen una piràmide truncada de 6 colzes d'altura, 4 colzes de costat de la base inferior i 2 colzes de costat de la base superior; quin és el seu volum?*
Papir de Moscou Problema 14 (Katz, 23)

Els estudiants han de calcular el volum V mitjançant la fórmula

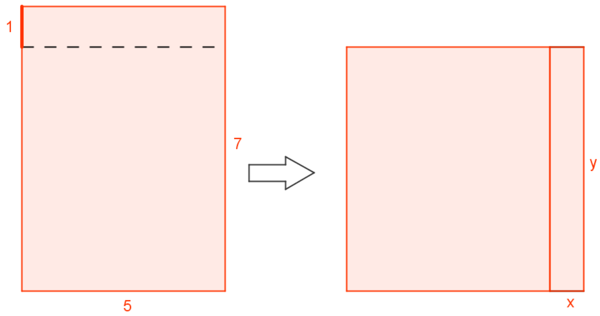
$$V = \frac{h}{3}\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Substituint els valors de l'enunciat obtenim

$$V = \frac{6}{3}\cdot\left(4^2 + 4\cdot 2 + 2^2\right) = 56\ colzes\ cúbics$$

8. *Una peça de roba fa 7 colzes de llargada i 5 colzes d'amplada, per tant, té una àrea de 35 "colzes-roba". Si traiem un colze de la seva llargada i volem afegir-la a l'amplada, Quines dimensions tindrà la peça que hem d'afegir?*
Papir del Caire Problema 8 (van der Waerden 1983, 166)

Es tracta de tallar una banda d'1 *colze* de la llargada per 5 *colzes* d'amplada de la part superior de la peça de roba i tornar a configurar la peça de forma que tingui 6 unitats de llargada ($y = 7 - 1 = 6$) i 5+x unitats d'amplada.



Quan traiem 1 *colze* de la llargada, estem traient 5 *colzes quadrats* de superfície, i aquesta serà la que haurem d'afegir a l'amplada. Per tant ens queda una equació tal que

$$5 = 6x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

La peça que ens ha quedat després de treure la banda d'1 *colze*, té una superfície de $35 - 5 = 30\ colzes\ quadrats$. Si hi afegim la banda de 6 *colzes* per 5/6 *colzes* la nova peça tindrà una superfície de

$$6 \cdot (5 + \frac{5}{6}) = 35\ colzes\ quadrats$$

És a dir, la mateixa àrea que la peça original.

Bibliografia / Webgrafia

Cajori, Florian (1919) *A History of Mathematics*, MacMillan, New York. http://www.archive.org/stream/historyofmathema00cajorich#page/n5/mode/2up [Consultada 2010.07.15]

Chace, Arnold Buffum (1979) *The Rhind Mathematical Papyrus.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Dilke, O.A.W. (1987) Mathematics and Measurement, British Museum Publications, London, and University of California Press, Berkeley.

Gillings, Richard J.(1982) *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Dover Publications, New York.

Katz, Victor J. (1998) A History of Mathematics: An Introduction, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Katz, Víctor J; Michalowicz, Kareen Dee (2004) *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics* . The Matematical Assiciation of America, Washington.

López, F i Thode, R (1997) *La Tierra de los Faraones* – Amigos de la egiptologia http://egiptologia.org/ [Consultada 2010,03,12]

Pla i Carrera, J. (Facultat de Matemàtiques – UB) *Les Matemàtiques de l'Antic Egipte*. Ponència al Museu Egipci de Barcelona.

http://www.egiptologia.com/descarga/pdf/biae/BIAE13.pdf [Consultada 2010.03.08]

García Cebrian, M.J. *Los Papiros Matemáticos*

http://www.jimena.com/egipto/apartados/papiros.htm [Consultada 2010.03.08]

Scott, J. F. (1958) *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, London.

van der Waerden, B.L. (1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin.