



IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

Determinants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$

$$\varepsilon_{iij} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{jii} = 0$$

Batxillerat

DETERMINANTS

Introducció

Una de les fórmules que més utilitzem és la que tenim per trobar les solucions d'una equació de segon grau:

Equació: $ax^2 + bx + c = 0$, on $a \neq 0$, si fos 0 no seria de segon grau.

Primera solució: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Segona solució: $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fórmula molt útil, funciona encara que b i/o c siguin 0, tot i així en aquests casos no és el millor procediment.

Per trobar les solucions dels SEL, sistemes d'equacions lineals, tenim procediments molt potents, però per ara no en tenim cap que es redueixi a aplicar una fórmula tant curta i senzilla com la que tenim per resoldre equacions de segon grau, anem a obtenir-ne una.

A) Solució d'un SEL de dues equacions amb dues incògnites.

Els podem representar tots amb la notació:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right\}$$

Les lletres x,y simbolitzen les incògnites i les lletres a, b, c, d, e, f simbolitzen els coeficients o paràmetres del SEL.

Les úniques restriccions que posem als SEL és que sigui compatible determinat, solució única, i que els coeficients de les incògnites no siguin 0, el resultat que obtindrem comprovarem que també és vàlid per als valors 0, però així no hem de vigilar que el Pivot sigui 0.

Utilitzem el mètode de Gauss-Jordan.

Matriu ampliada del SEL:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Utilitzem a com pivot: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \end{pmatrix}$

Dividim la segona fila per $ae - bd$:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ae - bd}{ae - bd} & \frac{af - cd}{ae - bd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & \frac{af - cd}{ae - bd} \end{pmatrix}$$

I ja tenim el valor de la incògnita y de la solució del SEL:

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Resultat molt fàcil de recordar. Observem la matriu del SEL: $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$

Si multipliquem la diagonal principal tenim: $a e$

Si multipliquem la diagonal secundària tenim: bd

Si restem el producte de les dues diagonals tenim: $ae - bd$, que és el denominador del valor y de la solució.

Val la pena definir una nova operació de les matrius quadrades de segon ordre,

el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd$

La notació de determinant és: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

Amb aquesta notació tenim $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - cd}{ae - bd}$

Fem el mateix per trobar el valor x de la solució:

Matriu ampliada del SEL:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Utilitzem e com pivot: $\begin{pmatrix} ae - bd & 0 & ce - bf \\ & d & e & f \end{pmatrix}$

Dividim la primera fila per $ae - bd$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ i ja tenim la x, } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Determinant d'una matriu quadrada d'ordre 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Δ = determinant de la matriu del SEL.

Δ_x = determinant de la matriu que resulta de substituir a la matriu del SEL la columna dels coeficients de les x per la columna dels termes independents.

Δ_y = el mateix per a la y .

Solució d'un SEL de dues equacions amb dues incògnites: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

REGLA DE CRAMER

Volem aconseguir un procediment per resoldre un SEL de n equacions amb n incògnites que sigui la generalització del que hem obtingut per a dues equacions amb dues incògnites.

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & + & \dots & + \dots + & \dots & = & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right\} \quad x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$$

On Δ és el determinant de la matriu del SEL i Δ_{x_i} el determinant que resulta de substituir a la matriu del SEL la columna i per la columna dels termes independents.

Definirem els determinants de les matrius quadrades d'ordre n per a fer possible aquesta regla.

EXERCICIS I PROBLEMES

A.1) Calcula els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$f) \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$h) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$i) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$j) \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$k) \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{4}{5} & 5 \end{vmatrix}$$

A.2) Resol els sistemes d'equacions lineals següents amb determinants:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$$

A.3) Deixant el resultat algebraic calcula els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & x \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} x+3 & -3 \\ 5 & x \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x+1 & x+1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix}$$

A.4) Resol l'equació $\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x-4 & 3 \end{vmatrix} = 0$

A.5) Resol l'equació $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & (x+1)^2 \end{vmatrix} = 0$

