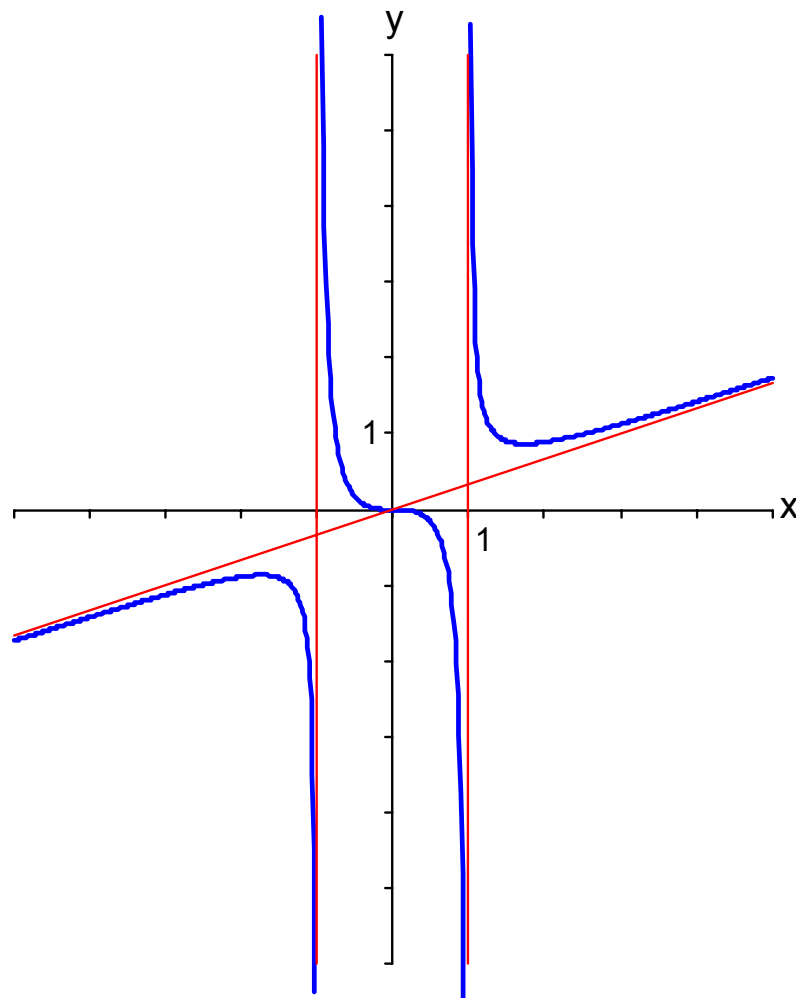


IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

ESTUDI DE FUNCIONS



Batxillerat

A Comportament d'una funció a l'entorn d'un punt

- A.1.** Una mercaderia es ven a 0,10 € el quilo, però si se'n compren més de 100 quilos el preu de cada quilo es rebaixa a 0,08 €.
- a) Dibuixa el gràfic de la funció que dona el cost de x quilos de mercaderia.
 - b) Té sentit comercial comprar 95 quilos ? Quina tarifa s'aplicarà?
 - c) Podria ser que dues quantitats "quasi" iguals de mercaderia costessin diferent?
 - d) Modifica la primera frase d'aquest problema per tal de fer desaparèixer l'ambigüitat dels apartats b i c.

Haureu comprovat que el gràfic d'aquesta funció que donava lloc a una situació curiosa, tenia un salt quan x és 100. Aleshores es diu que la funció té un **punt de discontinuïtat** per $x=100$ o bé que no és contínua en aquest punt. En general podem dir que una funció és contínua si podem fer el seu gràfic sense aixecar el llapis del paper.

Anem a veure alguns tipus de discontinuïtats:

- A.2.** Donada la següent funció definida a trossos

$$f : [-3,4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{si } x \in [-3,-1] \text{ aleshores } f(x) = 3$$

$$\text{si } x \in (-1,2] \text{ aleshores } f(x) = x^2$$

$$\text{si } x \in (2,4] \text{ aleshores } f(x) = -2x + 8$$

- a) Fes la seva representació gràfica.
- b) Creus que és contínua en tots els seus punts. Per què?

