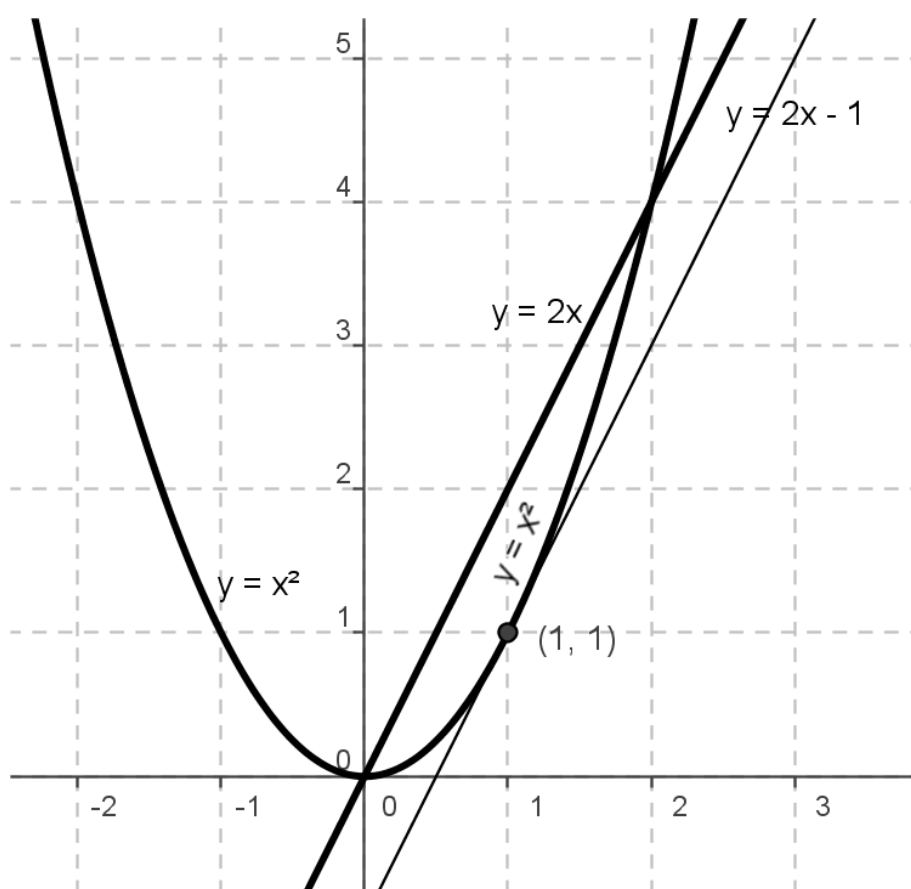


IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

DERIVADA I FUNCIÓ DERIVADA



Batxillerat

LA FUNCIÓ DERIVADA

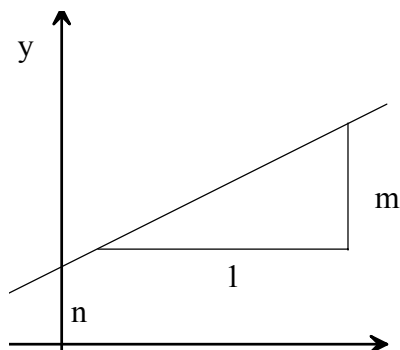
A Introducció

Recordem que les funcions afins són aquelles que tenen per gràfic una recta i que la seva fórmula és $y = mx + n$.

El coeficient de la x , el paràmetre m , és el pendent i indica la inclinació de la recta, és a dir, ens diu per cada unitat que varia la x , quant varia la y .

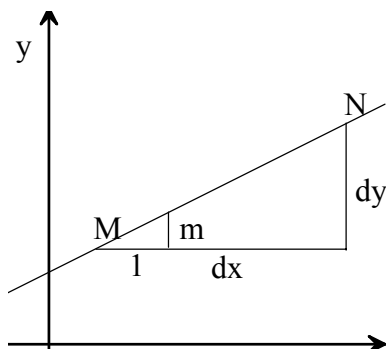
El terme independent, paràmetre n , és l'ordenada a l'origen, o sigui, el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades.

El seu esquema seria:

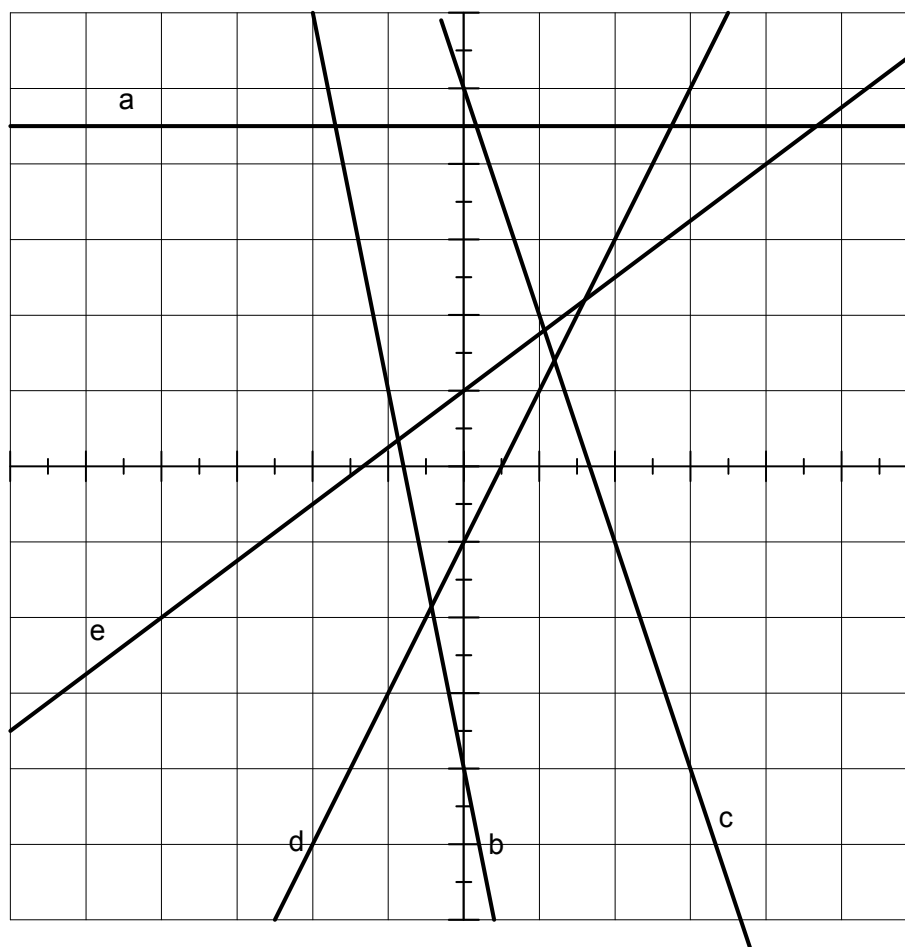


De totes maneres no sempre es pot calcular exactament el valor de la variació de les ordenades " y " per cada unitat que varien les " x ". Per aquesta raó el que farem en aquests casos serà agafar dos punts exactes de la recta (M i N) i calcular la variació de les x (dx) i la variació de les y (dy) i el pendent serà :

$$m = \frac{m}{1} = \frac{dy}{dx}$$



A.1. Troba la fórmula de les següents funcions afins, trobant el seu pendent i l'ordenada a l'origen.

