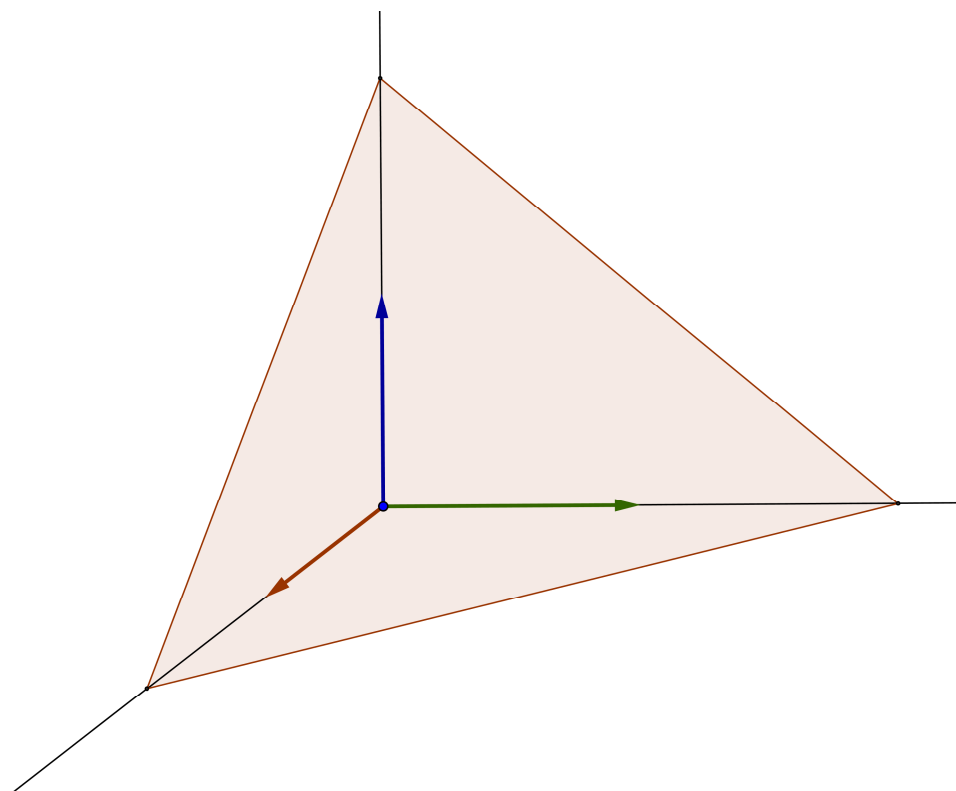


IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

Geometria de l'Espai



Batxillerat

A rectes, plans i vectors a l'espai

POSICIONS RELATIVES DE RECTES I PLANS

En la **geometria del pla** els objectes geomètrics fonamentals són els punts i les rectes. La relació fonamental entre les rectes és el paral·lisme. La posició relativa entre dues rectes diferents té dues possibilitats: dues rectes o bé es tallen en un punt o no es tallen. Si no es tallen diem que són paral·leles.

A l'**espai** els objectes fonamentals són els punts, les rectes i els plans. La relació entre aquests elements no es tant senzilla com en la geometria del pla. Comencem analitzant les posicions relatives de dos plans a l'espai, després ho farem en el cas d'un pla i una recta i finalment el cas més complex de dues rectes.

DOS PLANS:

Dos plans diferents poden estar en dues posicions relatives:

- **ES TALLEN en una recta** (tenen una recta en comú), o bé
- **no tenen cap punt en comú** i aleshores diem que **SÓN PARAL·LELS**.

El conjunt de plans paral·lels entre si determinen una **direcció plana**. Per això direm que dos plans paral·lels tenen la mateixa direcció.

UN PLA I UNA RECTA:

Una recta i un pla poden estar en tres posicions relatives diferents:

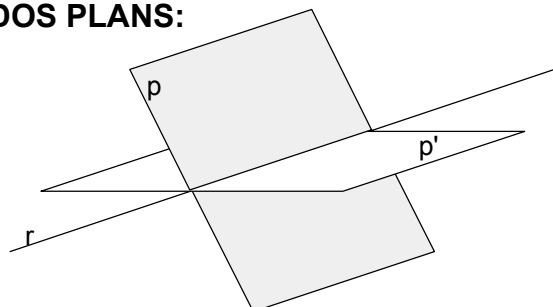
- **ES TALLEN en un punt** (tenen només un punt en comú)
- la **RECTA ESTÀ CONTINGUDA EN EL PLA** (tots els punts de la recta són també del pla).
- **no tenen cap punt en comú**. Aleshores diem que **LA RECTA ÉS PARAL·LELA AL PLA**.

DUES RECTES:

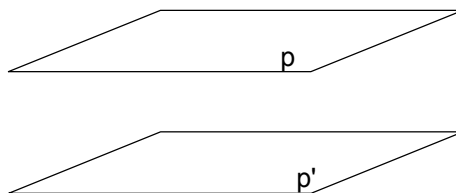
Dues rectes a l'espai es poden trobar en tres posicions relatives diferents:

- **estan contingudes en un mateix pla i tenen un punt en comú**.
Diem que **ES TALLEN**.
- **estan contingudes en un mateix pla i no es tallen**. Diem que **SÓN PARAL·LELES** i que tenen la mateixa direcció.
- si **no estan contingudes en un mateix pla** direm que les dues rectes **S'ENCREUEN**. Aleshores no tenen cap punt en comú i no són paral·leles.

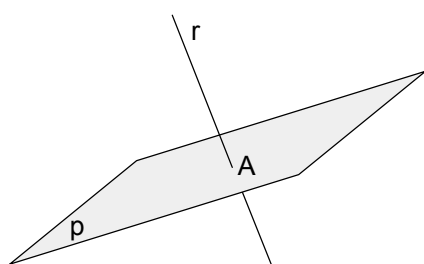
Observeu que a l'espai hem d'anar en compte a l'usar l'expressió encreuar-se perquè no significa el mateix que tallar-se. Quan dues rectes s'encreuen no tenen cap punt en comú.

DOS PLANS:

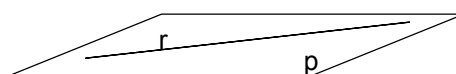
Els plans p i p' es tallen en la recta r



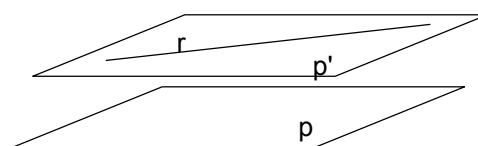
Els plans p i p' són paral·lels

UNA RECTA I UN PLA:

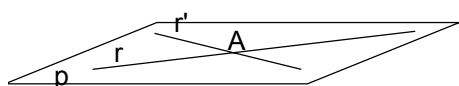
El pla p i la recta r es tallen en el punt A



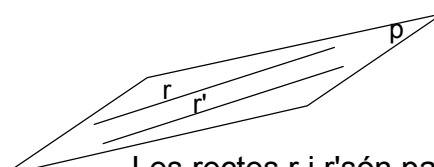
La recta r està continguda en el pla p



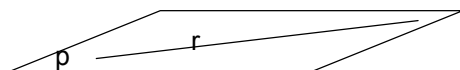
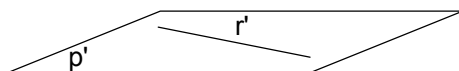
La recta r és paral·lela al pla p
El pla p' conté la recta r i és paral·lel al pla p

DUES RECTES:

Les rectes r i r' es tallen en el punt A
i estan contingudes en el pla p



Les rectes r i r' són paral·leles
i estan contingudes en el pla p



Les rectes r i r' s'encreuen
El pla p conté a r i és paral·lel a r'
El pla p' conté a r' i és paral·lel a r
Els dos plans p i p' són paral·lels

DIRECCIONS A L'ESPAI

En la geometria del pla totes les rectes paral·leles a una constitueixen una direcció. Per tant dues rectes paral·leles diem que tenen la mateixa direcció.

A l'espai una recta també determina una direcció recta que comparteix amb totes les rectes paral·leles a ella.

Un pla a l'espai determina una direcció plana que comparteix amb tots els plans paral·lels a ell.

Dues direccions rectes diferents determinen una única direcció plana: si les dues rectes que representen les direccions rectes es tallen, la direcció plana serà la del pla que les conté, i si les rectes s'encreuen, la direcció plana serà la d'un pla que conté una recta i és paral·lela a l'altra recta. En l'últim dibuix de la pàgina anterior les rectes r i r' que s'encreuen determinen una direcció plana que és la dels plans paral·lels p i p' .

Si una recta no talla a un pla, direm que la direcció de la recta està en la direcció del pla. Per tant si una recta està continguda en un pla, la direcció de la recta està en la direcció del pla. Però si una recta és paral·lela a un pla, també la direcció de la recta està en la direcció del pla. També és diu que la direcció del pla conté la direcció de la recta o que la direcció de la recta està continguda en la del pla.

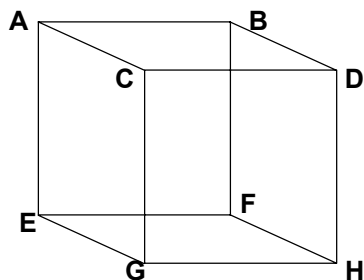
A.1

Digues si les afirmacions següents són certes o falses i raona les respostes.

- a) Sempre hi ha un únic pla que passa per dos punts.
- b) Sempre hi ha un únic pla que passa per tres punts.
- c) Sempre hi ha un únic pla que passa per quatre punts.

A.2

Observa el cub que està representat a la figura. Indica per cada apartat dos exemples de rectes i plans determinats pels vèrtexs del cub que estiguin en les condicions que s'indiquen:



- a) Dos plans paral·lels.
- b) Dos plans que es tallin.
- c) Una recta paral·lela a un pla.
- d) Una recta continguda en un pla.
- e) Una recta que talli a un pla.
- f) Dues rectes paral·leles.
- g) Dues rectes que es tallin.
- h) Dues rectes que s'encreuin.

A.3

Continuem amb el cub de l'exercici anterior. Contesta raonadament les preguntes següents:

- Quantes direccions rectes determinen les rectes que contenen les arestes del cub?
- Quantes direccions planes determinen els plans que contenen les cares del cub?

VECTORS A L'ESPai

Tal com en el pla, per organitzar l'espai podem considerar fletxes i vectors.

Així tindrem que:

- una fletxa és un segment orientat, és a dir determinat per dos punts un dels quals és el punt inicial i l'altre el punt final.
- dues fletxes són equipol·lents si tenen la mateixa longitud, la mateixa direcció i el mateix sentit.
- el conjunt de totes les fletxes que són equipol·lents entre sí és un vector. Per tant un vector ve caracteritzat per una longitud una direcció i un sentit. Qualsevol de les fletxes que constitueixen un vector direm que és un representant del vector.
- Els vector els podem sumar i multiplicar-los per un nombre (escalar). La suma i el producte per un escalar tenen les mateixes propietats que en el pla.
- També podem traslladar punts mitjançant vectors i ho indicarem com en el pla amb el símbol de la suma:

$$P = Q + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP}$$

EXPRESSIÓ VECTORIAL D'UNA RECTA

- Si tenim un punt P i el traslladem mitjançant tots els múltiples d'un vector $\vec{v}$ obtindrem un conjunt de punts que formaran una recta que tindrà per direcció el vector "director " $\vec{v}$. L'expressió vectorial del conjunt de punts Q d'aquesta recta serà:

$$Q = P + k \vec{v} \quad \text{on } k \in \mathbb{R} \text{ és un escalar qualsevol.}$$

Els vectors múltiples d'un vector $\vec{v}$, o sigui els vectors $k \vec{v}$ que estan en la direcció de la recta direm que són una **combinació lineal del vector** $\vec{v}$. Per tant podem dir que:

Els punts d'una recta s'obtenen al traslladar un punt de la mateixa mitjançant totes les combinacions lineals d'un vector de la direcció de la recta.