En l'exercici anterior hauràs comprovat que la funció no és contínua en el punt $x=-1$. Direm que hi tenim una discontinuïtat de salt.

Fixa't que en el punt $x = -1$ el valor que té la funció si t'acostes a -1 per l'**esquerra** és 3 i en canvi si t'acostes a -1 per la **dreta** el valor de la funció hauria de ser 1, aleshores podem escriure que

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$ que es llegeix :límit quan x s'acosta a -1 per l'esquerra és 3.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ que es llegeix :límit quan x s'acosta a -1 per la dreta és 1.

Per tant podem definir una **discontinuitat de salt** com aquella en què els límits laterals per la dreta i per l'esquerra existeixen i són diferents.

Anomenem **domini** d'una funció al conjunt de punts on està definida la funció, és a dir, aquells punts on la funció té sentit. Les operacions que poden portar problemes són la divisió per zero, l'arrel d'un número negatiu i el logaritme d'un nombre menor o igual a zero. Veiem alguns exemples:

Exemple 1

El domini de la funció $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x}$ és $D = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ ja que per $x = -2$ i per $x = 0$ el denominador s'anul·la i per tant no es pot fer la divisió.

Exemple 2

Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ el seu domini serà tots els valors de la x que fa positiva l'expressió $x-1$; per tant tenim que si $x-1 \geq 0$ aleshores $x \geq 1$ i el domini serà $D = [1, +\infty)$

Exemple 3

Donada la funció $f(x) = \ln(2x+3)$ el seu domini serà tots els punts que facin estrictament positiva l'expressió $2x+3$, és a dir

$$2x+3 > 0 ; \quad 2x > -3 ; \quad x > \frac{-3}{2} \quad \text{i per tant} \quad D = \left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$$

A.3. Sigui $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- Quin és domini d'aquesta funció?
- Fes una taula de valors per $x = -3, -2, -1, 1, 2, 3$, i una altra per valors pròxims a zero com per exemple 0.5, 0.1, 0.01, 0.001 i -0.5, -0.1, -0.01, -0.001. Fes una representació gràfica del resultat. Què passa quan $x = 0$? És contínua la funció?

A.4. Sigui $f(x) = \frac{x}{x+1}$

- Quin és el domini d'aquesta funció?
- Fes la seva representació gràfica utilitzant una taula de valors adient. Creus que és contínua la funció? Per què?

Tant en un cas com en l'altre observem que el valor de la funció en el punt que no és del domini creix (o decreix) de forma desmesurada. Tenim doncs que la funció s'acosta a una recta vertical imaginària que passaria pel punt de fora del domini. Aquesta recta s'anomena **asímtota vertical** i el punt és una **discontinuitat asimptòtica**.

En aquest cas si ho volem expressar en forma de límits tindríem per l'exercici 4 que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ i que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ i per l'exercici 5 s'expressarà

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{i que} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

Per tant direm que quan els límits laterals en un punt existeixen però són infinits, tenim una **discontinuitat asimptòtica** i per tant la recta vertical que passa per aquest punt és una **asímtota vertical**.

Fixem-nos que, generalment, si al substituir un nombre en una funció $f(x)$ obtenim una expressió que no es pot calcular del tipus $\frac{n}{0}$ amb $n \neq 0$ aleshores la funció no tindrà imatge en aquest punt i el seu comportament serà asimptòtic i tindrà una asímtota vertical. Per això a vegades escriurem que $\frac{n}{0} = \infty$. Però ∞ no és cap nombre real i per això l'expressió $\frac{n}{0}$ continua essent una expressió sense resultat.

A.5. Troba les asímtotes verticals de les funcions:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

A.6. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

- Troba el seu domini i representa la funció.
- Simplifica l'expressió algebraica de la funció. Quin tipus de funció queda? És la mateixa que tens representada? Hi ha alguna diferència?
- És contínua aquesta funció?

A.7. Sigui f : la funció definida per

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \quad \text{si } x \neq 3$$

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x = 3$$

- Com seria el seu gràfic, comparant-lo amb el que has fet en l'exercici anterior?
- Creus que és contínua? Podries definir-la d'alguna manera per tal que sigui contínua?