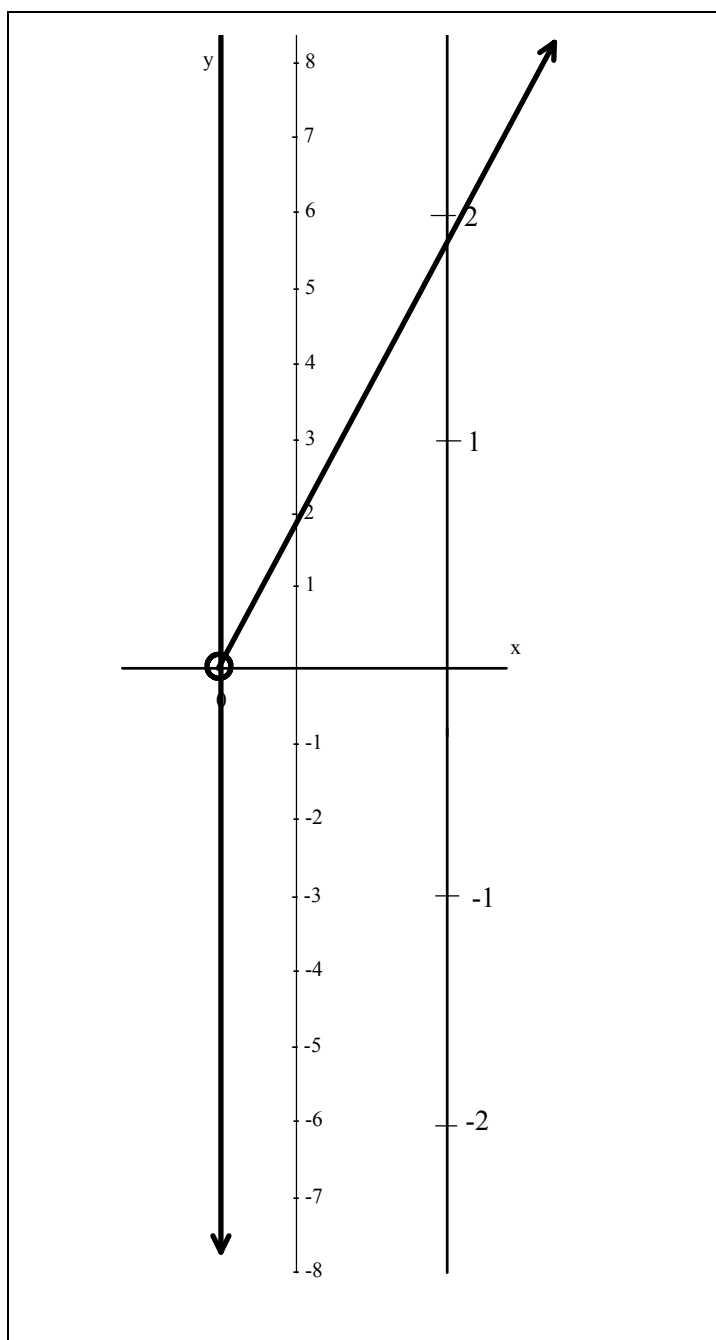


Com que haurem de calcular els pendents de moltes rectes gràficament i de forma ràpida el que farem serà construir un aparell per mesurar pendents.

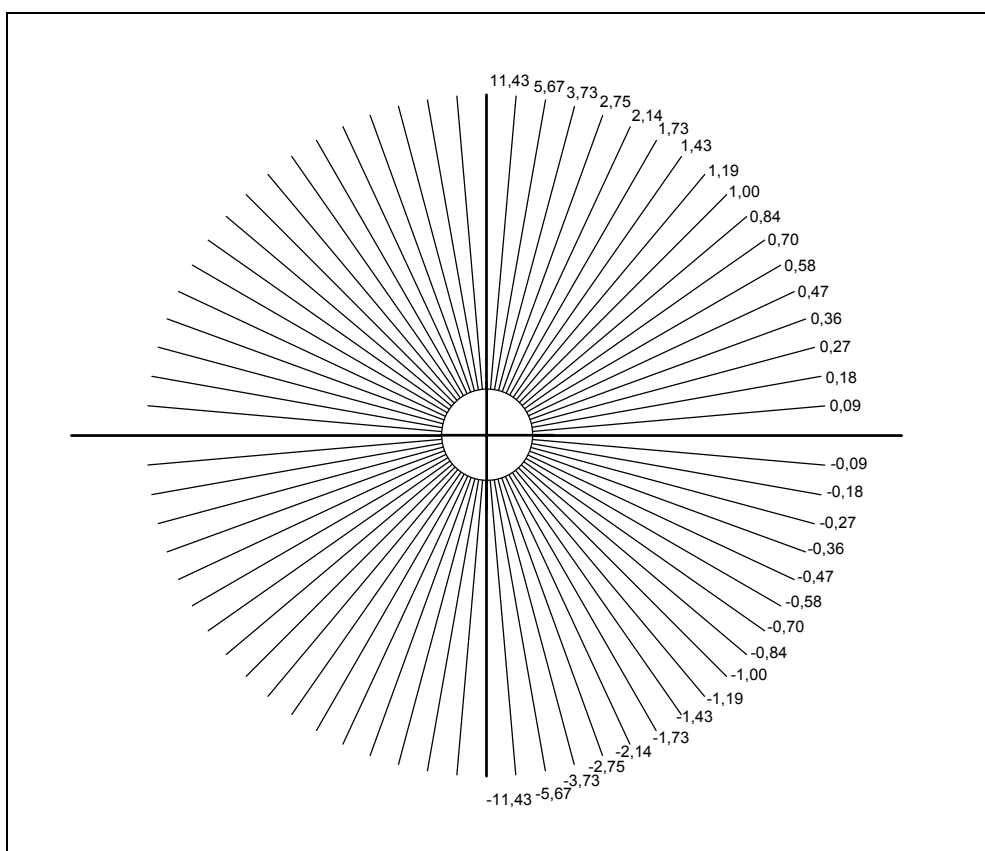
A.2. Construcció d'un mesurador de pendents

En un full transparent pintem uns eixos de coordenades **perpendiculars**. Enganxarem dues tires de paper mil·limetrat paral·leles a l'eix vertical per tal de poder fer la lectura del pendent més fàcilment. Hem de fer que la distància de l'origen de coordenades a cada una de les tires sigui **exactament la mateixa que la unitat dibuixada a la tira**. Enganxem un fil o un braç giratori a l'origen de coordenades i ja tenim el mesurador de pendents.

L'esquema podria ser :



Un altre tipus de mesurador de pendent consisteix en un cercle en plàstic transparent on s'hi ha dibuixat una sèrie d'angles per cada un dels quals es pot llegir directament el seu pendent. L'esquema seria aquest:



A.3. Per tal de comprovar si el mesurador de pendent funciona correctament, torna a calcular els pendent de les rectes de l'exercici A.1.

A.4. Donada la funció $f : [-1,5] \rightarrow \mathbb{R}$, definida a trossos per les fórmules:

si $x \in [-1, 0]$ $f(x) = 3$

si $x \in [0, 2]$ $f(x) = x - 2$

si $x \in [2, 5]$ $f(x) = -3x + 6$

a) Representa-la

b) Fes la taula del seu comportament.

c) Afegeix una fila a la taula anterior per indicar el pendent dels diferents segments.
Quina relació hi ha entre el comportament de la funció i el pendent?

B Càlcul del pendent d'una corba

B.1. L'hotel Alps té 156 habitacions. El seu consum d'aigua calenta és força elevat. La funció $Q : t \rightarrow Q(t)$ el gràfic de la qual adjuntem, ens dóna el consum total d'aigua calenta des de mitjanit (0 h) fins a les t hores. Aquest gràfic correspon a un dia determinat, però s'ha observat que cada dia, durant la temporada d'estiu, es repeteix amb petites variacions.

- Quin és el total d'aigua calenta consumida al llarg del dia?
- Quina quantitat d'aigua s'ha consumit entre les 9 hores i les 15 h.
- Què pots dir del consum d'aigua calenta entre les 2 i les 5 h.
- Què pots dir del consum d'aigua entre les 20 i les 23 h.
- En quin moment s'està consumint més aigua, a les 13 h o a les 22 h? Justifica la resposta.
- Troba el m^3/h que s'estan consumint a les 7 en punt. Explica com ho fas.
- En quin moment del dia et sembla que s'està consumint més aigua calenta? Justifica la resposta.

B.2.

- Continuant amb l'exercici anterior, utilitza el mesurador de pendents per omplir la taula següent

t	1	2	3	5	6	9	10	11	14	16	18	19	21	22	24
consum instantani															

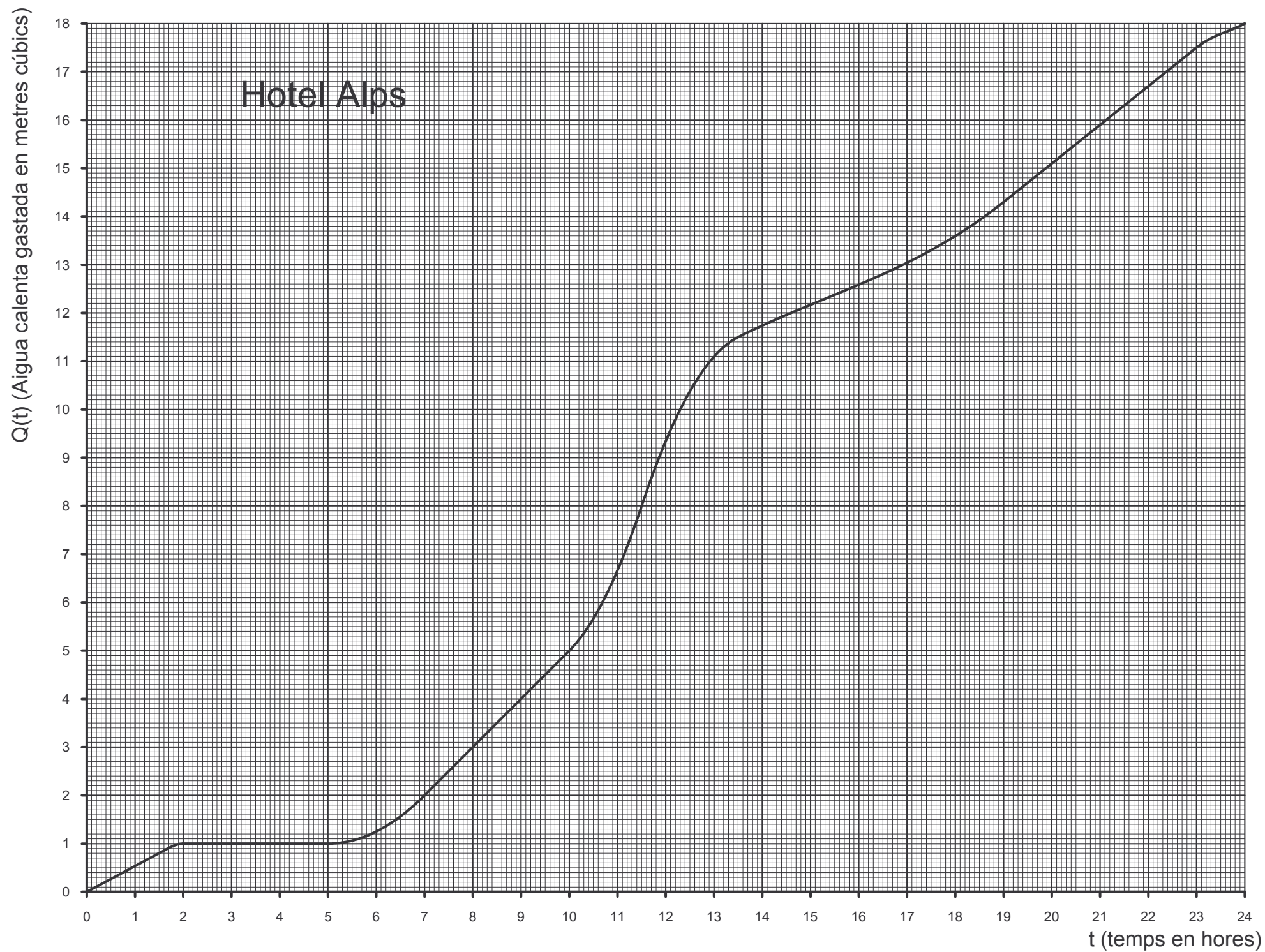
- Fes el gràfic del consum instantani.