VECTORS LINEALMENT DEPENDENTS I VECTORS LINEALMENT INDEPENDENTS

En les definicions que donarem a continuació hem de considerar que els vectors són sempre diferents del vector zero.

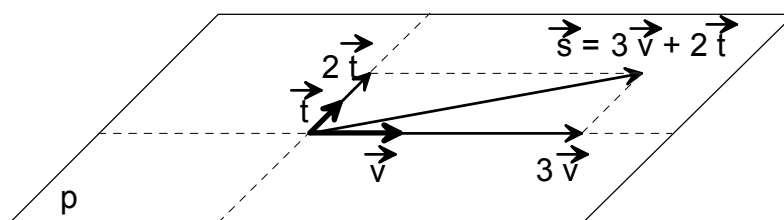
Dos vectors direm que són linealment dependents si els dos vectors tenen la mateixa direcció, és a dir si, si les rectes que contenen les fletxes que els representen són paral·leles o coincidents. Podríem dir també si un d'ells és múltiple de l'altre.

En cas contrari, dos vectors no linealment dependents, direm que són linealment independents. Si representem dos vectors independents amb fletxes amb origen comú, ens determinen un pla que conté les dues fletxes. Està clar que si agaféssim dos altres fletxes també amb origen comú representants dels mateixos vectors, en determinarien un altre pla paral·lel a l'anterior. Per tant **dos vectors independents determinen una direcció plana**.

Si sumem els múltiples de d'uns vectors obtenim el que en direm una **combinació lineal d'aquests vectors**. Així una combinació lineal dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$ serà un vector del tipus $a\vec{v} + b\vec{t}$.

Si tenim dos vectors linealment independents i que per tant ens determinen una direcció plana, les combinacions lineals d'aquests vectors seran vectors que estaran en aquesta direcció plana. És a dir la suma de vectors que estan en un pla està en el mateix pla.

Però a la vegada, si considerem dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$ linealment independents representats per fletxes amb origen comú (mireu el dibuix següent) que ens determinen el pla p , qualsevol vector $\vec{s}$ que es pugui representar en aquest pla serà una combinació lineal dels dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$. Per això es diu que els vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$ generen tots els vectors de la direcció plana que determinen.



En general direm que **uns vectors són linealment dependents si un d'ells és combinació lineal dels altres**. Així a la figura anterior els vectors $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{s}$ són linealment dependents, perquè un d'ells és combinació dels altres dos. Per tant tres vectors linealment dependents estan en la mateixa direcció plana.

EXPRESSIÓ VECTORIAL D'UN PLA

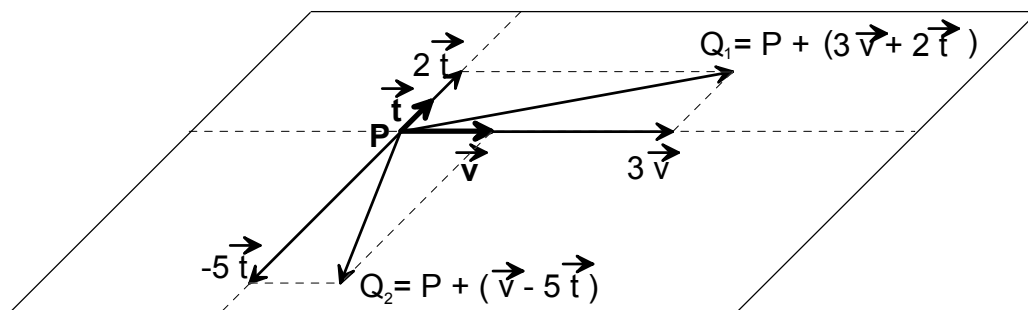
Si tenim un punt P i el traslladem mitjançant tots els vectors d'una direcció plana obtindrem un conjunt de punts que formaran un pla. Com que una direcció plana està formada per les combinacions lineals de dos vectors linealment independents, tindrem que l'expressió vectorial dels punts d'un pla que passa pel punt P i té la direcció dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$ serà:

$$Q = P + (k\vec{v} + m\vec{t}) \quad \text{on } k, m \in \mathbb{R} \text{ són escalars}$$

Els vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$ direm que són vectors directores del pla. (Vegeu el dibuix següent)

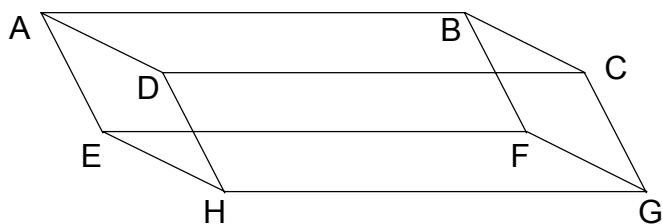
Podem dir que els punts d'un pla s'obtenen al traslladar un punt del pla mitjançant totes les combinacions lineals de dos vectors linealment independents de la direcció del pla.

Observeu que l'expressió vectorial d'un pla, com la d'una recta no és única: El punt P pot ser un altre punt del pla i els vectors directores poden ser dos vectors qualssevol, linealment independents, en la direcció del pla.



A.4

Dibuixa sobre del paral·lelepípede de la figura següent els vectors representats per les fletxes que s'indiquen en cada cas i contesta raonadament si els conjunts de vectors que s'indiquen són linealment dependents o independents.



- a) $\overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{EH}$ b) $\overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{GF}$ c) $\overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{DG}$ f) $\overrightarrow{DB} \text{ i } \overrightarrow{FH}$
 g) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{AE}$ h) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ i } \overrightarrow{AD}$ i) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG} \text{ i } \overrightarrow{AD}$ j) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ i } \overrightarrow{AH}$

A.5

Continuem amb el paral·lelepípede de l'exercici anterior. Escribeu dues expressions vectorials diferents (amb el punt de referència i vectors directores diferents) dels plans següents:

- El pla que conté la cara superior.
- El pla que conté la cara lateral dreta.
- El pla que talla el paral·lelepípede segons el paral·lelogram ADFG.

B coordenades a l'espai

Com en la geometria del pla, per poder aritmetitzar l'espai, és a dir poder manejar els punts amb nombres, s'ha d'establir un sistema de referència de coordenades.

Per establir un sistema de referència cal:

- Fixar un punt, que en direm l'**origen de coordenades**.
- Donar tres direccions linealment independents i un sentit en cadascuna d'elles. Hem dit que les direccions han de ser linealment independents, la qual cosa significa que els eixos no poden ser coplanaris és a dir no poden estar en un mateix pla. Aquestes direccions les visualitzem dibuixant tres rectes que passin per l'origen de coordenades. Són els **eixos de coordenades**. Les tres direccions s'acostumen a agafar perpendiculars i en direm **l'eix X, l'eix Y i l'eix Z**.
- Establir una unitat de longitud en cada direcció. És el que en diem agafar **una escala a cada eix**.

Tindrem per tant tres plans de referència que contenen dos dels eixos de coordenades: el pla XY, el pla XZ i el pla YZ. Les coordenades (a, b, c) d'un punt P seran els valors corresponents en l'escala de cada eix dels vèrtexs d'un paral·lel·lepipèdrec que té l'origen de coordenades i el punt P com a vèrtexs oposats i tres de les seves cares estan sobre els tres plans de referència.

EQUACIONS DELS EIXOS I DELS PLANS QUE ELS CONTENEN

Tot i que més endavant a partir d'un tractament vectorial trobarem les equacions cartesianes de les rectes i els plans de l'espai, podem ja veure quines són les equacions dels eixos de coordenades i dels plans que els contenen:

equacions de l'eix X: els punts d'aquest eix són del tipus (a, 0, 0) $a \in \mathbb{R}$, per tant han de complir les dues equacions:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

de la mateixa manera tindrem les equacions dels altres dos eixos:

equacions de l'eix Y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

equacions de l'eix Z:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Observeu que una recta a l'espai ve donada per un sistema de dues equacions cartesianes amb tres incògnites compatible indeterminat amb un grau de llibertat: hi ha una incògnita que pot valer qualsevol nombre.

equació del pla XY: els punts d'aquest pla són del tipus $(a, b, 0)$, per tant han de complir l'equació:

$$z = 0$$

de la mateixa manera tindrem:

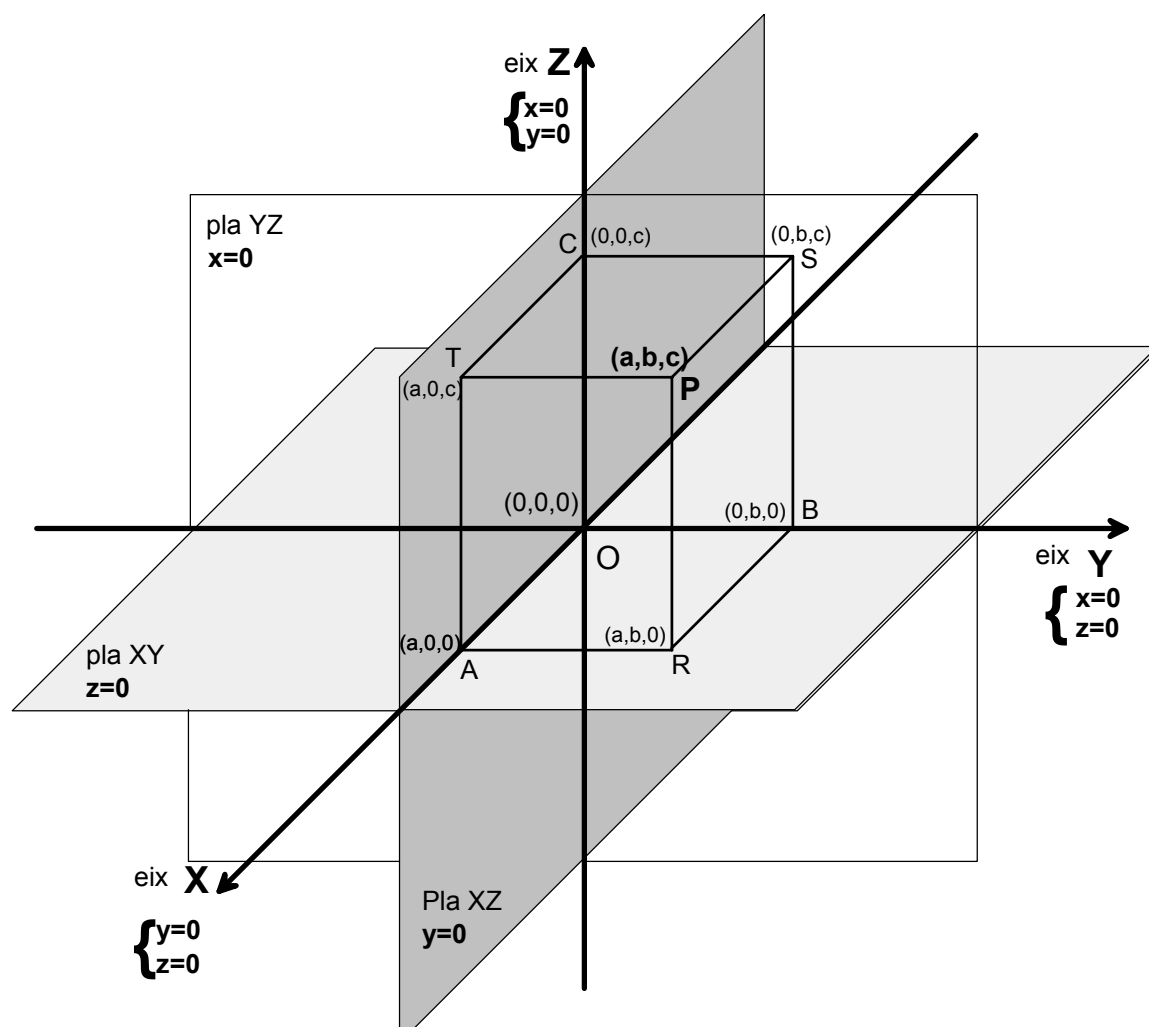
equació del pla XZ:

$$y = 0$$

equació del pla YZ:

$$x = 0$$

Observeu que un pla ve donat per una sola equació cartesiana. Si considerem les tres incògnites x , y i z , cada pla ve donat per una equació amb tres incògnites compatible indeterminada amb dos graus de llibertat.



REPRESENTACIÓ D'UN PUNT EN UN SISTEMA DE COORDENADES

El dibuix de l'espai i els seus elements sobre d'un pla comporta una representació en perspectiva. Tot i que la perspectiva no és objecte d'estudi d'aquesta matèria, val la pena tenir en compte algunes consideracions per tal de poder fer representacions de l'espai amb un sistema de referència.

- ♦ En primer lloc caldrà dibuixar els dos eixos situats en el pla del dibuix. En matemàtiques s'acostuma a agafar el pla del dibuix com a pla YZ, de manera que l'eix que en la geometria del pla era l'X ara serà l'Y i el que era l'eix Y serà el Z. Els sentits positius s'agafen com en la geometria del pla. A continuació podem graduar cada eix amb una escala apropiada a les coordenades dels punts que haurem de representar
- ♦ L'eix X, perpendicular al pla del dibuix, caldrà dibuixar-lo en perspectiva. El sentit positiu serà cap endavant. Per graduar l'eix hem de tenir en compte que si volem agafar la mateixa unitat que als altres dos eixos, en perspectiva haurem de dibuixar aquesta unitat més petita.

Per representar un punt P de coordenades (a, b, c) , haurem de seguir els passos següents:

- ◆ Representarem sobre l'eix X el punt $A(a, 0, 0)$, sobre de l' Y el $B(0, b, 0)$ i sobre del Z el $C(0, 0, c)$.
- ◆ Dibuixarem tres rectangles, un sobre cada pla de referència, traçant segments paral·lels als eixos pels punts A, B i C . Així obtindrem el punt $R(a, b, 0)$ al pla XY , el punt $T(a, 0, c)$ al pla XZ i el punt $S(0, b, c)$ al pla YZ . Observeu que els rectangles $OATC$ i $OARB$ en perspectiva es dibuixen com dos paral·lelograms.

Aquests rectangles ens determinen les tres cares del paral·lelepípede que té per vèrtex oposat al $O(0, 0, 0)$ el punt $P(a, b, c)$

- ◆ Completarem el paral·lelepípede traçant des dels punts abans dibuixats R, S i T situats als plans de referència, segments paral·lels a l'altre eix, o sigui el que no està contingut en el pla. D'aquesta manera obtindrem el vèrtex P que ens falta que tindrà per coordenades (a, b, c) .
- ◆ En cas que el punt tingui alguna de les seves coordenades igual a 0, aleshores estarà en un dels eixos o en un dels plans de referència i no ens caldrà construir el paral·lelepípede.

Observa que així com en la geometria del pla els eixos de coordenades ens determinaven quatre quadrants els punts dels quals venien caracteritzats pel signe de les seves coordenades, a l'**espai els plans de referència el divideixen en vuit regions**, les quals també venen caracteritzades pel signe de les coordenades dels seus punts: si dos punts tenen les coordenades amb el mateix signe estaran a la mateixa regió.

B.1 Dibuixa un sistema de referència i representa-hi els punts següents:

$A: (0, 4, 0)$; $B: (-2, 0, 0)$; $C: (3, -2, 0)$; $D: (-4, 0, -5)$ i $E: (0, -1, 4)$

B.2 Dibuixa un sistema de referència i representa-hi els punts:

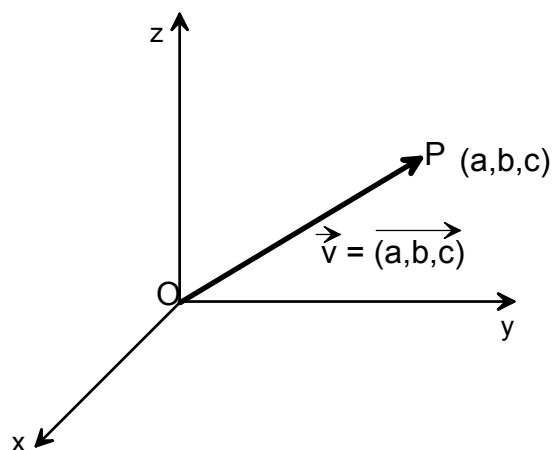
$F: (3, 2, 5)$ i $G: (4, -6, -3)$

B.3 Dibuixa un sistema de referència i representa-hi els punts:

$F: (-2, 3, 5)$ i $G: (-4, -5, -6)$

COMPONENTS D'UN VECTOR

Les components d'un vector $\vec{v}$ són les coordenades del punt P tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ essent el punt O: (0,0,0) l'origen de coordenades.



Si P : (a,b,c) coordenades del punt, aleshores $\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ components del vector.

Les components d'un vector les expressarem en fila i no en columna com ho fèiem en la geometria del pla. O sigui que els punts i els vectors els expressarem de la mateixa manera mitjançant tres nombres ordenats i per tant caldrà no confondre els punts amb els vectors.

De la mateixa manera que en la geometria del pla tindrem que per obtenir les components d'un vector a partir de les coordenades dels extrems de la fletxa que el representa:

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0) (x_1, y_1, z_1)} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

Per obtenir les coordenades d'un punt traslladat per un vector:

$$(x_0, y_0, z_0) + \overrightarrow{(a, b, c)} = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$$

A l'hora d'expressar aquestes relacions cal anar en compte perquè així com podem "sumar" a un punt un vector perquè significa "traslladar-lo", **no té sentit rigorós restar punts**. Per tant encara que a la pràctica direm que :

Coord. PUNT FINAL – coord. PUNT INICIAL = comp. VECTOR

a l'hora d'expressar-ho restarem les coordenades però no indicarem una resta de punts.

Suma i producte per un escalar de vectors en components:

Com en la geometria del pla:

$$\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)} + \overrightarrow{(b_1, b_2, b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}$$

$$k \overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)} = \overrightarrow{(ka_1, ka_2, ka_3)}$$

Coordenades del punt mitjà d'un segment:

Com en la geometria del pla si

$$A = (x_0, y_0, z_0) \text{ i } B = (x_1, y_1, z_1)$$

les coordenades del punt mitjà del segment AB són:

$$M_{AB} = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$

B.4

Completa la taula següent:

PUNT INICIAL	PUNT FINAL	COMPONENTS DEL VECTOR
(4, 3, 7)	(9, 6, 7)	
(-1, 4, -5)	(1, -5, -2)	
(0, -2, 4)		(-3, 2, -1)
	(8, -4, 1)	(2, -5, 3)
(10, 6, -7)	(5, 2, -6)	
	(1, 1, -1)	(2, 0, 4)
(1/2, 3/2, -2/3)		(1/2, -1/2, 3/2)

B.5

Donats els punts A:(1, -3, 2); B:(1, -1, 1); C:(0,5,-2). Troba:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

c) El punt mitjà del segment AB.

C equacions de rectes i plans

EQUACIÓ VECTORIAL D'UNA RECTA

L'expressió vectorial d'una recta que passa pel punt P i té vector director $\vec{v}$ és:

$$Q = P + \vec{v}$$

I en coordenades i components tindrem:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(a, b, c) \quad \text{equació vectorial de la recta, on}$$

(x, y, z) és un punt de la recta

(x_0, y_0, z_0) és el punt donat de la recta

+ significa traslladar

(a, b, c) és un vector director de la recta

$k \in \mathbb{R}$ és el **paràmetre**: un escalar qualsevol.

Si donem valors a k en l'equació vectorial obtindrem punts de la recta.

Podem escriure moltes equacions vectorials diferents d'una mateixa recta perquè podem agafar qualsevol punt de la recta com a punt inicial i qualsevol vector director.

EQUACIONS PARAMÈTRIQUES D'UNA RECTA

De l'equació vectorial d'una recta:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(a, b, c)$$

tindrem:

$$(x, y, z) = (x_0 + ka, y_0 + kb, z_0 + kc) \text{ i d'aquí:}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \quad \text{equacions paramètriques de la recta que}$$

passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vector director (a, b, c) . Donant valors al paràmetre k obtindrem les coordenades (x, y, z) dels punts de la recta.

EQUACIÓ CARTESIANA CONTÍNUA

Si una recta té equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = x_0 + k a \\ y = y_0 + k b \\ z = z_0 + k c \end{cases}$$

un punt (x, y, z) serà de la recta si i només si hi ha un valor del paràmetre k per al qual obtinguem el punt en les equacions paramètriques. És a dir aïllem el paràmetre en les tres equacions:

$$k = \frac{x - x_0}{a}, \quad k = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{i} \quad k = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{suposem } a, b, c \neq 0)$$

el punt (x, y, z) serà de la recta si les tres expressions són iguals:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{equació cartesiana contínua de la}$$

recta que passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vector director (a, b, c) . En direm equació cartesiana perquè és una relació algebraica que compleixen les coordenades (x, y, z) .

L'equació contínua d'una recta no és única: depèn del punt de la recta que escollim i del vector director.

Tot i que en diem equació cartesiana contínua, de fet es tracta d'una relació d'igualtat entre tres expressions que es tradueix en un sistema de **dues equacions cartesianes**.

Una recta a l'espai ve donada pels punts que són solució d'un sistema lineal de dues equacions amb tres incògnites. Més endavant veurem que cada equació és un pla i que per tant la solució del sistema ens dona la recta com a intersecció de dos plans.

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

Però hauríem pogut igualar la primera expressió amb la segona i la primera amb la tercera, o també la primera amb la tercera i la segona amb la tercera. Tindríem per tant tres sistemes de dues equacions equivalents la solució dels quals és la mateixa recta.