Hem vist un cas de discontinuitat una mica especial. En l'exercici 6 la funció era contínua en tots els seus punts excepte per $x=3$ on hi havia un "forat" per que el punt no era del domini. En l'exercici 7, tot i que el punt $x=3$ pertany al domini, no està ben definida la funció i no tapa el "forat". Aquestes situacions donen lloc a les **discontinuitats evitables**.

D'altra banda fixa't que tant si ens acostem a $x=3$ per la dreta com per l'esquerra el límit de la funció és el mateix (6 en aquest cas). És a dir

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$$

Quan els límits laterals existeixen i són iguals aleshores existeix el límit i escriurem

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Podem dir doncs que tenim una **discontinuitat evitable** en un punt quan els límits laterals coincideixen (existeix el límit) i aquest valor no és el valor de la funció en el punt.

Ara estem en condicions de donar una nova **definició de continuïtat**. Direm que una funció és contínua en un punt $x = a$ quan compleix que :

- 1) El punt és del domini de la funció
- 2) Existeixin els límits laterals en el punt i coincideixin i per tant té límit en el punt
- 3) El valor del límit sigui el mateix que el valor de la funció en el punt $x = a$

Per tant $f(x)$ és contínua en un punt $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

O sigui que " calcular un límit" en un punt en què la funció és contínua és trobar el valor de la funció en aquest punt:

Exemple

Si tenim $f(x) = x^2$ aleshores $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

A.8. Considera la funció definida per la fórmula : $f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$

- a) Per a quins valors està definida $f(x)$?
- b) Per a quins valors la funció $f(x)$ coincideix amb la funció $g(x) = x+3$?.
- c) És contínua la funció $f(x)$? Quin tipus de discontinuïtat té? De quina manera pots modificar la definició de $f(x)$ per a obtenir una funció contínua?.

Fixa't que per $x = 2$ tenim una discontinuïtat evitable i podem escriure $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ ja que 5 seria el valor que fa contínua la funció . Observa,

però, que si intentes calcular el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$ d'entrada donarà $\frac{0}{0}$ que és una **indeterminació** (és a dir no es pot calcular directament). Per resoldre aquest límit cal simplificar l'expressió de manera que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+3 = 2+3 = 5$

Per tant per calcular els límits amb una indeterminació del tipus $0/0$ caldrà simplificar l'expressió primer.

A.9. La funció $f(x) = |x|$ (valor absolut de x), es defineix així :

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq 0 \quad |x| &= x \\ \text{si } x \leq 0 \quad |x| &= -x \end{aligned}$$

Fes-ne la representació gràfica i indica, si n'hi ha, els punts de discontinuïtat.

A.10. Estudia la funció $f(x) = \frac{x}{|x|}$, fes-ne el gràfic i indica les discontinuïtats. Alguns llibres, aquesta funció l'escriuen $\text{sg}(x)$, és a dir, signe de x . Per què creus que li posen aquest nom?

A.11. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 5x}$

- Troba els punts de discontinuïtat.
- Calcula el límit de la funció en aquests punts?
- Fes un gràfic aproximat de la funció.

A.12. Repeteix l'exercici anterior per a la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x+2 & \text{si } x \in (2, 5) \\ -7 & \text{si } x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Un exemple d'indeterminació del tipus $0/0$ el tenim amb el càlcul de la derivada. Recordem que la derivada d'una funció $y = f(x)$ en un punt $x=a$ és el pendent de la recta tangent a la corba en el punt $x=a$; Això expressat en forma de límit seria:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Observeu que el càlcul del quocient de l'expressió quan $x = a$ dona $0/0$ i en canvi el seu valor pot existir i és justament la derivada en el punt.

Exemple

Suposem que $f(x) = x^2$ Anem a calcular la derivada de la funció en el punt $x=3$ a partir de la definició:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

Anem a veure que efectivament la derivada en el punt és 6 utilitzant les regles de derivació:

$$f'(x) = 2x ; \quad f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

A.13. L'expressió $d(t) = 245 - 5t^2$ ens dona la distància a terra d'una pedra deixada caure des d'un edifici de 245 m. d'alçada.