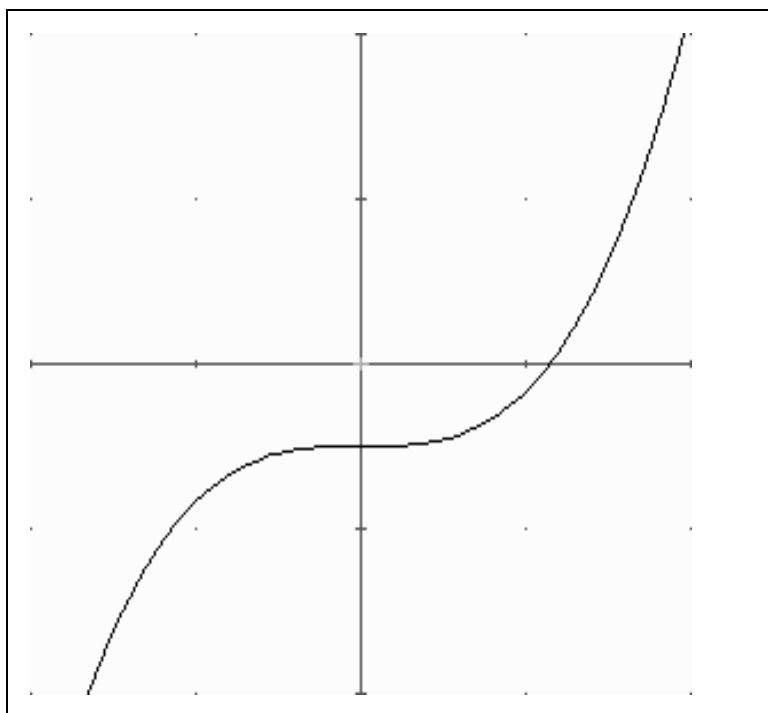
Si tenim una funció f , a la nova funció que ens dóna el pendent de la corba en cada un dels seus punts, s'en diu **funció derivada** de la funció f i s'indica per $f'(x)$.

B.3.

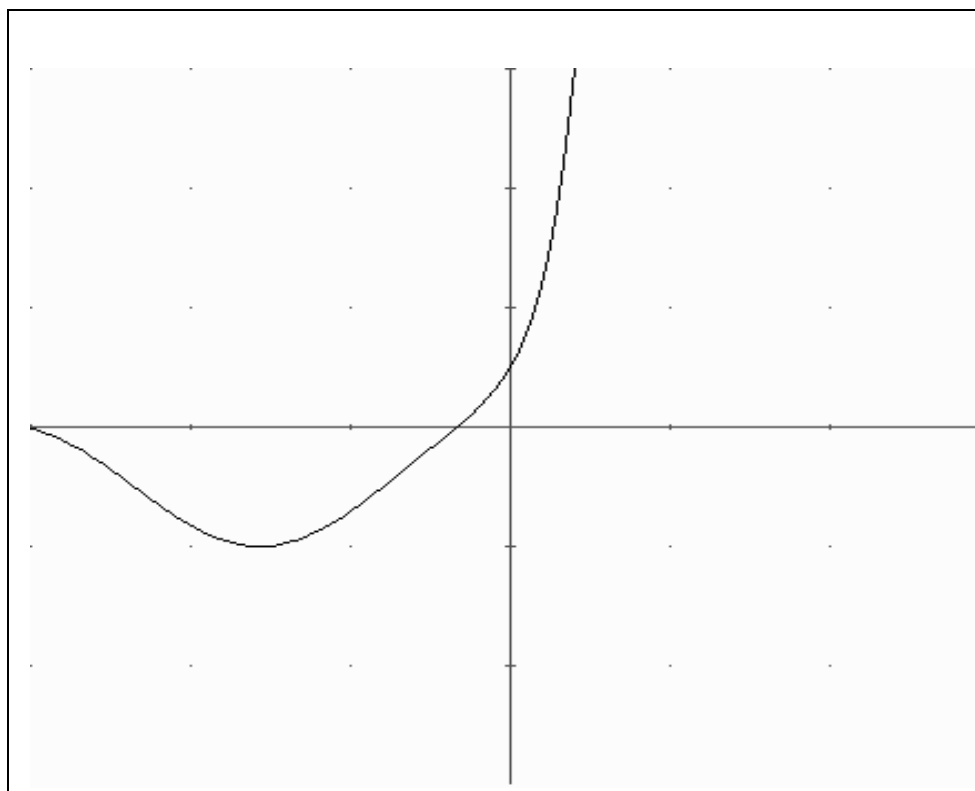
- Troba el pendent de la recta tangent en alguns punts del gràfic de la funció següent i fes un esquema aproximat de la funció derivada.
- Omple aquesta taula per veure la relació entre el comportament de la funció (creixement, màxims i mínims) i el signe del pendent de la tangent, o sigui el signe de la funció derivada

<u>x</u>	
<u>f(x) (comportament)</u>	
<u>dy/dx (signe)</u>	





B.4. Torna a fer el mateix que en l'exercici anterior però per la funció següent:



El pendent d'una corba en un punt **a** l'anomenarem la derivada de la funció en el punt a. Per tant, **la derivada d'una funció en un punt a**, és el pendent de la recta tangent a la corba en el punt a. Si la funció és $y = f(x)$ aleshores representarem la seva derivada en el punt a:

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}$$

Com a conseqüència d'això hi ha una estreta relació entre el comportament d'una funció (creixement, decreixement) i el signe de la derivada:

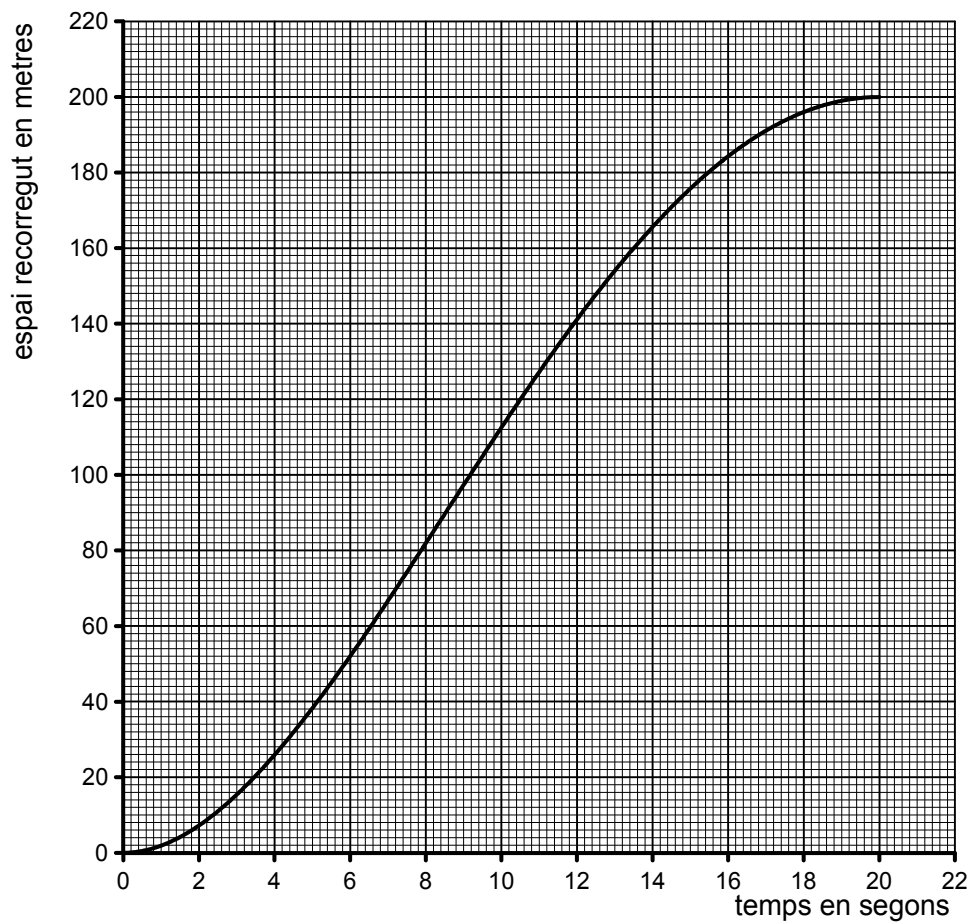
- Si la funció és creixent la derivada serà positiva.
- Si la funció és decreixent la derivada serà negativa.