Si alguna de les components del vector director és nul·la es tractarà d'una recta paral·lela a un dels plans que contenen els eixos de coordenades. En aquest cas, tot i que a vegades es fa, no té sentit, escriure l'equació cartesiana contínua. La recta es

troba en un pla paral·lel a un dels plans de referència i l'equació cartesiana d'aquest pla és l'equació paramètrica que no depèn del paràmetre.

EXEMPLE 1. Recta que passa pels punts A:(2, -1, 3) i B:(1, 4, -1)

El vector director: $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) - (1, 4, -1) = (-1, 5, -4)$

Equació vectorial: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + k(-1, 5, -4)$

Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + 5k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$$

Equació cartesiana contínua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-4}$

Recta expressada com a intersecció de dos plans (sistema de dues equacions):

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} \\ \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-4} \end{cases} \quad \text{i desenvolupant les equacions} \quad \begin{cases} 5x + y = 9 \\ -4y - 5z = -11 \end{cases}$$

Però també podríem expressar-la com les solucions dels sistemes:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} \\ \frac{x-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \end{cases} \quad \text{o bé :} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \\ \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-4} \end{cases}$$

Si ens donen una recta com a intersecció de dos plans podem trobar les equacions paramètriques resolent el sistema, que serà compatible indeterminat, en funció d'un paràmetre, o bé trobant dos punts qualsevol de la recta i a partir d'ells el vector director.

EXEMPLE 2. Recta que passa pel punt A:(3, 0, 2) i té vector director $\vec{v} = (-2, 1, 0)$

Equació vectorial: $(x, y, z) = (3, 0, 2) + k(-2, 1, 0)$

Equacions paramètriques
$$\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$$

L'última equació no depèn del paràmetre perquè correspon a la component 0 del vector director i ja és una equació cartesiana. No podem escriure l'equació contínua perquè tindriem una divisió per 0. Aïllant el paràmetre en les altres dues equacions i igualant tindrem un sistema que expressarà la recta com intersecció de dos plans. Un d'ells és el pla $z = 2$, pla paral·lel al pla de referència $z = 0$ que conté els eixos de coordenades X i Y.

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{i desenvolupant la primera equació} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

EXEMPLE 3. Recta paral·lela a l'eix Z que passa pel punt (-4, 1, 3).

Equació vectorial: $(x, y, z) = (-4, 1, 3) + k(0, 0, 1)$

$$\text{Equacions paramètriques: } \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = 3 + k \end{cases}$$

La recta és la intersecció de dos plans paral·lels als plans de referència $x=0$ i $y=0$:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

EQUACIÓ VECTORIAL D'UN PLA

L'expressió vectorial d'un pla que passa pel punt P i té vectors directors $\vec{v}$, $\vec{t}$ és:

$$Q = P + (k\vec{v} + m\vec{t})$$

I en coordenades i components tindrem l'**equació vectorial del pla**:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + [k(a_1, b_1, c_1) + m(a_2, b_2, c_2)] \text{ on:}$$

(x, y, z) és un punt del pla

(x_0, y_0, z_0) és el punt donat del pla

el primer + significa traslladar i el segon + la suma de dos vectors

(a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) són dos vectors directores del pla independents

$k, m \in \mathbb{R}$ són els **paràmetres**: escalars qualssevol.

Si donem valors als paràmetres k i m obtindrem punts del pla.

Podem escriure moltes equacions vectorials diferents d'un mateix pla perquè podem agafar qualsevol punt del pla com a punt inicial i qualsevol parella de vectors linealment independents en la direcció del pla.

EQUACIONS PARAMÈTRIQUES D'UN PLA

De l'equació vectorial d'un pla:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + [k(a_1, b_1, c_1) + m(a_2, b_2, c_2)]$$

tindrem:

$$(x, y, z) = (x_0 + ka_1 + ma_2, y_0 + kb_1 + mb_2, z_0 + kc_1 + mc_2) \quad \text{i d'aquí:}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ka_1 + ma_2 \\ y = y_0 + kb_1 + mb_2 \\ z = z_0 + kc_1 + mc_2 \end{cases} \quad \text{equacions paramètriques del pla que}$$

passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vectors directores (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) . Donant valors als paràmetres k i m obtindrem les coordenades (x, y, z) dels punts del pla.

EQUACIÓ CARTESIANA D'UN PLA

Si un pla té equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = x_0 + ka_1 + ma_2 \\ y = y_0 + kb_1 + mb_2 \\ z = z_0 + kc_1 + mc_2 \end{cases}$$

un punt (x, y, z) serà del pla si i només si es pot trobar un valor del paràmetre k i un valor del paràmetre m per els quals obtinguem el punt en les equacions paramètriques. És a dir el sistema de tres equacions i **dues incògnites k i m** obtingut a partir de les equacions paramètriques:

$$\begin{cases} a_1k + a_2m = x - x_0 \\ b_1k + b_2m = y - y_0 \\ c_1k + c_2m = z - z_0 \end{cases}$$

tindrà solució si i només si el punt (x, y, z) és del pla. El sistema ha de ser compatible i per tant una de les equacions ha de ser combinació lineal de les altres, o sigui el rang de la matriu ampliada del sistema no pot ser tres. Això es tradueix en que el determinant de la matriu ampliada ha de ser zero. Per tant la condició per tal que el punt (x, y, z) sigui del pla és que:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i desenvolupant el determinant obtindrem}$$

l'equació cartesiana del pla que passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vectors directores (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) . Aquesta equació tindrà una forma del tipus:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{equació cartesiana general del pla.}$$

Per tant **un pla a l'espai ve donat pels punts que són solució d'una equació lineal amb tres incògnites x, y i z** . Una equació d'aquest tipus, amb algun dels coeficients A, B o C diferents de zero, és compatible indeterminada amb dos graus de llibertat. L'expressió de les solucions en funció dels dos paràmetres ens donarà unes equacions paramètriques del pla.

La justificació que l'expressió:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

és la condició que ens dona l'equació del pla és pot veure d'una manera més geomètrica si tenim en compte que perquè un punt (x, y, z) pertanyi al pla, el vector:

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

ha de ser un vector en la direcció del pla, per tant ha de ser combinació lineal dels dos vectors directores del pla (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) . Per tant el determinant dels tres vectors

ha de ser zero. I recíprocament, si el determinant és zero aleshores el vector: $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ serà combinació lineal dels dos vectors directores i per tant el punt (x, y, z) serà un punt del pla.

EXEMPLE 4. Pla que passa pels punts A: (2, -3, -3), B: (1, -1, 0) i C: (2, 2, -4).

Tres punts no alineats determinen un únic pla que els conté. La direcció la podem considerar donada per qualsevol parella de vectors entre dos dels punts. Per exemple:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, -3) - (1, -1, 0) = (-1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, -3, -3) - (2, 2, -4) = (0, 5, -1)$$

Agafant com a punt inicial un dels tres punts, per exemple l'A, tindrem una equació vectorial del pla:

$$(x, y, z) = (2, -3, -3) + k(-1, 2, 3) + m(0, 5, -1)$$

Aquesta equació no és única perquè agafant com a punt inicial un altre punt del pla i com a vectors directores dos altres vectors en la direcció del pla tindríem una altra equació vectorial del mateix pla.

$$\text{Unes equacions paramètriques del pla seran: } \begin{cases} x = 2 - k \\ y = -3 + 2k + 5m \\ z = -3 + 3k - m \end{cases}$$

$$\text{I l'equació cartesiana: } \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ y+3 & 2 & 5 \\ z+3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i desenvolupant el determinant per la}$$

primera columna:

$$\begin{aligned} (x-2) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &= -17(x-2) - (y+3) - 5(z+3) = \\ &= -17x - y - 5z + 16 = 0 \end{aligned}$$

i multiplicant tota l'equació per -1:

$$17x + y + 5z - 16 = 0 \quad \text{tindrem una equació cartesiana del pla.}$$

Podem comprovar que és correcte mirant si els tres punts A, B i C compleixen l'equació:

$$\text{Comprovació del punt A: } 17(2) + (-3) + 5(-3) - 16 = 34 - 3 - 15 - 16 = 0$$

$$\therefore \text{Comprovació del punt B: } 17(1) + (-1) + 5(0) - 16 = 17 - 1 - 16 = 0$$

$$\text{Comprovació del punt C: } 17(2) + (2) + 5(-4) - 16 = 34 + 2 - 20 - 16 = 0$$

Si a partir d'aquesta equació cartesiana del pla volem trobar una equació vectorial, ho podem fer de dues maneres. O bé buscant primer tres punts del pla no alineats i a partir d'ells calcular les components de dos vectors directores, o bé resolent l'equació de manera que l'expressió de les solucions en funció de dos paràmetres seran unes paramètriques del pla i d'aquí podrem trobar un punt i els vectors directores. Vegem-ho:

Per trobar l'equació vectorial del pla a partir de l'equació cartesiana trobant tres punts del pla:

Podem buscar les interseccions amb els eixos de coordenades podríem trobar altres punts donant un valor qualsevol a dues variables i aïllant el valor de l'altra):

Per $x=0$ i $y=0$ tindrem $z=16/5$: punt $(0, 0, 16/5)$

Per $x=0$ i $z=0$ tindrem $y=16$: punt $(0, 16, 0)$

Per $y=0$ i $z=0$ tindrem $x=16/17$: punt $(16/17, 0, 0)$

Dos vectors directores del pla seran:

$$\overrightarrow{(0, 0, \frac{16}{5})(0, 16, 0)} = (0, 16, -\frac{16}{5}) \quad , \text{ o bé, multiplicant per } \frac{5}{16} \text{ tindrem } (0, 5, -1)$$

$$\overrightarrow{(0, 0, \frac{16}{5})(\frac{16}{17}, 0, 0)} = (\frac{16}{17}, 0, -\frac{16}{5}) \quad , \text{ o bé, multiplicant per } \frac{17 \cdot 5}{16} \text{ tindrem } (5, 0, -17)$$

I d'aquí l'equació vectorial del pla :

$$(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(0, 5, -1) + m(5, 0, -17)$$

Observeu que els vectors directores que aquí hem considerat no són els mateixos que els de l'equació vectorial que hem escrit abans.

Per trobar les paramètriques a partir de l'equació cartesiana:

A partir de l'equació cartesiana $17x + y + 5z - 16 = 0$ podem expressar les solucions de l'equació en funció de dos paràmetres, per exemple x i z :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 16 - 17x - 5z \\ z = z \end{cases} \quad \text{que són unes paramètriques del pla:}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = 16 - 17k - 5m \\ z = m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{R}$$

I d'aquí una altra equació vectorial del pla:

$$(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(1, -17, 0) + m(0, -5, 1)$$

C.1

- Trobeu les equacions vectorial, paramètriques i cartesiana contínua d'una recta que passa pel punt $(0, 1, 2)$ i té la direcció del vector $(-1, 2, 3)$.
- Expresseu la recta anterior com a intersecció de dos plans.