- Si estem en una finestra a una alçada de 165m, quant temps trigarà la pedra a passar davant nostre?
- Troba la velocitat de la pedra des de que fou llançada fins que la veiem, o des de que la veiem fins que arriba a terra. troba-la també durant els 3, 2, 1, 0.1, segons abans que passi davant nostre, i també quan ja ha passat.
- Fes la representació gràfica de la funció $f(x)$ = velocitat mitjana de la pedra des de l'instant x fins el moment que passa davant nostre.

- d) Quin és el domini d'aquesta funció?
- e) En aproximar-se x a 4, a quin nombre s'aproximen els valors de la funció anterior? quin és, per tant $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?
- f) Quin significat físic té aquest nombre?

A.14. Els científics Boyle (1627-1691) i Mariotte (1620-1684) van estudiar la relació entre la pressió d'un gas i el volum que ocupa quan la temperatura del gas es manté constant. Van arribar a la relació següent $P \cdot V = \text{constant}$.

Si tenim un mol de gas a la temperatura de 20°C , aleshores la constant és 24,03 (P en atm. i V en l.).

- a) Estudia la funció $f: V \rightarrow P$ i fes-ne el gràfic.
- b) Què li passa a la pressió si el volum el fem més i més petit? Quin seria el $\lim_{V \rightarrow 0} f(V)$?

Resumint una mica podríem dir que calcular el límit d'una funció en un punt és estudiar el comportament d'aquesta funció quan a la variable independent li donem valors molt i molt propers al punt. Per això a l'hora de calcular el límit d'una funció donada per una fórmula seguirem els passos següents:

1) Intentarem calcular el valor de la funció en el punt substituint el punt en la fórmula. Si no tenim "problemes" a l'hora de trobar aquest valor i es tracta d'una funció elemental o composta d'elementals, aleshores la funció és contínua en el punt i el límit serà el valor de la funció.

2) Quan al substituir el valor a la funció "tenim problemes", és a dir, hem de fer una operació que no té sentit, com dividir per zero, caldrà "investigar" quin és el valor del límit, si és que en té. Aquesta "investigació" o "càlcul" de límits ja has vist que es pot resoldre de diferents maneres. Ara bé, en cas de dificultat, sempre hi ha un mètode al qual recórrer: DONAR VALORS A LA FUNCIO PRÒXIMS AL PUNT, tant per la dreta com per l'esquerra. I per fer-ho tenim la sort de tenir les calculadores i els ordinadors.

A.15. Troba els següents límits, indicant el que calgui respecte la continuïtat de la funció en el punt i fent un esquema de com seria el gràfic al voltant del punt.

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2-x}$

A.16. Troba els punts de discontinuïtat de les funcions següents. A l'entorn d'aquests punts estudia la funció i fes-ne un gràfic aproximat que reflecteixi el seu comportament.

a) $y = \frac{1}{x-2}$

b) $y = \frac{x}{x+3}$

c) $y = \frac{5}{(x-3)^2}$

d) $y = \frac{2x-1}{x^2-8x}$

e) $y = \frac{2x^2-x-1}{x^2(x+4)}$

f) $y = \frac{x+5}{x^2-4}$

g) $y = \frac{1}{x^2-2x-3}$

h) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$

i) $y = \operatorname{tg} x \quad x \in [0, 2\pi]$

j) $y = \frac{1}{\sin x}$

B Comportament d'una funció a l'infinit

Fins aquí hem vist com es comporta la funció en un punt determinat, però ara ens interessa veure què passa amb la funció (la y) quan el valor de la variable independent (la x) es fa molt gran.

B.1. Sigui $f(x) = \frac{1}{x+1}$

- a) Troba el domini. Calcula el límit en el punt de discontinuïtat.
 b) Què passa si la x creix molt? Per ajudar-te a contestar la pregunta pots omplir la taula següent

x	100	10000	500000		
f(x)					

- c) I si decreix molt (es fa molt negativa)?
 d) Fes el gràfic de la funció a partir dels resultats obtinguts.

En aquest exercici s'observa que si la x es fa molt gran el valor de la funció es fa molt petit. Per tant podríem dir que **quan la x tendeix a l'infinit la funció tendeix cap a zero**, i ho escriurem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. En aquest cas direm que la recta $y = 0$ és una **asímtota horitzontal** de la funció f(x). Si el límit no dóna un número finit no tindrem cap asímtota horitzontal.