A.6) Considerant els termes en z com part del terme independent resol el sistema d'equació lineal següent:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

A.7) Fes el mateix amb el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

A.8) Escollint una incògnita com paràmetre dels termes independents resol
$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

A.9) Escollint dues incògnites com paràmetres dels termes independents resol
$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z + 3t = 5 \\ 4x + 3y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

A.10) Resol els sistemes, escollint les equacions convenients per separat:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -1 \\ 5x + y = 8 \\ 6x + 4y = 18 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + y = -2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$$

B) DETERMINANTS D'ORDRE 3

Partim d'una matriu quadrada d'ordre 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

En aquestes matrius tenim 3 files i 3 columnes.

Anomenem línia a les files i columnes. Hi ha 6 línies.

Anomenem menor complementari del terme a_{ij} al determinant que resulta d'eliminar de la matriu A la fila i i la columna j.

Hi ha 9 termes $\rightarrow$ hi ha 9 menors complementaris.

Menors complementaris de:

$$a_{11} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad a_{12} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad a_{13} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{21} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad a_{22} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad a_{23} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{31} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad a_{32} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad a_{33} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Els menors complementaris també s'anomenen cofactors.

Sovint el menor complementari del terme a_{ij} es representa amb α_{ij}

Definim adjunt de l'element $a_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$ i el representem amb A_{ij}

Els signes de $(-1)^{i+j}$ són $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Tenim 9 adjunts:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Definim determinant d'una matriu quadrada d'ordre 3:

La suma dels productes dels elements d'una línia pels seus adjunts.

Si escollim la fila 1:

$$\text{Determinant de } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Si escollim la columna 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{22} a_{11} a_{33} - a_{22} a_{13} a_{31} - a_{32} a_{11} a_{23} + a_{32} a_{13} a_{21}.$$

Observem que el determinant calculat amb la columna 2 dóna el mateix que amb la fila 1.

El determinant no depèn de la línia, fila o columna, que utilitzem.

No ho demostrem però es proposa que ho comproveu per una altra línia.

REGLA DE SARRUS

Serveix per calcular un determinant d'ordre 3, sense necessitat de memoritzar el resultat que hem obtingut a partir de la definició.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

És una expressió algebraica de 6 termes, 3 amb coeficient +1 i 3 amb coeficient -1.

Afegim les dues primeres files a continuació de la fila 3, files 4 i 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Per obtenir el terme amb coeficient positiu utilitzem les tres diagonals dibuixades.

$$\rightarrow a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}$$

Per obtenir els termes amb coeficient negatiu fem les tres diagonals següents: - $a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

EXERCICIS I PROBLEMES

B.1) Calcula els determinants següents desenvolupant per una fila o columna:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 7 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & 30 & -6 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

B.2) Calcula els determinants de l'exercici anterior amb la Regla de Sarrus.

B.3) Calcula el determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ desenvolupant per la segona fila i

comprova que dona el mateix que el resultat obtingut a l'apartat teòric desenvolupant per la primera fila.

C) DETERMINANTS D'ORDRE N

La mateixa que hem donat per als determinants d'ordre 3.
Definim determinant d'una matriu quadrada d'ordre n:

La suma dels productes dels elements d'una línia pels seus adjunts.

Aquesta definició també funciona per als determinants d'ordre 2.

PROPIETATS DELS DETERMINANTS

1. El determinant de la matriu transposada $|A^T|$ és el mateix que el de la matriu $|A|$.

Per demostrar-ho calculem un determinant desenvolupant per files i l'altre per columnes.

2. El determinant d'una matriu que té una línia de zeros és zero.
Per demostrar-ho calculem el determinant desenvolupant per la línia de zeros.

3. Si tots els elements d'una línia els multipliquem per un nombre λ el determinant de la matriu resultant és el determinant de la matriu inicial multiplicat per λ .

Només cal calcular el nou determinant desenvolupant per la línia que hem multiplicat per λ .