B.5. Completa la taula següent (la fila de $f(x)$) i fes el gràfic d'una funció f que estigui d'acord amb la taula:

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, \infty)$
f(x)		-3		1		3		0	
$\frac{dy}{dx}$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

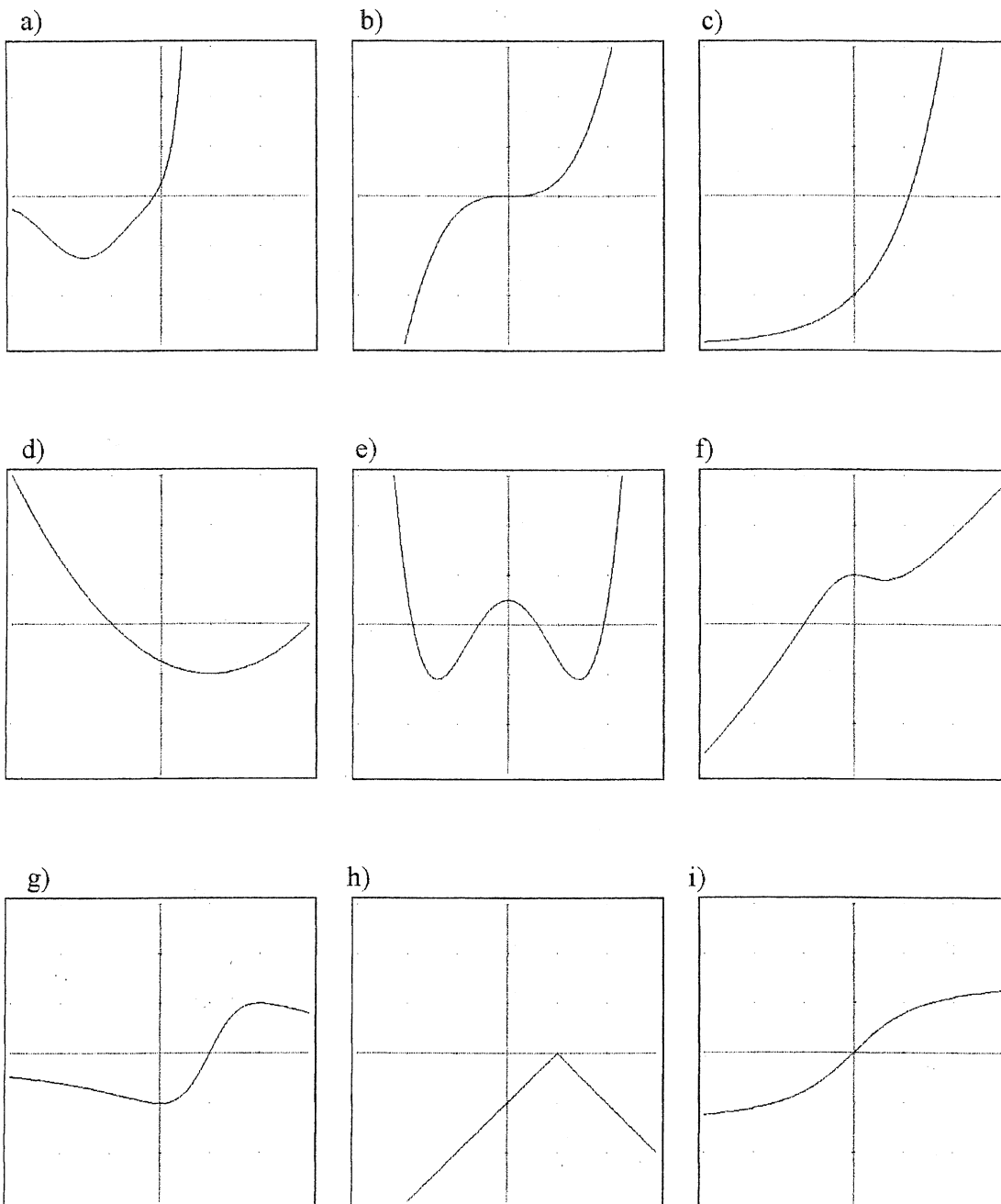
B.6. Representa la funció derivada de la funció de l'exercici A.4

- B.7.** El gràfic següent representa el moviment d'un cotxe durant 20 segons. Explica el seu moviment: troba la velocitat instantània als instants 0 segons, 4 s, 10 s, 16 s i 20 s. Fes el gràfic aproximat de la velocitat.



B.8. En aquesta pàgina i a la següent (9 i 10) hi ha representades unes funcions, i a les pàgines 11 i 12 hi ha les seves funcions derivades. Troba quina és la funció derivada de cadascuna i justifica -ho.

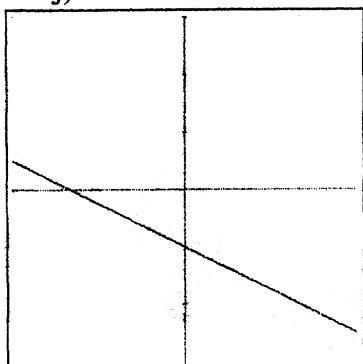
Funcions:



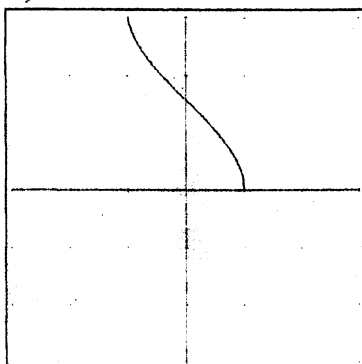
(continua)

Funcions (continuació):

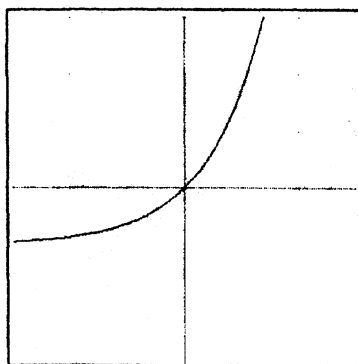
j)



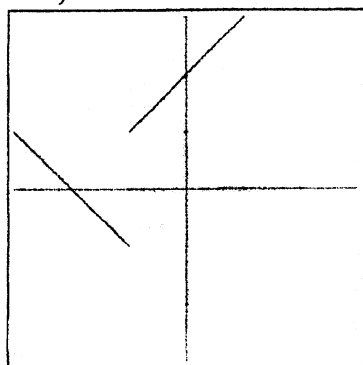
k)



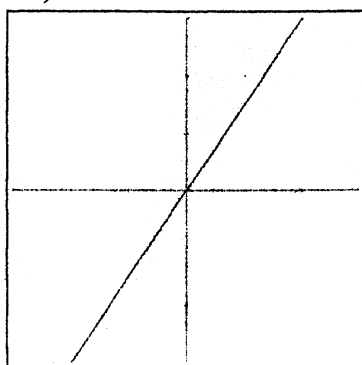
l)



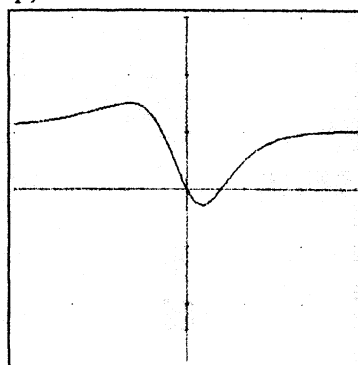
m)



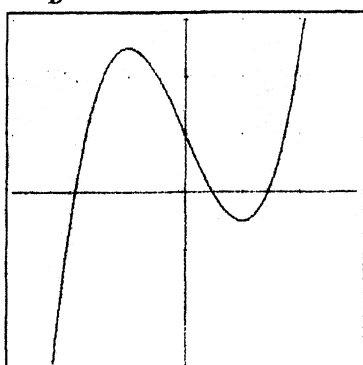
n)