De la mateixa manera quan la x es fa molt petita la funció també tendeix a zero i per tant escriurem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Observem que el càlcul de les asímtotes horitzontals passa pel càlcul dels límits quan $x \rightarrow \infty$ i això és fàcil si, com en el cas de l'exemple, el denominador creix mentre el numerador és sempre el mateix però, què passa quan varien tots dos?.

exemple 1

Agafem la funció $f(x) = \frac{2x+1}{4x-3}$. Quan fem créixer la x, creix el numerador i el denominador a la vegada i de diferent manera: direm que tendeix a $\frac{\infty}{\infty}$ que és una indeterminació. Per a resoldre aquest tipus d'indeterminació cal aplicar el **mètode de la màxima potència** que consisteix en dividir numerador i denominador pel monomi de grau màxim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{4x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{4 - \frac{3}{x}} = \frac{2+0}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fixa't que al tenir el mateix grau el numerador i el denominador el resultat ha sigut la divisió dels coeficients corresponents. Al ser un resultat finit tenim una asímptota horitzontal que és la $y = 1/2$. Veiem altres situacions:

exemple 2

Sigui $f(x) = \frac{3x^2-1}{4x}$. Anem a calcular el seu límit a l'infinit. Tenim altre cop una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$. La resoldrem aplicant el mètode de la màxima potència que en aquest cas és x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}} = \frac{3-0}{0} = \infty$$

En aquest cas el monomi de grau màxim es troba en el numerador i prou i això fa que el límit sigui infinit. NO tindrem una asímptota horitzontal.

B.2. Hem vist que per calcular els límits a l'infinit s'ha d'aplicar el mètode de la màxima potència. Fes un resum dels diferents resultats segons siguin els graus del numerador i del denominador.

B.3. Estudia si les funcions següents tenen asímptota horitzontal.

a) $f(x) = x^3 - 1$

g) $f(x) = \frac{x^2 - x + 7}{x^3 - 2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

h) $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = 3 + 1/x$

i) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 1}{2x^2 + 4}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$