C.2 Expresseu les tres rectes següents com a intersecció de dos plans:

- $(x, y, z) = (1, 2, -5) + k(1, 1, 3)$
- $(x, y, z) = (1, 2, -5) + k(0, 1, 2)$
- $(x, y, z) = (1, 2, -5) + k(1, 0, 0)$

C.3 Trobeu una equació vectorial i expresseu com a intersecció de dos plans les rectes:

- a) Recta que passa pels punts $(3, -2, 0)$ i $(-3, 1, -4)$
- b) Recta que passa pel punt $(1, 5, 2)$ i és paral·lela a l'eix Y.
- c) Recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta que conté els punts $(1, 1, 1)$ i $(2, -3, 4)$

C.4 Trobeu una equació vectorial de les rectes següents:

a) $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{4}$

b) $\begin{cases} x = 7 - 3m \\ y = 5m \\ z = -2 + m \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -6 \\ \frac{x+3}{2} = \frac{z-7}{-3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 9 \\ x = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

C.5 Trobeu l'equació d'una recta que passa pel punt $(1, 0, 4)$ i és paral·lela a la recta:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2z \end{cases}$$

C.6 Trobeu l'equació vectorial, paramètriques i cartesiana d'un pla que passa pel punt $(-1, 0, 3)$ i té direcció determinada pels vectors $(1, -1, 3)$ i $(4, 0, -1)$.

C.7 Trobeu una equació vectorial i l'equació cartesiana d'un pla que passa pels punts $(1, 1, 2)$, $(0, -1, 3)$ i $(3, -1, 1)$.

C.8 Trobeu l'equació (cartesiana) d'un pla que passa pel punt $(0, -2, 1)$ i és paral·lel al pla que conté els eixos X i Y.

C.9 Trobeu l'equació (cartesiana) d'un pla que passa per $(1, 0, 1)$ i conté la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

C.10 Trobeu el pla que passa pel punt $(1, -1, 4)$ i és paral·lel a les rectes:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$$

D posicions relatives de rectes i plans

Per establir la posició relativa dels objectes geomètrics de l'espai a partir de les seves equacions caldrà fer un estudi dels seus possibles punts comuns i les seves direccions. Per això caldrà discutir i resoldre equacions o sistemes d'equacions i interpretar-ne les solucions. Ho podrem fer a partir de les equacions cartesianes o bé a partir de les paramètriques.

Si ho fem a partir de les equacions cartesianes tindrem tres incògnites x , y i z . Podem dir en general que al discutir el sistema es poden donar els següents casos: sistema compatible o incompatible. En el cas que sigui compatible, pot ser determinat o indeterminat, i en aquest cas pot tenir un o dos graus de llibertat. Segons això tindrem:

- Si un sistema **d'equacions cartesianes** és **compatible determinat**, la solució del sistema són les coordenades d' **UN PUNT**.

És a dir els elements geomètrics donats per les equacions del sistema es tallen en un únic punt comú.

- Si un sistema **d'equacions cartesianes** és **compatible indeterminat amb un grau de llibertat**, el conjunt de punts solució és **UNA RECTA**.

L'expressió de les solucions en funció del paràmetre seran les equacions paramètriques de la recta.

En aquest cas els elements geomètrics donats per les equacions del sistema es tallen o tenen els seus punts comuns en una recta.

- Si un sistema (o una sola equació) **d'equacions cartesianes** és **compatible indeterminat amb dos graus de llibertat**, el conjunt de punts solució és **UN PLA**.

L'expressió de les solucions en funció dels dos paràmetres seran les equacions paramètriques del pla.

Per tant les equacions són equivalents i el sistema serà equivalent a una sola de les equacions: l'equació cartesiana del pla solució

- Si un sistema **d'equacions cartesianes** és **incompatible**, els elements geomètrics no tenen cap punt en comú. Caldrà analitzar-los per tal d'establir la seva posició relativa.

A continuació estudiarem els diferents casos que es poden donar amb indicació de les diferents posicions relatives. Cal tenir present que a vegades pot ser més convenient treballar amb les equacions paramètriques, que no pas amb les cartesianes de les rectes o plans .

Quan tinguem un sistema d'equacions lineals, i per tal de fer-ne la discussió, considerarem que **M és la matriu dels coeficients del sistema** o matriu del sistema i **MA és la matriu ampliada amb els termes independents**.

POSICIONS RELATIVES DE DOS PLANS

equacions cartesianes:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{sistema de dues equacions i tres incògnites.}$$

- $\text{rg } M = 2$ comp. indet. 1 g. II. dos plans es tallen en una recta.
- $\text{rg } M = 1$ $\text{rg } MA = 2$ incompatible dos plans paral·lels.
- $\text{rg } M = 1$ $\text{rg } MA = 1$ comp. indet. 2 g. II. són el mateix pla.

POSICIONS RELATIVES D'UNA RECTA I UN PLA

equacions cartesianes:

$$\begin{cases} \text{recta} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \\ \text{pla} \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \text{sistema de tres equacions i tres incògnites.}$$

- $\text{rg } M = 3$ comp. det. recta i pla es tallen en un punt.
- $\text{rg } M = 2$ $\text{rg } MA = 3$ incompatible recta paral·lela al pla.
- $\text{rg } M = 2$ $\text{rg } MA = 2$ comp. indet. 1 g. II. recta continguda al pla.

equacions paramètriques de la recta i cartesiana del pla:

Si la recta ens ve donada per la seva equació vectorial, i per tant podem escriure les seves paramètriques, pot ser **més senzill substituir les equacions paramètriques en l'equació cartesiana del pla** i tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta} \\ \text{pla} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + k a \\ y = y_0 + k b \\ z = z_0 + k c \end{array} \right. \quad \text{i d'aquí:} \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_1(x_0 + k a) + b_1(y_0 + k b) + c_1(z_0 + k c) = d_1$$

que és una equació amb una incògnita (k), que podem reduir a una equació del tipus:

$$mk = n$$

- ♦ $\text{rg } M = 1$ ($m \neq 0$) comp. det. recta i pla es tallen en un punt.
- ♦ $\text{rg } M = 0$ $\text{rg } MA = 1$ ($m=0$ $n \neq 0$) incompatible recta paral·lela al pla.
- ♦ $\text{rg } M = 0$ $\text{rg } MA = 0$ ($m=0$ $n=0$) comp. indet. recta continguda al pla.

En el cas que es tallin, un cop hem trobat el valor del paràmetre k , per trobar el punt de tall caldrà substituir-lo a les paramètriques de la recta

POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES**equacions cartesianes:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta} \\ \text{recta} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z = d_4 \end{array} \right. \quad \text{4 equacions amb 3 incògnites}$$

- ♦ $\text{rg } M = 3$ $\text{rg } MA = 4$ incompatible les rectes s'encreuen
- ♦ $\text{rg } M = 3$ $\text{rg } MA = 3$ compatible det. es tallen en un punt.
- ♦ $\text{rg } M = 2$ $\text{rg } MA = 3$ incompatible rectes paral·leles
- ♦ $\text{rg } M = 2$ $\text{rg } MA = 2$ comp. ind. 1 g. de llib. son la mateixa recta.

Fixeu-vos que podem considerar el sistema de les quatre equacions com els quatre plans que dos a dos ens donen les dues rectes.

Heu vist que hi ha dos casos d'incompatibilitat. Si $\text{rg } M = 3$ aleshores tres dels plans (el sistema de tres equacions de rang 3 seria compatible determinat) es tallarien en un

punt i per això les dues rectes no poden ser paral·leles ja que els plans que contenen a una recta paral·lela a una altra no la poden tallar en un punt. Per això en aquest cas les dues rectes s'encreuen.

En canvi quan el sistema és incompatible i $\text{rg}M = 2$, vol dir que els dos plans de la segona recta no tallen a la primera en un punt, per tant o són paral·lels a aquesta recta o la contenen, i per tant determinen una recta paral·lela.

equacions paramètriques:

En el cas que ens donguin les rectes amb la seva equació vectorial o paramètriques resulta **més senzill estudiar la seva posició igualant les equacions paramètriques**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta} \\ \text{recta} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + k a_1 \\ y = y_1 + k b_1 \\ z = z_1 + k c_1 \\ x = x_2 + m a_2 \\ y = y_2 + m b_2 \\ z = z_2 + m c_2 \end{array} \right. \quad \text{i igualant les coordenades, tindrem:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + k a_1 = x_2 + m a_2 \\ y_1 + k b_1 = y_2 + m b_2 \\ z_1 + k c_1 = z_2 + m c_2 \end{array} \right. \quad \text{i d'aquí:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 k - a_2 m = x_2 - x_1 \\ b_1 k - b_2 m = y_2 - y_1 \\ c_1 k - c_2 m = z_2 - z_1 \end{array} \right.$$

que és un sistema de tres equacions i dues incògnites : k i m.

- | | | | |
|---------------------|-------------------|--------------------------|-----------------------|
| ♦ $\text{rg} M = 2$ | $\text{rg}MA = 3$ | incompatible | les rectes s'encreuen |
| ♦ $\text{rg} M = 2$ | $\text{rg}MA = 2$ | compatible det. | es tallen en un punt. |
| ♦ $\text{rg} M = 1$ | $\text{rg}MA = 2$ | incompatible | rectes paral·leles |
| ♦ $\text{rg} M = 1$ | $\text{rg}MA = 1$ | comp. ind. 1 g. de llib. | son la mateixa recta |

Observeu que els coeficients de les incògnites k i m són els vectors directors de les dues rectes i que per tant $\text{rg} M$ ens indica si els dos vectors directors són o no independents. Si $\text{rg} M = 2$ les dues rectes tenen direccions diferents, o sigui s'encreuen o es tallen, i si $\text{rg} M = 1$ tenen la mateixa direcció, o sigui són paral·leles o coincideixen.

En el cas que es tallin, per trobar el punt de tall haurem de trobar un dels dos paràmetres i substituir-lo a les paramètriques de la recta corresponent.

Observeu també que la MA està formada en les seves columnes pels dos vectors directors i pel vector $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ que va d'un punt d'una recta a un punt de l'altra recta. Si les dues rectes no tenen la mateixa direcció, és a dir $\text{rg } M = 2$, la compatibilitat del sistema vindrà donada pel fet que $\det(MA) = 0$, o sigui pel fet que el vector $\vec{v}$ sigui combinació lineal dels dos vectors directors. Geomètricament això s'interpreta considerant que si dues rectes es tallen determinen un pla i que qualsevol vector que uneixi dos punts de les rectes ha de tenir la direcció del pla.

D.1 Estudia la posició relativa de la recta i pla següents, i en cas que es tallin troba el punt de tall. Fes-ho de dues maneres:

- a) Directament a partir de les equacions cartesianes.
- b) Buscant primer unes paramètriques de la recta

$$\text{recta: } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 2y - 6z = 5 \end{cases} \quad \text{pla: } 4x - 5y + 3z - 4 = 0$$

D.2 Estudia la posició relativa de la recta i pla següents, i en cas que es tallin troba el punt de tall. Fes-ho de dues maneres:

- a) Directament a partir de les equacions cartesianes.
- b) Buscant primer unes paramètriques de la recta

$$\text{recta: } \begin{cases} x - 3y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 7 \end{cases} \quad \text{pla: } 2x - y - z = 3$$

D.3 Estudia la posició relativa de les dues rectes següents, i en cas que es tallin troba el punt de tall. Fes-ho de dues maneres:

- a) Directament a partir de les equacions cartesianes.
- b) Buscant primer unes paramètriques de les dues rectes.

$$\text{recta: } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} \quad \text{recta: } \begin{cases} 2x + y - 4z = 5 \\ x - y + 7z = 1 \end{cases}$$

D.4 Estudia la posició relativa de les dues rectes següents, i en cas que es tallin troba el punt de tall. Fes-ho de dues maneres:

- a) Directament a partir de les equacions cartesianes.
- b) Buscant primer unes paramètriques de les dues rectes.

$$\text{recta: } \begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \quad \text{recta: } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

D.5 Estudia la posició relativa de les dues rectes següents, i en cas que es tallin troba el punt de tall. Fes-ho de dues maneres:

- Directament a partir de les equacions cartesianes.
- Buscant primer unes paramètriques de les dues rectes.

$$\text{recta: } \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 4x - 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\text{recta: } \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 5x - y + 8z = -2 \end{cases}$$

D.6 Troba la intersecció del pla que passa pels punts $A : (1, 0, 1)$, $B : (-1, 2, 3)$, $C : (4, 1, 2)$ i la recta que passa per $D : (-1, 4, 5)$, $E : (1, 1, 1)$.