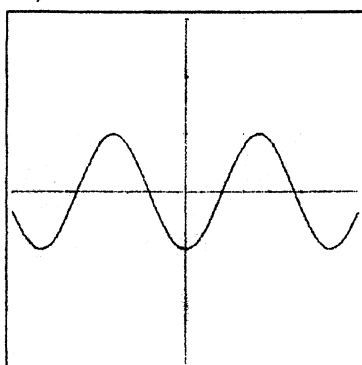
p)



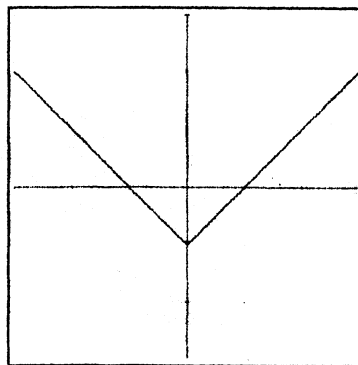
q)



r)

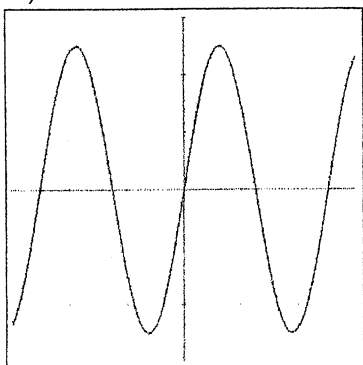


s)

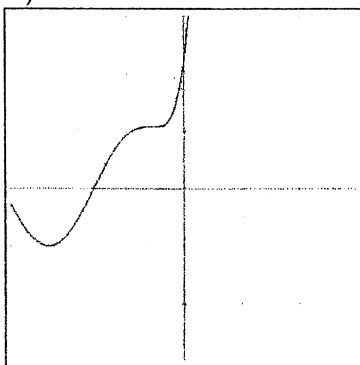


Funcions derivades:

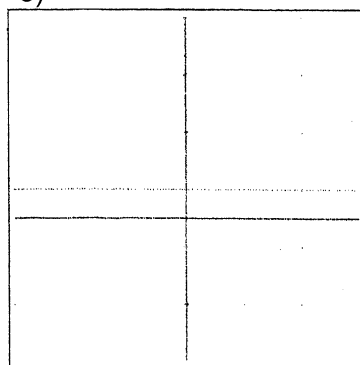
1)



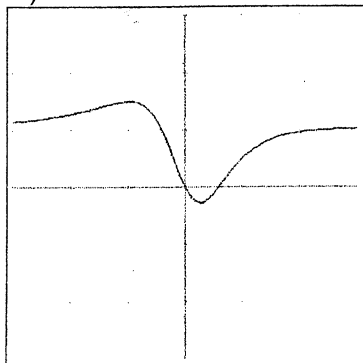
2)



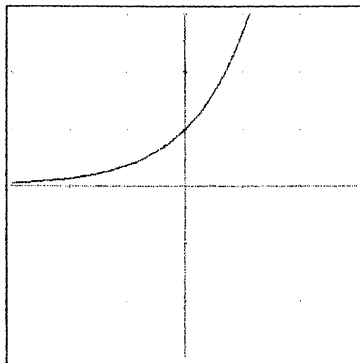
3)



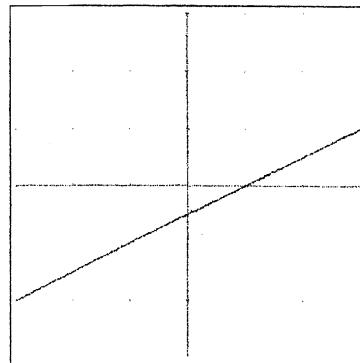
4)



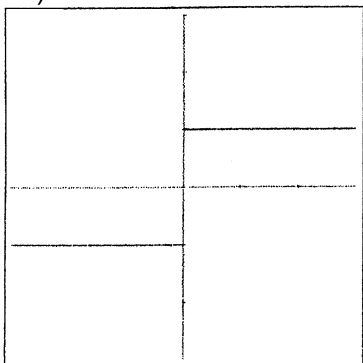
5)



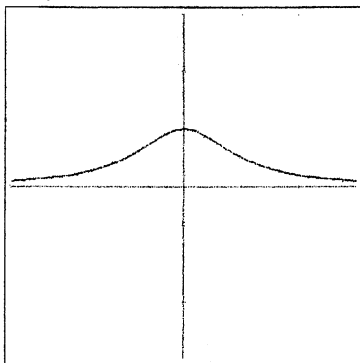
6)



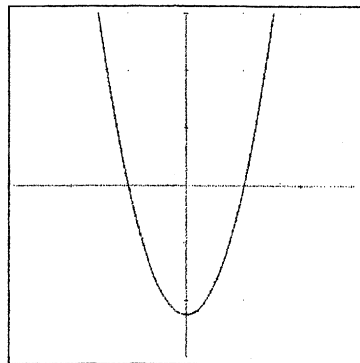
7)



8)



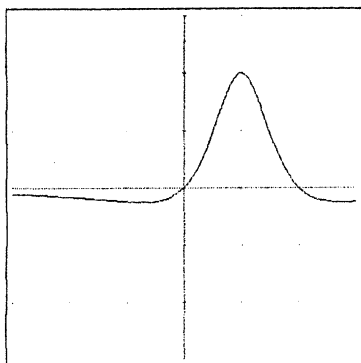
9)



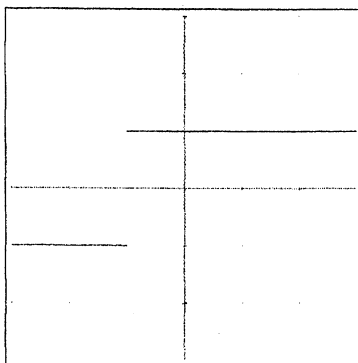
(continua)

Funcions derivades (continuació):

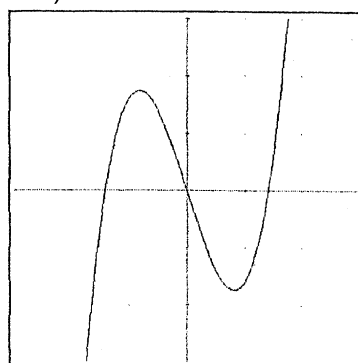
10)



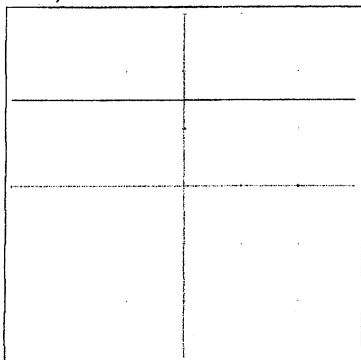
11)



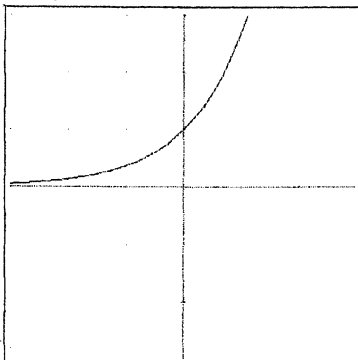
12)



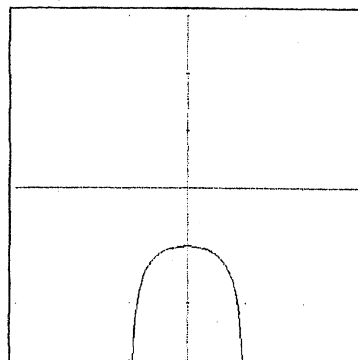
13)



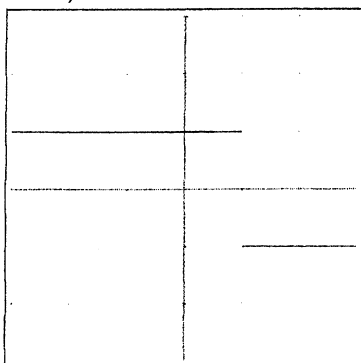
14)



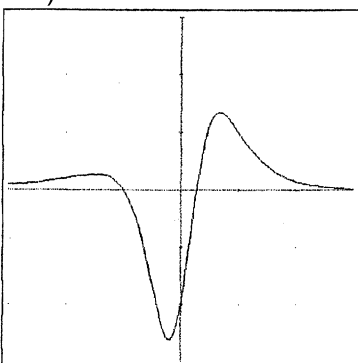
15)



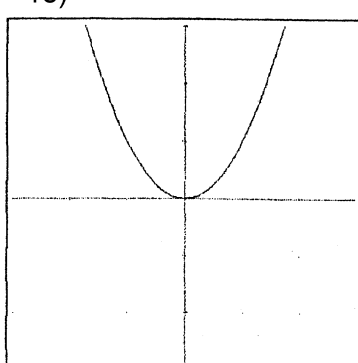
16)



17)



18)



C Càlcul de la funció derivada

Fins ara hem estat calculant el pendent de la corba en un punt a partir del gràfic de la funció. Això fa que el resultat obtingut sigui una aproximació (més bona o més dolenta segons la precisió). Anem ara a veure com ho podem fer per obtenir un resultat més precís. Començarem fent una aproximació numèrica.