4. Si permutem dues files, o dues columnes, el determinant canvia de signe.

Per demostrar-ho:

Calculem el determinant de la nova matriu desenvolupant per les línies paral·leles a les dues intercanviades fins arribar a determinants d'ordre 2 i comprovem aquesta propietat per a determinants d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a e - b d \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} d & e \\ a & b \end{vmatrix} = d b - e a$$

5. Si dues files, o dues columnes, són iguals el determinant és 0.

Demostració:

Si permutem les dues línies iguals el determinant canvia de signe per la propietat anterior i no ha canviat perquè és el mateix, l'únic nombre igual al seu oposat és el 0, aleshores el determinant és 0.

6. Si una línia es descompon en suma de dues línies el determinant de la matriu és suma de determinants:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Per demostrar-ho calculem el primer determinant desenvolupant per la línia que és suma de línies.

Aquest resultat és vàlid per a tots els determinants, encara que no siguin d'ordre 3. i per a totes les línies, no només la fila 1.

7. Si una fila és combinació lineal d'altres files de la mateixa matriu, o una columna és combinació d'altres columnes de la mateixa matriu, el determinant és zero.

Per demostrar-ho calculem el determinant desenvolupant per la línia que és combinació d'altres línies. Utilitzem les propietats 6, 3 i 5 amb aquest ordre i el resultat és 0.

8. Si a una fila li afegim una combinació lineal d'altres files de la mateixa matriu, o a una columna una combinació lineal d'altres columnes de la mateixa matriu, el determinant no varia.

Per demostrar-ho utilitzem les propietats 6 i 7.

PROBLEMES I EXERCICIS

C.1) Calcula els següents determinants:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

D) Regla de Cramer d'un SEL de tres equacions amb tres incògnites.

Els podem representar tots amb la notació:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \right\}$$

Les lletres x, y, z simbolitzen les incògnites i les lletres a_{ij} , b_i simbolitzen els coeficients o paràmetres del SEL.

Partirem del mètode de Gauss.

Matriu del sistema i ampliada:

Representem per A la matriu del sistema.

Multipliquem la primera fila per A_{11} , la segona fila per A_{21} i la fila 3 per A_{31} , la nova matriu és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}A_{11} & a_{12}A_{11} & a_{13}A_{11} & b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21} & a_{22}A_{21} & a_{23}A_{21} & b_2A_{21} \\ a_{31}A_{31} & a_{32}A_{31} & a_{33}A_{31} & b_3A_{31} \end{array} \right)$$

Sumem les tres files i obtenim l'equació:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

Coeficient de la x:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = |A| \text{ perquè: } a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Coeficient de la y:

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0, \text{ perquè: } a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} =$$

$$= a_{12} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ per tenir la}$$

primera i segona columna iguals.

Coeficient de la z:

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0, \text{ perquè: } a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} =$$

$$= a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ per tenir la}$$

primera i tercera columna iguals.

Terme independent: $b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} =$

$$b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x$$

En resum:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

$$\Delta x + 0y + 0z = \Delta_x \rightarrow \Delta x = \Delta_x \rightarrow \boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}}$$

Per simetria o repetint el procés per a les incògnites y i z.

Per aïllar la y, hem de multiplicar la primera fila de la matriu ampliada del sistema per A_{12} , la segona fila per A_{22} i la tercera fila per A_{32} , obtenim:

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Per aïllar la z, multipliquem la primera fila de la matriu ampliada del sistema per A_{13} , la segona fila per A_{23} i la tercera fila per A_{33} , obtenim:

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

PROBLEMES I EXERCICIS

D.1) Resol els sistemes d'equacions lineals següents amb la Regla de Cramer.

$$a) \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ & + & 4y & + & 3z & = & 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 5z & = & 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 5z & = & 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ x + 3y - z = 0 \\ x + 5y - 5z = 6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 3 \\ 5x + 4y - 2z = 12 \\ 3x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 11 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ -x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

D.2) Resol, després de trobar les equacions que es poden eliminar i d'escollir

$$\text{el paràmetre de les solucions: } \begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + 4y - z = 2 \\ 5x + 6y - z = 8 \\ x - 10y + 3z = 0 \end{cases}$$

E) Regla de Cramer

La solució d'un sistema d'equacions lineals de n equacions amb n incògnites:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & + & \dots & + \dots + & \dots & = & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right\}$$

$$\text{és } x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$$

On Δ és el determinant de la matriu del SEL i Δ_{x_i} el determinant que resulta de substituir a la matriu del SEL la columna i per la columna dels termes independents.