D.7 Demostra que la recta que passa pels punts $R : (4, -1, 5)$, $S : (-1, -1, 0)$ i la que té per equació:

$$\frac{x-25}{2} = \frac{y-8}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

estan en un mateix pla i es tallen en un punt. Troba el punt de tall.

D.8 Calculeu el valor de k per tal que els tres plans següents passin per una mateixa recta.

$$x + y + z = 2$$

$$2x + 3y + z = 3$$

$$kx + 10y + 4z = 11$$

D.9 Donades les rectes d'equacions:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{a} = \frac{z-3}{3}$$

i

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$$

determineu els valors d' a per als quals es tallen i els valors d' a per als quals estan en un mateix pla.

D.10 Discuteix el sistema segons els diferents valors del paràmetre a i interpreta-ho geomètricament:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y + az = 5 \end{cases}$$

D.11 Discuteix el sistema segons els diferents valors del paràmetre a i interpreta-ho geomètricament.

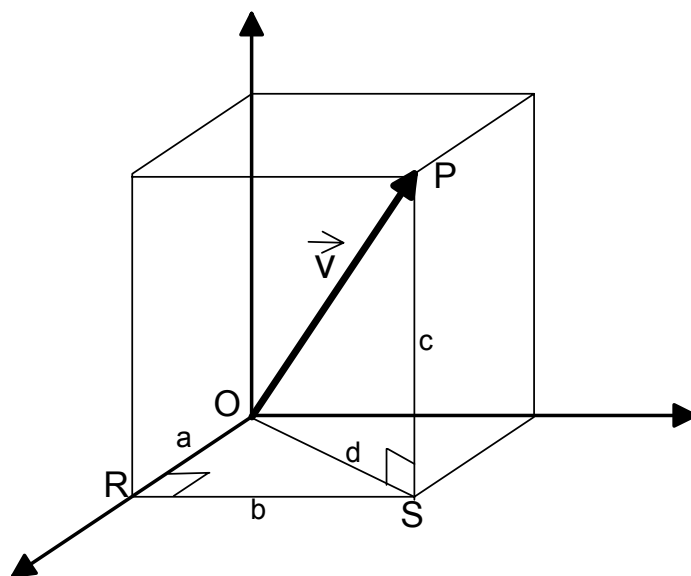
$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = a \end{cases}$$

E perpendicularitat

MÒDUL D'UN VECTOR . DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS

Com ja saps **mòdul** d'un vector és la **longitud** del segment d'una fletxa que el representi. A vegades també se'n diu la **norma** del vector. S'expressa de diverses maneres: o bé simplement traient la fletxa, o posant el vector entre línies verticals o dobles línies.

Longitud o mòdul o norma del vector $\vec{v}$: $v = |\vec{v}| = \|\vec{v}\|$



Si tenim el vector $\vec{v} = (a, b, c)$, aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles OSP i ORS, tindrem que:

$$v = (a, b, c) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Mòdul d'un vector: $\vec{v} = (a, b, c) \quad \ \vec{v}\ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
--

I si considerem que la distància entre dos punts A i B

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| \quad \text{tindrem:}$$

Distància entre dos punts: $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

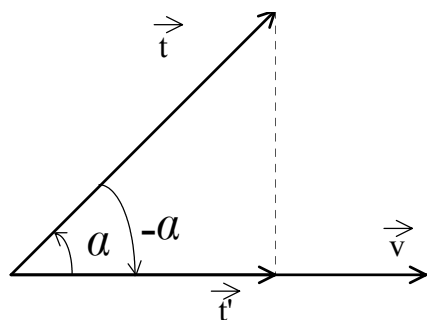
PERPENDICULARITAT DE VECTORS I RECTES

Vectors ortogonals o perpendiculars: Si dues fletxes que els representin amb origen comú són perpendiculars.

Rectes ortogonals o perpendiculars: Si els seus vectors directors són perpendiculars. Observeu que dues rectes perpendiculars poden tallar-se en angles rectes, però també poden no tallar-se, es a dir encreuar-se, tenint les dues direccions perpendiculars.

PRODUCTE ESCALAR

Dos vectors de l'espai els podem considerar representats en un mateix pla. El producte escalar dels dos vectors a l'espai té el mateix significat geomètric que el producte escalar en el pla:



El **producte escalar de dos vectors és un nombre** que s'obté:

Producte escalar en funció de l'angle:	$\vec{v} \cdot \vec{t} = \ \vec{v}\ \ \vec{t}\ \cos(\alpha)$
---	--

L'angle $\alpha = \angle \vec{v}, \vec{t}$, és l'angle entre els dos vectors.

Per ser $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, tant és que considerem l'angle $\angle \vec{v}, \vec{t}$ com l'angle oposat $\angle \vec{t}, \vec{v}$. Per això el producte escalar és commutatiu.

CARACTERÍSTIQUES DEL PRODUCTE ESCALAR

A partir de la definició es pot veure que el producte escalar té les característiques següents:

- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} \in \mathbb{R}$. El producte escalar és un nombre real.
Perquè així ho hem definit.
- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot \vec{v}$. El producte escalar és commutatiu.
Perquè $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
- ♦ Si $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = 0$. Si un dels vector és el vector nul, el producte escalar és 0.
Perquè el mòdul del vector $\vec{0}$ és 0.
- ♦ Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{t} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \cdot \vec{t} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{t}$. **Si el producte escalar és 0 i cap dels vectors és nul aleshores els vectors són ortogonals**, i recíprocament: **si són ortogonals el producte escalar és 0**.
Perquè $\cos 90^\circ = 0$.
- ♦ $|\vec{v} \cdot \vec{t}| = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \Leftrightarrow \vec{v}$ i $\vec{t}$ són paral·lels. El producte escalar de dos vectors paral·lels i del mateix sentit és el producte dels mòduls, i si són de sentit contrari el producte dels mòduls canviat de signe.
Perquè $\cos 0^\circ = 1$ i $\cos 180^\circ = -1$.
- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v} \cdot \vec{t'}$ essen t $\vec{t'} = \text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{t})$. El producte escalar de dos vectors és el producte escalar d'un d'ells per la projecció de l'altre sobre d'ell.
Perquè $\|\vec{t'}\| = \|\vec{t}\| |\cos \alpha|$

EL PRODUCTE ESCALAR EN COMPONENTS

Si volem treballar amb el producte escalar en la geometria analítica ens caldrà una fórmula per calcular-lo a partir de les components dels vectors. De manera semblant als vectors del pla es pot demostrar que:

Producte escalar en components:

si

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{t} &= (a_2, b_2, c_2)\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)$$

PERPENDICULARITAT ENTRE RECTES I PLANS

Recta ortogonal o perpendicular a un pla: una recta és perpendicular a un pla si és perpendicular a **totes** les rectes que estan contingudes en el pla. De fet n'hi ha prou amb que ho sigui a les rectes contingudes al pla i que passin pel punt de tall de la recta amb el pla. I encara més : **n'hi ha prou amb que sigui perpendicular a dues rectes** no paral·leles contingudes al pla.

Observeu dues coses que cal tenir ben clares:

- que si una recta és perpendicular només a una recta continguda en un pla, no per això és perpendicular al pla.
- que si una recta r talla a un pla, hi ha **una** recta continguda al pla que passa pel punt de tall i és perpendicular a la recta r . Això encara que la recta r no sigui perpendicular al pla!.

Vector ortogonal o perpendicular a una direcció plana: un vector és perpendicular a una direcció plana si és perpendicular a tots els vectors d'aquesta direcció. Tal com hem dit en el cas d'una recta perpendicular a una pla, perquè un vector sigui perpendicular a una direcció plana **n'hi ha prou que sigui perpendicular a dos vectors directors** de la direcció plana.

Observeu que donat un pla o una direcció plana, hi ha una única direcció recta ortogonal al pla. O sigui que totes les rectes perpendiculars a un pla tenen la mateixa direcció i per tant són paral·leles entre si.

I recíprocament: donada una recta o una direcció recta, hi ha una única direcció plana ortogonal a la recta.

Això fa que la direcció d'un pla sigui més senzill donar-la mitjançant un vector ortogonal que no pas mitjançant dos vectors directors perquè tot seguit veurem que un vector ortogonal a un pla està "associat" a la seva equació cartesiana.

VECTOR ORTOGONAL A UN PLA: VECTOR ASSOCIAT A L'EQUACIÓ CARTESIANA

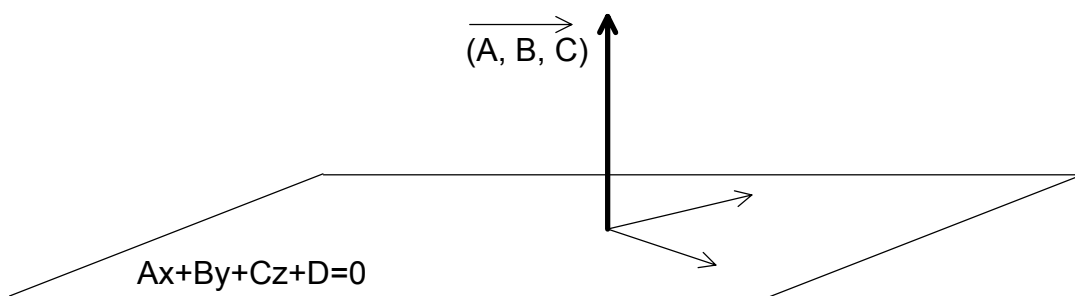
Si $Ax + By + Cz + D = 0$ és l'equació cartesiana d'un pla, el vector dels coeficients, "associat" a l'equació : (A, B, C) és ortogonal al pla

Fixeu-vos que aquesta propietat dels coeficients de l'equació cartesiana, i que tot seguit demostrarem, ens recorda una propietat que tenen els coeficients de l'equació general d'una recta en la geometria del pla.

Demostració :

Si tenim un pla $x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(a_1, b_1, c_1) + m(a_2, b_2, c_2)$

la seva equació cartesiana l'obtenim:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$
 , que desenvolupant:



$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (x-x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (z-z_0) = 0 \quad \text{o sigui}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Hem de demostrar que el vector $(A, B, C) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ és ortogonal al pla. Per això només caldrà comprovar que és ortogonal als dos vectors directores, o sigui que els seu producte escalar és zero. En efecte:

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (A, B, C) = (a_1, b_1, c_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{perquè té dues columnes iguals.}$$

De la mateixa manera podem demostrar també que:

$$(a_2, b_2, c_2) \cdot (A, B, C) = 0$$

EXEMPLE 1. Recta perpendicular al pla $2x-y+3z=10$ que passa per $(1, -3, 2)$.