C.1. Volem calcular el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 1. Per això adjuntem el gràfic de la funció a l'interval $[0, 1,5]$. Els dos eixos estan a la mateixa escala, una unitat ocupa 10 cm.

- Traça aproximadament la recta tangent i troba el seu pendent amb l'aparell mesurador de pendents. És possible calcular aquest pendent amb tota precisió? De quants punts de la recta tangent coneixes les seves coordenades exactes? Quants punts d'una recta es necessiten per determinar la seva direcció i per tant el seu pendent?
- Calcula ara el pendent de la recta que talla al gràfic (secant) en els punts d'abscissa 1 i 1,5. Fes-ho amb tota precisió utilitzant la fórmula de la funció. A aquest valor se li dona el nom de taxa de variació mitjana
- Posa el resultat obtingut a l'apartat anterior al lloc corresponent de la taula següent. Fes el mateix per a les rectes secants al gràfic en els punts d'abscissa 1 i diversos valors de x propers a 1 i omple les dues taules:

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

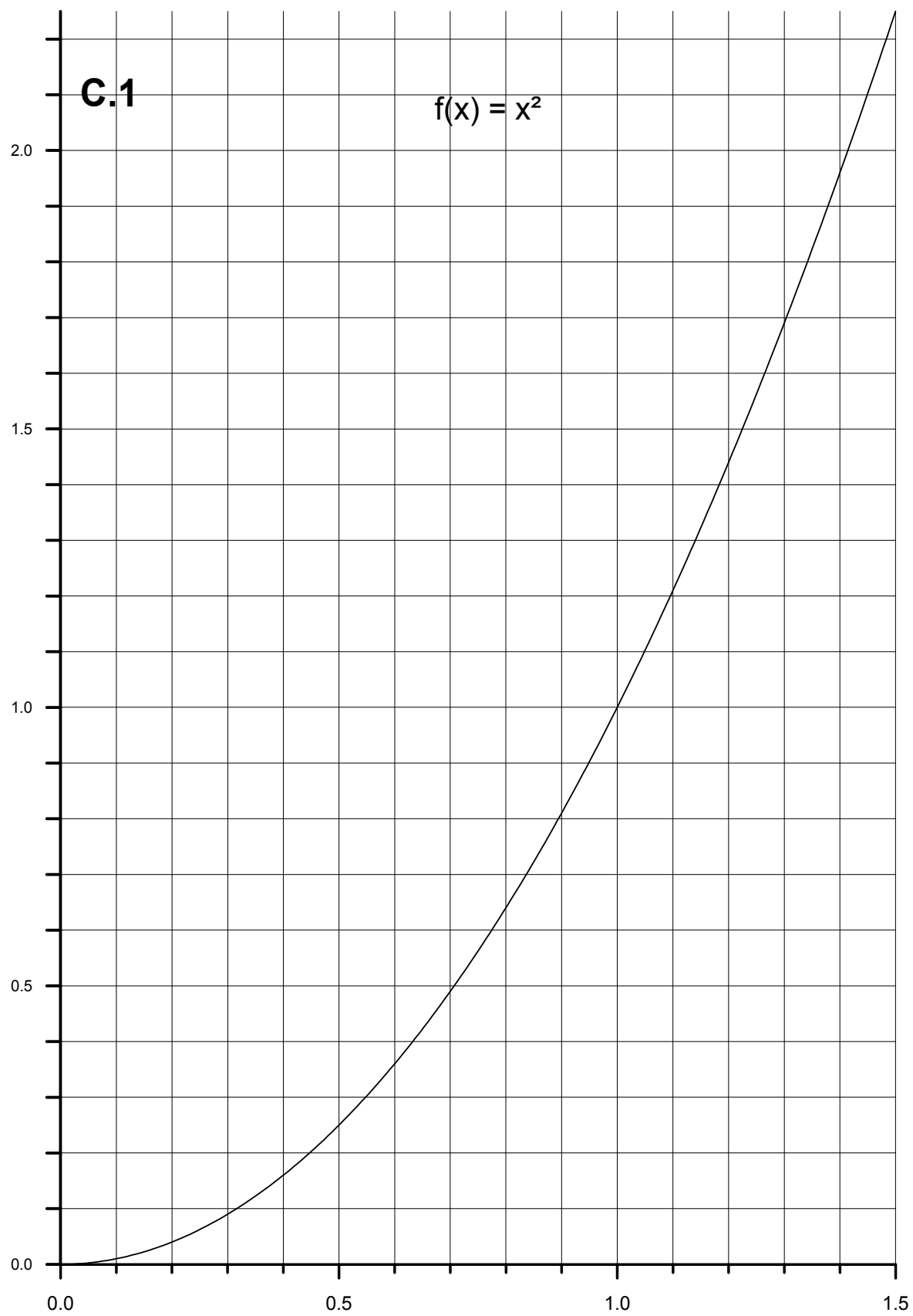
x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

- Observa les successions de les dues files que has omplert a les taules: cap a quin nombre tendeixen aquestes successions? Podem dir quin és el pendent de la recta tangent? Coincideix amb l'estimació feta a l'apartat b?
- Troba l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'abscissa 1

C.2.

- Calcula numèricament el pendent de la recta tangent a la funció $y = 3x^2 + 1$ en el punt d'abscissa 2. Per fer-ho pots fer dues taules com les de l'exercici anterior.
- Troba l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'abscissa 2.

Veiem que calcular numèricament el valor del pendent de la recta tangent en un punt és força laboriós i que, a més a més, per cada punt has de repetir tot el càlcul. Per tant aquest mètode no és molt recomanable si has de calcular-ne molts. Anem a veure un mètode per calcular la derivada en un punt que ens serveixi per tots els punts de la corba: serà el càlcul al·gèbric

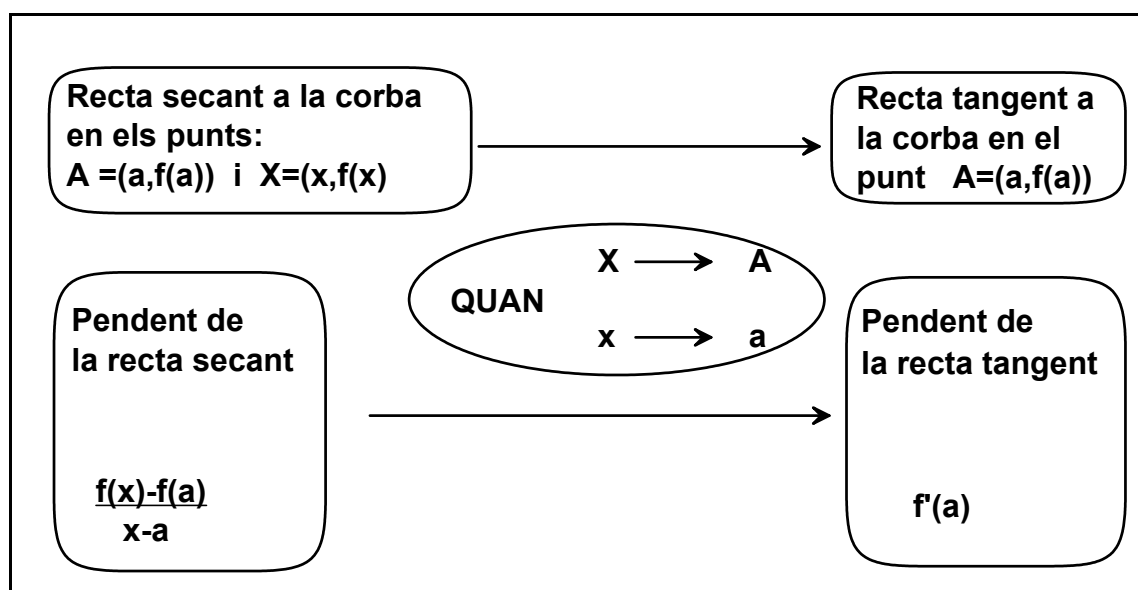
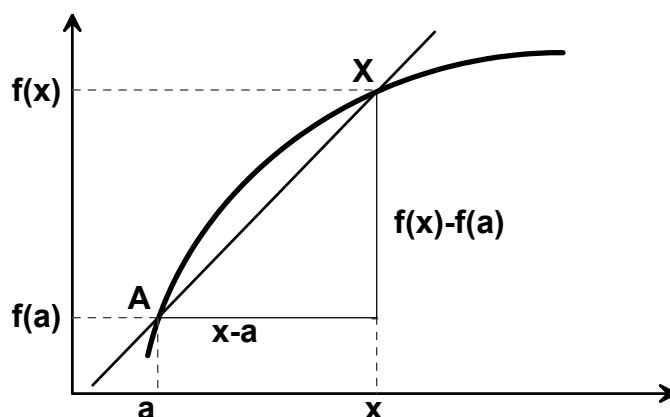


C.3. Als exercicis anteriors per trobar els pendents de les rectes secants has hagut de calcular l'expressió $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ per a diferents valors de x . Agafem l'exercici C.1 i fem els passos següents:

- Si en aquesta expressió substitueixes $f(x)$ per x^2 i $f(1)$ per la seva imatge 1 obtindràs una fracció polinòmica: simplifica-la.
- Observa l'expressió simplificada i utilitza-la per a comprovar si les taules de l'exercici C.1 les has omplert correctament.
- A partir de l'expressió simplificada, sabries calcular el pendent de la recta tangent d'una manera més ràpida?
- Troba, seguint els passos anteriors el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció f en el punt d'abscissa 3.