j) $f(x) = e^x$

e) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

k) $f(x) = \frac{10x^2 - 7x - 1}{2x^2 + 3x}$

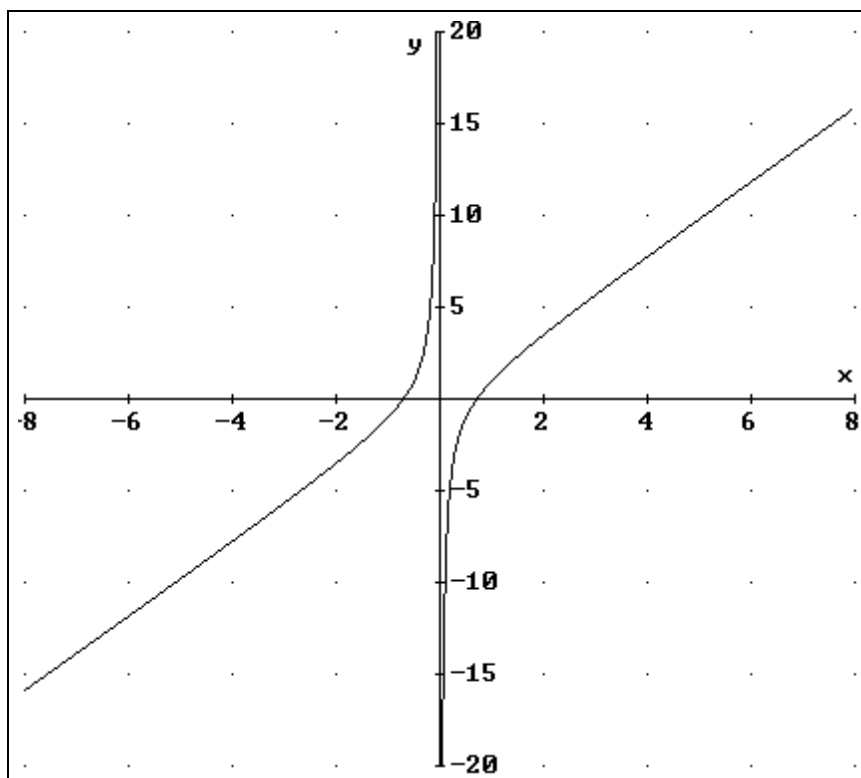
f) $f(x) = \frac{x^2}{8x + 15}$

l) $f(x) = 5 - \frac{4}{x^2 + 2}$

En algunes funcions tot i no tenir una asímptota horitzontal, si hi ha un comportament asimptòtic de la funció a l'infinit. Veiem un exemple:

B.4. Fes l'estudi del gràfic de la funció $y = 2x - \frac{1}{x}$ seguint els passos següents:

- Troba el domini de la funció. Calcula el límit en el punt de discontinuïtat.
- Calcula el límit a l'infinit. té asímptota horitzontal?
- A continuació tens el seu gràfic. Què pots dir del seu comportament a l'infinit? Segueix alguna funció? Quina seria la seva fórmula?. Pots explicar per què creus que es comporta així a l'infinit a partir de la fórmula inicial?



Veiem per tant que també pot haver-hi asímptotes inclinades o obliqües a l'infinit. El seu càlcul no és sempre tant fàcil com en aquesta funció. En general haurem de fer la divisió dels dos polinomis .

Exemple

Anem a fer l'estudi asimptòtic de la funció $y = \frac{2x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2}$

Per poder descompondre aquesta expressió en suma de dos dividirem els dos polinomis i escriurem el resultat :

$$y = \frac{2x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2} = \frac{(x^2 + 2)(2x + 1) - 1}{x^2 + 2} = 2x + 1 - \frac{1}{x^2 + 2}$$

Al estudiar el seu comportament a l'infinit observem que, com en l'altre cas, el quocient del final tendeix a zero i per tant hi haurà una asímptota obliqua que serà la recta $y = 2x + 1$

Ara bé, no sempre resulta fàcil fer la divisió. Per això també es pot calcular les asímptotes obliqües d'una funció d'una altra manera. Cal fer dos passos:

1) Calcular el **pendent** de l'asímtota amb la fórmula $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ja que el pendent d'una recta que passa per l'origen de coordenades ens ve donat pel quocient de la coordenada "y" i la coordenada "x" d'un punt qualssevol. Segons els valors de la **m** tindrem la següent classificació:

I) m és infinit

En aquest cas **no hi ha cap asímptota obliqua** i ja hem acabat

II) m és un valor finit.

Aleshores es fa necessari el càlcul de l'ordenada a l'origen d'aquesta direcció asimptòtica:

2) El càlcul de l'**ordenada a l'origen** és $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

Segons els valors de la **n** tindrem diverses solucions:

I) n és finit.

Aleshores tenim una **asímtota obliqua de fórmula $y = mx - n$**

Fixeu-vos que en el cas particular que la $m=0$ tenim l'asímtota horitzontal que ja havíem vist.

Exemple: $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$ $m = 1$ i $n = -3$

II) n és infinit i aleshores no hi ha asímptota. Direm simplement que la funció té direcció asimptòtica de pendent m

B.5. Estudia les asímptotes de les funcions:

a) $y = x^2$

f) $y = \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 1}$

b) $y = 3x + \frac{2}{x^2 - 1}$

g) $y = 3x + \sqrt{x + 1}$

c) $y = \frac{x^3 - 2x}{x^2}$

h) $y = \sqrt{3x^2 - 1}$

d) $y = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x + 3}$

i) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$

e) $y = \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 - 1}$

j) $y = x - \sin x$

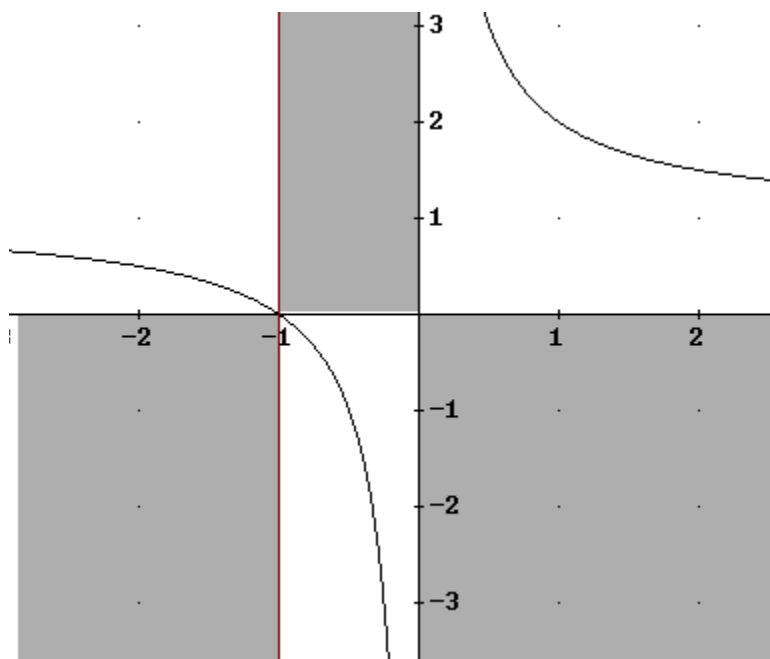
C Estudi i representació gràfica d'una funció

Havíem vist que al fer l'estudi del gràfic d'una funció, conèixer els seus punts de tall amb l'eix d'abscisses i fer el regionament del pla (estudi del signe de la funció), ens ajudava a tenir una idea de com podia ser el seu gràfic. A les funcions contínues perquè hi hagi un canvi de signe la funció ha de tallar l'eix d'abscisses, és a dir ha de tenir un zero.

En el cas dels polinomis només calia conèixer a més a més els màxims i/o mínims de la funció per poder fer un gràfic força aproximat .

C.1. Fes el regionament del pla de la funció $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Com creus que pot ser el seu gràfic?.

Però si la funció té punts de discontinuïtat o punts que no són del domini pot canviar el signe sense tallar l'eix. Per exemple a la funció $y = \frac{x+1}{x}$ El seu zero és $x = -1$ i per $x = 0$ té una discontinuïtat asimptòtica.



Per això en les funcions polinòmiques, que són contínues, només calia trobar els zeros per fer el regionament del pla. A les funcions que tenen discontinuïtats caldrà tenir en compte com a punts on la funció pot canviar de signe tant el zeros com els punt de discontinuïtat. Anem ara a veure què ens cal saber per tal de poder fer un gràfic aproximat en el cas de les funcions racionals.

C.2. Fes el gràfic aproximat de la funció $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 4}$ seguint els passos següents:

- Troba el domini de la funció. En el punt de discontinuïtat calcula el límit i interpreta el resultat.
- Troba els talls. Fes el regionament del pla tenint en compte tant els punts de tall com els punts de discontinuïtat.
- Fes l'estudi de les direccions asimptòtiques.
- Ara pots fer el gràfic a partir de les dades obtingudes.

Fixa't que amb els passos fets en l'exercici anterior podem fer un gràfic força aproximat de la funció que teníem. Així doncs, per a les funcions racionals només ens cal fer un estudi del signe de la funció i l'estudi asimptòtic per a fer un gràfic aproximat. Sempre, si es veu la necessitat, podem buscar també els màxims i/o mínims de la funció.

C.3. Fes l'estudi i la representació gràfica de les funcions següents seguint els passos de l'exercici anterior:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{3}{x^2} & \text{b) } y = \frac{2x-3}{x-1} & \text{c) } y = \frac{x^2-1}{2x} \\ \text{d) } y = \frac{-2}{x+1} & \text{e) } y = \frac{1}{x^2+1} & \end{array}$$

C.4. Estudia i representa seguint els passos necessaris, les funcions:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 4 - x^2 & \text{b) } y = \frac{x+2}{x-3} \\ \text{c) } y = x^4 - 3x^2 - 4 & \text{d) } y = \frac{1}{1-x^2} \\ \text{e) } y = \frac{x^2}{x^2-4} & \text{f) } y = x^4 - 3x^2 \\ \text{g) } y = \frac{2x}{1-x^2} & \text{h) } y = (x+2)^3 \end{array}$$