La recta perpendicular al pla tindrà la direcció del vector ortogonal al pla associat a la seva equació. Per tant la recta serà:

$$(x, y, z) = (1, -3, 2) + k(2, -1, 3)$$

EXEMPLE 2. Pla perpendicular a la recta $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-3}$ que passa pel punt $(2, 1, 1)$.

El vector director de la recta $(2, 5, -3)$ serà ortogonal al pla, per tant el pla tindrà una equació de la forma:

$$2x + 5y - 3z = D$$

$$\text{I si ha de passar pel punt } (2, 1, 1): \quad D = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 6$$

$$\text{L'equació del pla serà:} \quad 2x + 5y - 3z = 6$$

EXEMPLE 3. Hi ha algun dels vectors: $(1, 1, 5)$, $(2, 3, -2)$, $(-1, 1, -2)$ i $(0, 1, 4)$ que estigui en la direcció del pla $4x+2y-z=8$?

Un vector està en la direcció d'un pla quan és ortogonal a un vector ortogonal del pla. Per tant per respondre la qüestió n'hi haurà prou en comprovar si els vectors que ens donen són ortogonals al vector $(4, 2, -1)$:

$$(1, 1, 5) \cdot (4, 2, -1) = 1 \quad \text{El vector } (1, 1, 5) \text{ no està en la direcció del pla.}$$

$$(2, 3, -2) \cdot (4, 2, -1) = 16 \quad \text{El vector } (2, 3, -2) \text{ no està en la direcció del pla}$$

$$(-1, 1, -2) \cdot (4, 2, -1) = 0 \quad \text{El vector } (-1, 1, -2) \text{ sí que està en la direcció del pla}$$

$$(0, 1, 4) \cdot (4, 2, -1) = -2 \quad \text{El vector } (0, 1, 4) \text{ no està en la direcció del pla}$$

Basant-nos en això podem determinar la direcció d'un pla trobant dos vectors que el seu producte escalar amb el vector "associat" a l'equació del pla sigui zero. Per exemple els vectors $(0, 1, 2)$ i el $(2, -4, 0)$.

PLANS PERPENDICULARS

Plans ortogonals o perpendiculars : dos plans són perpendiculars si dues rectes que són perpendiculars respectivament als dos plans, són perpendiculars entre si. O sigui si un vector ortogonal a un pla i un vector ortogonal a l'altre pla, són ortogonals entre si. Per tant podem dir també que dos plans són perpendiculars si el vector ortogonal a un d'ells és director de l'altre.

Fixem-nos que la relació de paral·lelisme entre plans també la podem traduir a una relació de paral·lelisme entre rectes perpendiculars als dos plans. Es a dir: **dos plans tenen la mateixa direcció si els seus vectors ortogonals tenen la mateixa direcció.**

Precisament més endavant definirem l'angle entre dos plans com l'angle entre dues rectes ortogonals als dos plans.

EXEMPLE 4. Els plans $p: 2x-3y+z=5$ i $q: 5x+y-7z=1$ són perpendiculars.

En efecte, els dos vectors respectivament ortogonals als dos plans: $(2, -3, 1)$ i $(5, 1, -7)$ són ortogonals entre si. Ho comprovem fent el seu producte escalar:

$$(2, -3, 1) \cdot (5, 1, -7) = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-7) = 0$$

Per tant el vector $(2, -3, 1)$ ortogonal al p és un vector director de q , i el vector $(5, 1, -7)$ ortogonal a q és director del pla p .

EXEMPLE 5. Els plans $3x+5y-2z=1$ i $-9x-15y+6z=7$ són paral·lels.

Ho podem veure de dues maneres: comprovant que el sistema és incompatible, o bé observant que els dos vectors ortogonals tenen la mateixa direcció, és a dir el rang de la matriu dels dos vectors és 1:

$$(-9, -15, 6) = 3 (3, 5, -2)$$

PRODUCTE VECTORIAL

Per trobar un vector $\vec{v}$ ortogonal a dos vectors $\vec{r} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{s} = (a_2, b_2, c_2)$ podem fer-ho buscant l'equació d'un pla que tingui la direcció dels vectors $\vec{r}$ i $\vec{s}$ i passi per un punt qualsevol, per exemple el punt $(0,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} z = 0$$

El vector ortogonal al pla, associat a l'equació, serà un vector ortogonal als vectors directores $\vec{r}$ i $\vec{s}$. Aquest vector és el **producte vectorial dels vectors $\vec{r}$ i $\vec{s}$** i s'indica amb l'expressió: **$\vec{r} \times \vec{s}$**

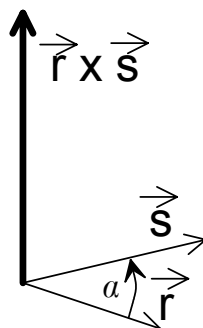
Producte vectorial:

$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

vector que té per components els adjunts als elements de la primera columna del

determinant:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$



PROPIETATS DEL PRODUCTE VECTORIAL:

Destaquem algunes propietats del producte vectorial:

- ◆ $\vec{r} \times \vec{s}$ és un vector. El producte vectorial és un vector.
- ◆ $\vec{r} \times \vec{s}$ és ortogonal als dos vectors $\vec{r}$ i $\vec{s}$
- ◆ El seu mòdul és $\|\vec{r} \times \vec{s}\| = \|\vec{r}\| \|\vec{s}\| \sin(a)$. Aquesta relació no la demostrem en aquest text.
- ◆ El sentit del vector producte vectorial $\vec{r} \times \vec{s}$ ve determinat per la regla del "tirabuixó": el sentit en què avançaria un tirabuixó de treure taps o un tap o cargol de rosca si girem del primer vector $\vec{r}$ al segon $\vec{s}$.
- ◆ El producte vectorial no és commutatiu: $\vec{r} \times \vec{s} = -\vec{s} \times \vec{r}$.

EXEMPLE 6. Pla perpendicular als plans $x+2y-4z=2$ i $2x-3y+z=5$ que passa pel punt $(1, 0, -1)$.

Un pla perpendicular als dos plans tindrà com a vector ortogonal el vector $\vec{v}$ director de la recta en què es tallen els dos plans que ens donen.

Podríem trobar el vector director $\vec{v}$ de la recta intersecció buscant dos punts de la mateixa o bé resolent el sistema de manera que tindríem unes paramètriques de la recta.

Però també podem trobar el vector $\vec{v}$ director de la recta intersecció dels dos plans considerant que aquest vector ha d'estar en la direcció dels dos plans i per tant ha de ser ortogonal als vectors normals als dos plans. Per tant:

$$\vec{v} = (1, 2, -4) \times (2, -3, 1) = (-10, -9, -7) \quad \text{perquè fent el determinant:}$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & -3 \\ z & -4 & 1 \end{vmatrix} = -10x - 9y - 7z$$

Per tant el pla que ens demanen serà del tipus: $10x+9y+7z+D=0$, i ha de passar pel punt $(1, 0, -1)$: $D = -10+7 = -3$

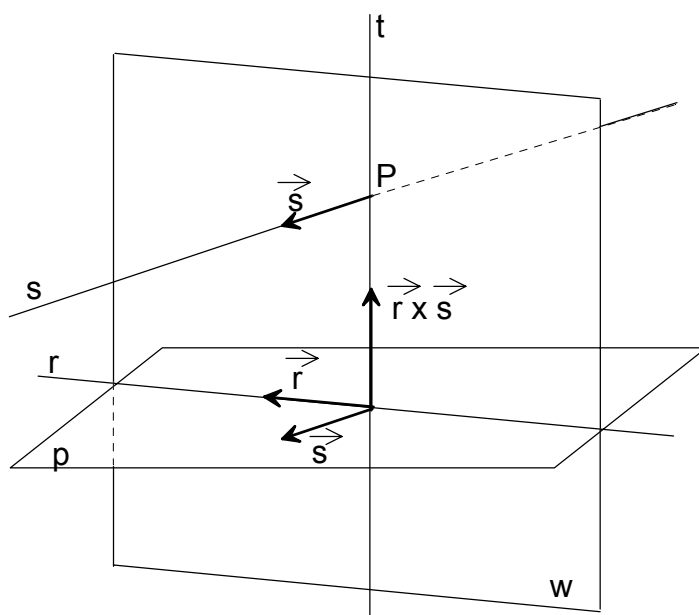
L'equació del pla serà: $10x+9y+7z-3=0$

Una altra manera de trobar l'equació d'aquest pla seria considerant que els vectors ortogonals dels plans que ens donen han de ser directors del pla perpendicular i que per tant la seva equació serà:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 2 & -3 \\ z+1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -10(x-1) - 9y - 7(z+1) = -10x - 9y - 7z + 3 = 0$$

EXEMPLE 7. Recta perpendicular i que talla a les rectes r i s:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad s: \begin{cases} x=3 \\ y-2 = \frac{z-1}{-4} \end{cases}$$



La recta t ha de ser perpendicular a r i s per tant la seva direcció serà la del vector producte vectorial dels vectors directors de les rectes r i s: $\vec{r} \times \vec{s}$.

Fent el producte vectorial: $\vec{r} \times \vec{s} = (2, 8, 2)$ Podem agafar $\vec{t} = (1, 4, 1)$

La recta t haurà de passar pel punt P intersecció de la recta s amb un pla w que contingui la recta r i sigui perpendicular a la direcció plana determinada per les rectes r i s (la del pla p que conté r i és paral·lel a s). Per tant el pla w ha de passar per un punt de r i té per vectors directors $\vec{r}$ i $\vec{r} \times \vec{s}$ és a dir $\vec{r}$ i $\vec{t}$.

$$\text{L'equació del pla w: } \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 4 \\ z+2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 9z + 27 = 0 \quad \text{I simplificant l'equació:}$$

$$\text{Pla w: } x - z - 3 = 0$$

$$\text{El punt P com a intersecció de la recta s i el pla w: } \begin{cases} x=3 \\ y-2 = \frac{z-1}{-4} \\ x-z-3=0 \end{cases} \quad P = \left(3, \frac{9}{4}, 0\right)$$

$$\text{La recta t: } (x, y, z) = \left(3, \frac{9}{4}, 0\right) + k(1, 4, 1)$$

E.1 Trobeu una equació vectorial de la recta perpendicular al pla $x-3y+2=0$ que passa pel punt $(1, -2, 1)$.

E.2 Trobeu una equació vectorial de la recta que passa pel punt $(0, 2, 0)$ i és ortogonal al pla que passa pels punts $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 1)$ i $(0, 1, 3)$.

E.3 Donats els punts $A:(1, 0, -5)$ i $B:(5, -2, -3)$. Trobeu l'equació d'un pla perpendicular al segment AB i que passi pel punt mitjà del segment.

E.4 Trobeu un pla perpendicular a la recta:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y - 2z = 2 \end{cases} \quad \text{i que passi pel punt } (0, -1, 3).$$

E.5 Donats els plans $ax + 2y + 3z + a = 0$ i $2x + ay + 3z - a = 0$, determineu a per tal que siguin perpendiculars.