C.4. Utilitzant el mètode anterior, troba el pendent de la recta tangent a la corba $y = x^2 - 3$ en el punt d'abscissa 2.

Així doncs, donada una corba qualssevol, per calcular el pendent de la recta tangent en un punt a , el que fem és calcular el pendent de diverses rectes secants pròximes al punt a i veure cap on s'acosta. Això se'n diu fer el pas al límit. Esquemàticament:



C.5. Tornem a la funció $f(x) = x^2$ dels exercicis anteriors. Intentarem trobar la fórmula de la funció derivada d'aquesta funció.

a) Es tracta de fer els passos realitzats als exercicis anteriors però en comptes del punt d'abscissa 1 o 3 considerar un punt d'abscissa a qualsevol. Troba l'expressió de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

b) Simplifica l'expressió obtinguda.

c) Troba el valor de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

d) Contesta a la qüestió plantejada a l'enunciat.

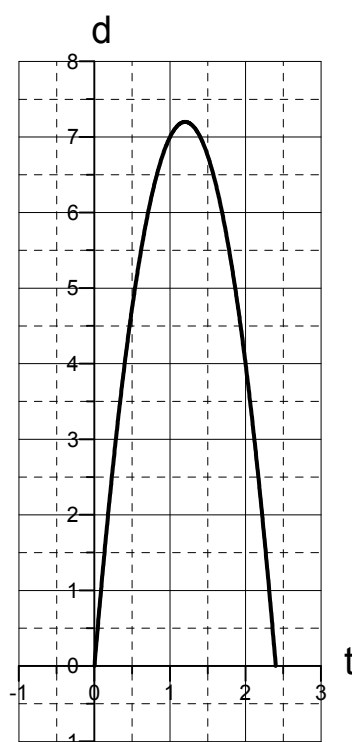
C.6. Troba la fórmula de la funció derivada per la funció $f(x) = x^2 - 3$.

C.7. En llançar enlaire una pedra verticalment, amb una velocitat inicial de 12 m/s, la seva alçada en metres al cap de t segons ve donada per la funció: $d(t) = 12t - 5t^2$ i el seu gràfic és el que et donem.

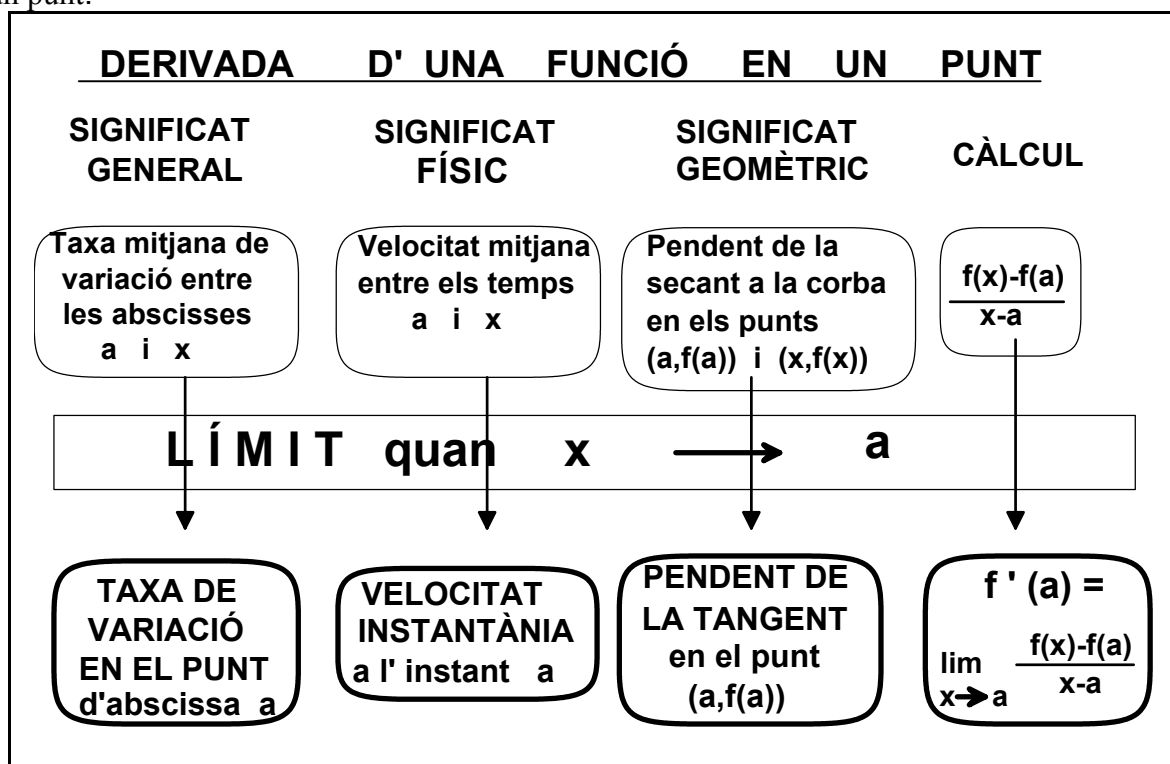
a) Quina és l'alçada de la pedra al cap de mig segon? I al cap d'un segon? I al cap de 2 segons? Com s'explica que l'alçada al cap d'un segon sigui més gran que la corresponent als 2 segons? Quina és l'alçada màxima assolida per la pedra? En quin moment hi arriba? En quin moment la pedra torna a caure terra?

b) Troba la velocitat mitjana de la pedra des que la llancem fins que arriba a la màxima alçada. Troba la velocitat mitjana entre els instants 1 s i 1,1 s. Fes el mateix entre els instants 0,99 s i 1s. Escribeu l'expressió de la velocitat mitjana entre els instants 1 s i un instant t s. Que passaria si en aquesta expressió consideréssim $t = 1$ s? Quina és la velocitat instantània a l'instant 1 s?

c) Troba l'expressió de la velocitat mitjana entre un instant a i un instant t qualsevol. Calcula l'expressió de la velocitat instantània en un instant a qualsevol fent el límit de la velocitat mitjana quan l'interval de temps tendeix a zero, o sigui quan $t \rightarrow a$.

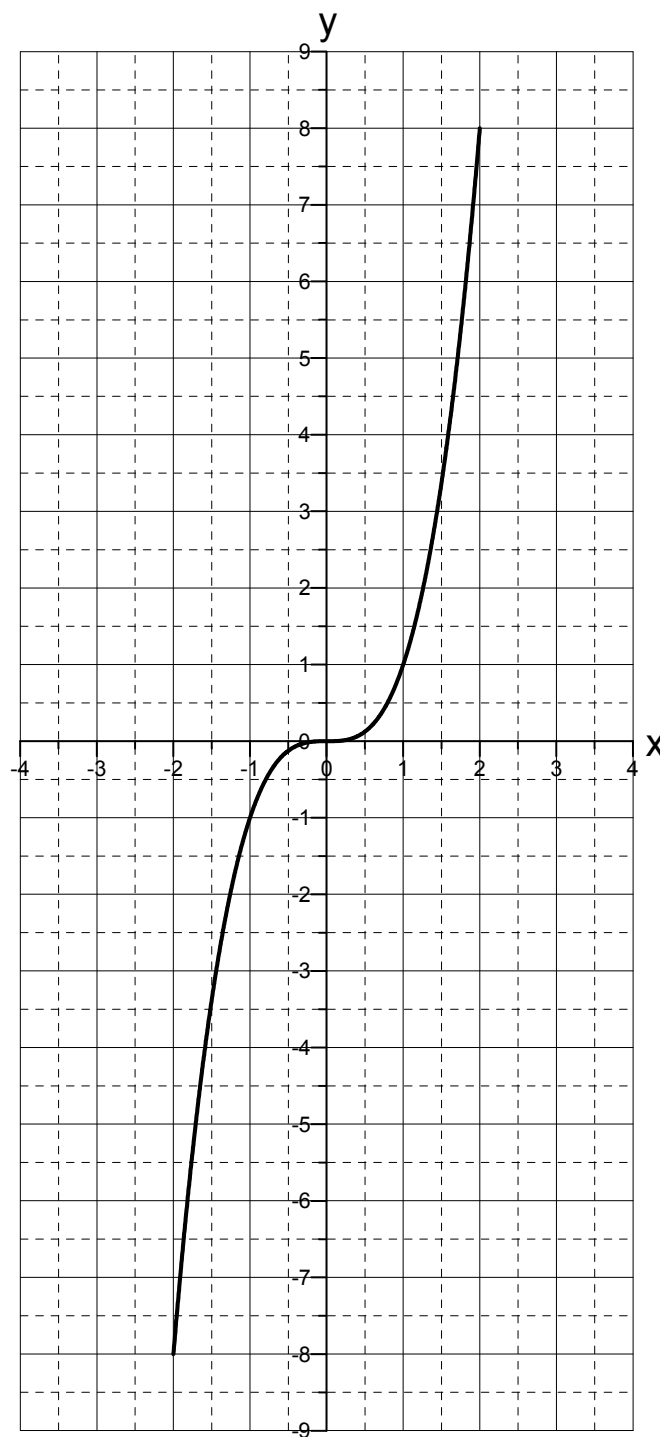


Aquí teniu un resum de la definició i els diferents significats de la derivada d'una funció en un punt.