Només cal repetir el que hem fet per a 3 equacions de 3 incògnites tenint cura dels subíndexs.

EXERCICIS I PROBLEMES

$$\text{E.1) Resol } \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & - & 5y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 3x & + & 2y & - & z & - & t & = & 10 \\ x & + & y & - & 2z & - & 3t & = & -1 \\ -2x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & -7 \end{array} \right.$$

F) Càlcul del rang d'una matriu amb determinants.

El rang d'una matriu és el nombre de files, o de columnes, linealment independents.

Quan en un determinant hi ha una fila linealment dependent d'altres files el determinant és 0, propietat 7 dels determinants.

Si una matriu conté un determinant d'ordre n diferent de 0, el rang de la matriu com a mínim és n .

El rang de la matriu és l'ordre del determinant de més files i columnes diferent de 0 que conté la matriu.

EXERCICIS I PROBLEMES

F.1) Calcula el rang de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 20 & 10 \\ -6 & 3 & -15 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & -9 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F.2) Calcula el rang de la matriu següent segons el valor del paràmetre a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix}$$

F.3) Calcula el rang de la matriu següent segons el valor del paràmetre a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ a & a-1 & 4 \end{pmatrix}$$

F.4) Calcula el rang de la matriu següent segons els valors dels paràmetre a i

$$b: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ a & -1 & 6 \\ 4 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

F.5) Calcula el rang de la matriu següent segons el valor del paràmetre a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & a & 5 \end{pmatrix}$$

F.6) Calcula el rang de la matriu següent segons el valor del paràmetre a:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 & a \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

G) Càlcul de la matriu inversa amb determinants.

Ho expliquem per a una matriu quadrada d'ordre 3.

Partim d'una matriu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ i hem de trobar la matriu A^{-1} tal que:

$$A A^{-1} = I \text{ on } I \text{ és la matriu } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa és l'adjunta de la transposada dividida pel determinant.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Demostració:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31} & a_{11}A_{12} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{32} & a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{23}A_{31} & a_{21}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{32} & a_{21}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{21} + a_{33}A_{31} & a_{31}A_{12} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{32} & a_{31}A_{13} + a_{32}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ perquè els elements de la diagonal principal:}$$

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31} = |A|$ per la definició de determinant. El mateix passa per els altres dos elements de la diagonal principal.

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31} = 0$ perquè:

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{23}A_{31} = a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ per tenir dues files iguals. El mateix passa per els altres elements de la matriu que no són de la diagonal principal.}$$

Aquest procediment també és vàlid per a matrius quadrades d'ordre diferent de 0.

EXERCICIS I PROBLEMES

G.1) Calculeu i comproveu les matrius inverses de:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

G.2) Calculeu i comproveu les matrius inverses de:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

H) La regla de Cramer a partir de la matriu inversa.

Ho fem per a un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites però fàcilment ho podeu generalitzar a n equacions amb n incògnites.

Sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Tenim aquestes 3 matrius:

La del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

la de les incògnites: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i

la dels termes independents $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Utilitzant el producte de matrius tenim: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

De forma abreujada $A X = B$

Si A és invertible podem aïllar la X

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{|A|} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}) = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

El mateix per a les incògnites y i z.

EXERCICIS I PROBLEMES

H.1) Resol amb la matriu inversa el sistemes:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ \quad + 4y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \\ x + 5y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

H.2) Tenim les matrius $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ on A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A .

$C = A \cdot B$. Demuestra que $c_{22} = |A|$.

H.3) Tenim les matrius $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ on A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A .

$C = A \cdot B$. Demuestra que $c_{31} = 0$.