C.8.

- a) A partir de la gràfica de la funció $y = x^3$ per a $x \in [-2, 2]$, fes un gràfic aproximat de la seva funció derivada.
- b) Calcula el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció en el punt d'abscissa 2 efectuant el límit corresponent.
- c) Troba l'equació de la recta tangent.
- d) Calcula el valor de la derivada de la funció en un punt d'abscissa a . Escribeu la fórmula de la funció derivada.
- e) Compara el gràfic de la funció derivada representat a l'apartat a amb el gràfic obtingut a partir de la fórmula.



Hem vist que la derivada de la funció $y = x^2$ és $\frac{dy}{dx} = 2x$ i que la derivada de la funció $y = x^3$ és $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. De la mateixa manera que hem trobat aquestes podem trobar les diferents funcions derivades. A continuació teniu una llista de les més usuals.

REGLES GENERALS DE DERIVACIÓ			
Regle del producte per una constant		$y = kv \quad k \in \mathbb{R}$	$y' = kv'$
Regla de la suma		$y = u + v$	$y' = u' + v'$
Regla del producte		$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Regla de la inversa del producte		$y = \frac{1}{v}$	$y' = -\frac{v'}{v^2}$
Regla del quocient		$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Regla de la cadena		$y = f[g(x)]$	$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
REGLES DE DERIVACIÓ DE FUNCIONS ELEMENTALS		REGLES DE DERIVACIÓ DE FUNCIONS ELEMENTALS COMPOSTES: $v = f(x)$	
$y = k \quad k \in \mathbb{R}$	$y' = 0$		
$y = x^k \quad k \in \mathbb{R}$	$y' = k x^{k-1}$	$y = v^k \quad k \in \mathbb{R}$	$y' = k v^{k-1} \cdot v'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{v}$	$y' = -\frac{v'}{v^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{v}$	$y' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$
$y = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^v \quad a \in \mathbb{R}^+$	$y' = a^v \cdot v' \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^v$	$y' = e^v \cdot v'$
$y = \log_a x \quad a \in \mathbb{R}^+$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+$	$y' = \frac{v'}{v \ln a}$
$y = \ln x $	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln v $	$y' = \frac{v'}{v}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin v$	$y' = \cos v \cdot v'$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos v$	$y' = -\sin v \cdot v'$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$y = \tan v$	$y' = \frac{v'}{\cos^2 v} = (1 + \tan^2 v) \cdot v'$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin v$	$y' = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos v$	$y' = \frac{-v'}{\sqrt{1-v^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan v$	$y' = \frac{v'}{1+v^2}$

C.9. Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les funcions següents:

1) $y = 3x^2 - 2$

2) $y = 7x + 9$

3) $y = \sqrt{2}$

4) $y = \frac{3}{5}x - 1$

5) $y = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 2$

6) $y = 4x^5 - x$

7) $y = 7(2x^4 - 6x^2 + 3)$

8) $y = \frac{4x^2 - x + 3}{5}$

9) $y = 4 \sin x$

10) $y = 1 - \cos x$

11) $y = -x^2 + \sin x$

12) $y = \frac{\cos x - \sin x}{3}$

13) $y = 2\sqrt{x}$

14) $y = -x^5 + 4x^3 - \sqrt{5}$

15) $y = \sqrt{x} - \sqrt{2}$

16) $y = x^{\frac{1}{3}}$

17) $y = \sin x \cdot \cos x$

18) $y = 4x \sin x$

19) $y = (4x^2 - x + 3) \cos x$

20) $y = x\sqrt{x}$

21) $y = \sin 7x$

22) $y = x^3 \cos x$

23) $y = (2x - 3)^3$

24) $y = \cos(x + 4)$

25) $y = \sin^2 x$

26) $y = 3 \cos(\sqrt{x})$

27) $y = \sqrt{4x - 7}$

28) $y = (1 - x)^5$

29) $y = (3x^2 - x)^{\frac{1}{4}}$

30) $y = \sin 3x \cos 4x$

31) $y = 10 \cos \frac{x}{10}$

32) $y = 3x + \sqrt{1 - \cos 2x}$

33) $y = x e^x$

34) $y = 3x^2 - \ln x$

35) $y = x^2 \ln x$

36) $y = e^{2x-1}$

37) $y = \frac{\sin x}{x}$

38) $y = \frac{x^2}{x-1}$

39) $y = \frac{7x-2}{x^2}$

40) $y = \frac{\ln x}{x}$

C.10. Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^3 - 4$, en el punt d'abscissa 2.

C.11. La **recta normal a una corba** en un punt de la mateixa, també anomenada simplement **la normal** en el punt, és una recta que passa pel punt i és perpendicular a la recta tangent.

- a) Troba l'equació de la normal a la corba $y = \sin x$ en el punt d'abscissa 0.
- b) Troba un punt de la corba en el qual la normal sigui paral·lela a l'eix d'ordenades.

C.12. Calcula l'angle que determina l'eix d'abscisses amb la recta tangent al gràfic de la funció $y = x^3 - 1$ en el punt de tall amb l'eix d'abscisses.

C.13. En quin punt del gràfic de la funció $y = -x^2 + 1$ la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant?

C.14. L'equació del moviment d'un cert mòbil és $e = 8t - 5t^2$ on e són metres i t segons. Calcula la fórmula de la velocitat instantània. Sabries trobar una situació real que respongui en aquest moviment. Explica les característiques del moviment.

C.15. Troba les coordenades del punt del gràfic $y = x^2 - 5x + 1$ en el qual la tangent és paral·lela a la recta $y = -10x$.

C.16. Calcula a i b per tal que la corba $y = ax^2 + b$ i la $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = -2$, tinguin en comú la recta tangent.

D Estudi d'una funció polinòmica

D.1.

- a) Fes un esquema de la forma que tindrà el gràfic de la funció $y = x^2 - 5x$.
- b) Quin valor tindrà $\frac{dy}{dx}$ en el punt en que la funció tingui un màxim o mínim? Troba les coordenades d'aquest punt.
- c) Omple la taula següent seguint els passos següents: 1) omple la primera i la tercera fila per tal de reflectir en quins intervals la derivada és positiva en quins és negativa i el punt en el qual val zero. 2) Omple la segona fila indicant el comportament de la funció, o sigui el seu creixement, màxims i mínims, a partir de la informació que et dóna la derivada.

x	
y	
dy/dx	

- d) Fes el gràfic de la funció.

D.2. D'una funció només saps que $f(2) = f'(2) = -3$. Aquesta informació et dóna alguna idea per saber com seria el seu gràfic? Representa una funció que compleixi la condició donada.

D.3. Estudia els intervals de creixement i els màxims i mínims relatius i fes la taula de comportament i finalment fes el gràfic de les funcions següents:

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $g(x) = -3x^2 + 2x - 1$

c) $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2$

d) $k(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 7$

e) $l(x) = x^4 - 32x$

f) $m(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

g) $n(x) = 10 - 2x^2$

h) $r(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

D.4. D'una funció $f: [-2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ coneixem les dades següents:

$$f(-1) = 0 \quad ; \quad f(0) = 2 \quad ; \quad f(2) = 4 \quad ; \quad f(4) = 6 \quad ;$$

$$f(7) = f'(-1) = f'(4) = f'(7) = 0 \quad \text{i} \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Fes el gràfic d'una funció que s'ajusti a aquestes condicions.

- D.5.** Un pagès ha de construir una tanca de forma rectangular per al bestiar al costat d'un riu. Només té 800 m de fil electrificat i vol aconseguir el màxim de superfície per a la pastura. Si considerem que el costat que dóna al riu no cal posar-hi fil, quines dimensions ha de tenir la tanca?
- D.6.** En una tintoreria necessiten uns dipòsits per a posar-hi tint, i per construir-los volen aprofitar unes xapes quadrades de 60 cm de costat. Estudia la possibilitat de construir amb aquestes xapes dipòsits de volum màxim pel procediment de retallar les puntes de les planxes en la forma indicada a la figura, doblegar i després soldar.