E.6 Donats el punt $Q: (6, 10, -2)$ i el pla $p: x + 4y - z + 6 = 0$.

- Troba la recta que passa per Q i és perpendicular al pla p .
- Troba el punt d'intersecció del pla p amb la recta de l'apartat anterior. (Aquest punt és la projecció ortogonal del punt Q sobre el pla p).
- Trobeu la distància del punt Q a la seva projecció ortogonal sobre p . (Aquesta distància és la distància del punt Q al pla p)

E.7 Donats els punts $A:(-1, 2, 1)$, $B:(0, 1, 3)$ i $C:(-2, 2, 1)$, trobeu:

- L'equació de la recta AB .
- L'equació del pla que passa per C i és perpendicular a la recta AB .
- El punt intersecció de la recta AB amb el pla que passa per C i és perpendicular a la recta AB . (Aquest punt és la projecció ortogonal del punt C sobre la recta AB).
- Trobeu la distància del punt C a la seva projecció ortogonal sobre la recta AB . (Aquesta distància és la distància del punt C a la recta AB)

E.8 Donat el punt $(1, 2, 0)$, trobeu l'equació de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular a les rectes:

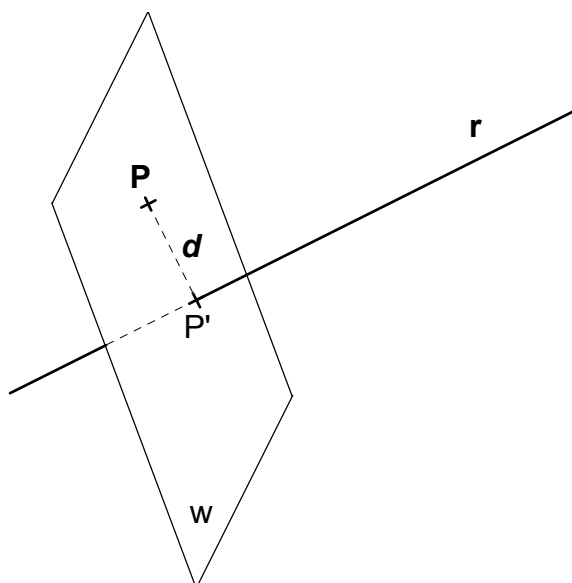
$$\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{1} &= \frac{z-3}{5} \\ y &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{x-1}{5} &= \frac{z-3}{1} \\ y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

F distàncies i angles

DISTÀNCIES ENTRE PUNTS, RECTES I PLANS

Es considera que distància entre dues figures geomètriques és la distància mínima entre els punts de les dues figures geomètriques.

Distància d'un punt a una recta:



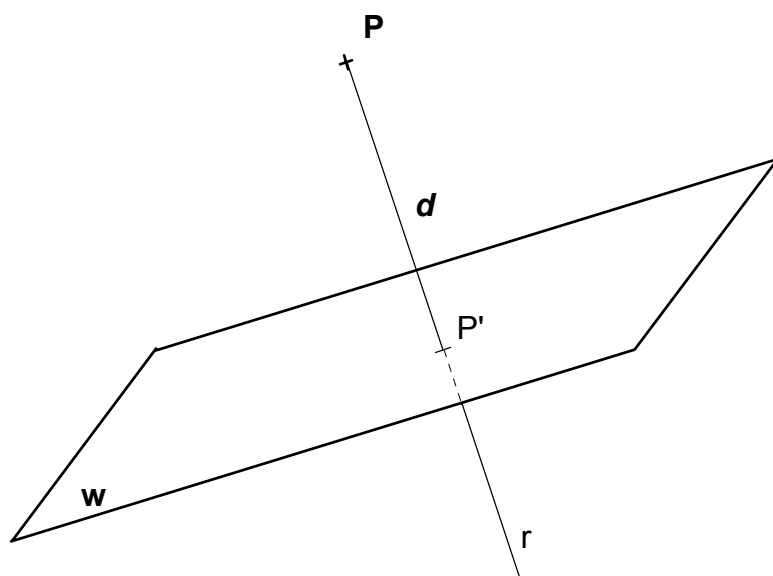
Si tenim un punt P i una recta r

$d(P, r) = d(P, P')$ essent P' la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r .

P' l'obtidrem com a punt d'intersecció de la recta r amb el pla w que passa per P i és perpendicular a r .

Cas particular: si P pertany a la recta, aleshores $d(P, r) = 0$

Distància d'un punt a un pla:



Si tenim un punt P i un pla w

$d(P, w) = d(P, P')$ essent P' la projecció ortogonal del punt P sobre el pla w.

P' l'obtidrem com a punt d'intersecció del pla w amb la recta r que passa per P i és perpendicular al pla w.

Cas particular: si el punt pertany al pla la distància és 0.

De manera semblant a la fórmula per calcular la distància d'un punt a una recta en la geometria del pla, a l'espai es pot demostrar la fórmula següent per calcular la distància d'un punt a un pla.

Distància d'un punt a un pla: Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ i $w: Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, w) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Distància d'una recta a un pla:

Si la recta té algun punt en comú amb el pla (el talla o hi està continguda) la distància és 0.

Si la recta és paral·lela al pla la distància serà la distància d'un punt qualsevol de la recta al pla.

Distància entre dos plans:

Si els plans es tallen, la distància és 0.

Si els plans són paral·lels la distància serà la distància d'un punt qualsevol d'un dels plans a l'altre pla.

Distància entre dues rectes:

Si es tallen la distància és 0.

Si les rectes són paral·leles la distància serà la distància d'un punt qualsevol d'una de les rectes a l'altra recta.

Si les rectes s'encreuen la distància serà la distància entre els dos plans paral·lels que respectivament contenen una de les rectes i són paral·lels a l'altra recta.

ANGLES ENTRE VECTORS, RECTES I PLANS.**CÀLCUL DE L'ANGLE ENTRE DOS VECTORS**

Ho farem de la mateixa manera que ho fèiem a la geometria del pla. O sigui:

Si considerem la definició de producte escalar entre dos vectors, podem aïllar el cosinus de l'angle entre els dos vectors:

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\|\vec{v}\| \|\vec{t}\|}$$

Si tenim els vectors en components, podrem calcular el producte escalar i els mòduls dels vectors per obtenir el cosinus de l'angle:

Angle α entre dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{t}$:

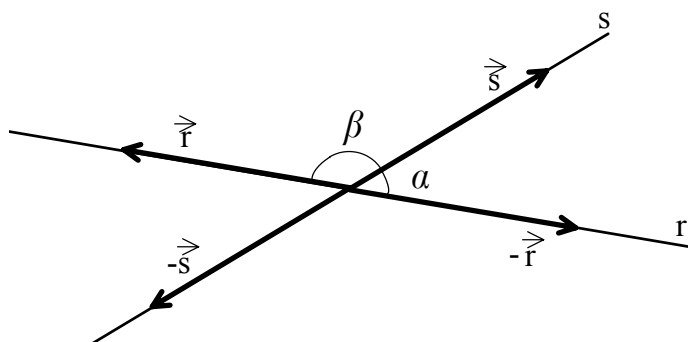
$$\vec{v} = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{i} \quad \vec{t} = (a_2, b_2, c_2) \quad \cos(\alpha) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\alpha \in [0, 180^\circ]$$

I per tant podrem calcular l'angle entre els dos vectors que serà sempre entre 0 i 180°.

ANGLE ENTRE DUES RECTES

Si les rectes es tallen: Ho farem tal com a la geometria del pla.



Dues rectes que es tallen determinen sempre quatre angles: dos aguts iguals oposats pel vèrtex i dos obtusos també iguals. Quan són perpendiculars els quatre angles són rectes.

Per conveni s'agafa com a mesura de **l'angle entre dues rectes la mesura de l'angle agut que determinen**.

Fixeu-vos que l'angle agut i l'obtús són suplementaris: $\alpha + \beta = 180^\circ$ i per tant els dos angles tenen cosinus oposats: $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Per calcular l'angle entre dues rectes ho farem calculant l'angle entre dos vectors directors de les dues rectes. Si el cosinus de l'angle entre els dos vectors dóna negatiu voldrà dir que haurem agafat dos vectors directors (com $\vec{s}$ i $\vec{r}$ de la figura) que formen l'angle obtús. Per tant haurem de quedar-nos amb l'angle suplementari o bé canviar el signe del cosinus (**agafant el valor absolut del producte escalar**) perquè ens doni directament l'angle agut: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{s}\| \|\vec{r}\|}$. D'aquesta manera l'angle serà sempre entre 0 i 90°.

Si les rectes s'encreuen: Considerarem que l'angle entre les dues rectes és l'angle entre dues rectes que es tallin i siguin paral·leles a les rectes donades. Per tant procedirem amb els vectors directores tal com si es tallessin.

Per tant en general:

Angle α entre dues rectes:

Si $\vec{s}$ i $\vec{r}$ són, respectivament vectors directores de les rectes s i r :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{s}\| \|\vec{r}\|} \quad \text{Per tant } \alpha \in [0, 90^\circ]$$

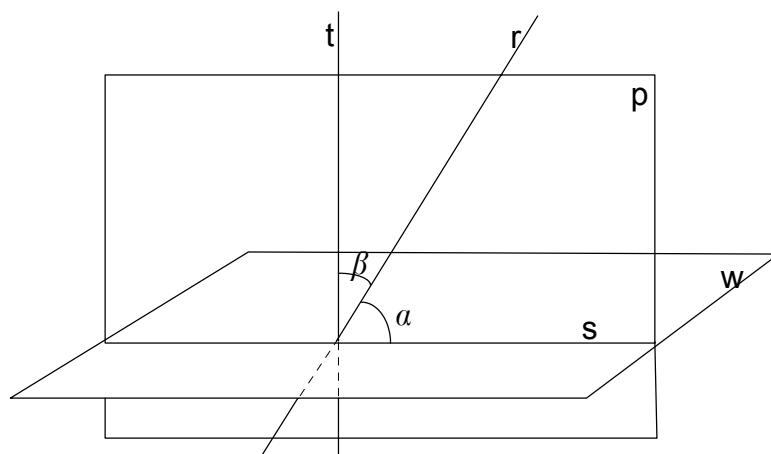
ANGLE ENTRE DOS PLANS:

L'angle entre dos plans és l'angle entre dues rectes que siguin perpendiculars als dos plans. Per tant l'angle serà sempre un angle agut, o sigui entre 0 i 90°.

Angle α entre dos plans:

Si $\vec{p}$ i $\vec{q}$ són dos vectors respectivament **ortogonals als plans** p i q :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{\|\vec{p}\| \|\vec{q}\|} \quad \text{De manera que } \alpha \in [0, 90^\circ]$$

ANGLE ENTRE UNA RECTA I UN PLA:

L'angle entre una recta r i un pla w és el complementari de l'angle que determinen la recta r i una recta t perpendicular al pla.

Si considerem el pla p que conté r i és perpendicular a w , tindrem que l'angle α entre el pla w i la recta r és l'angle entre la recta r i la recta s intersecció de p i w , i per tant $\alpha = 90 - \beta$.

Angle α entre una recta i un pla:

Si $\vec{r}$ és un vector director de la recta r i $\vec{t}$ és un vector ortogonal al pla w aleshores :

$$\alpha = 90 - \beta \quad \text{essent} \quad \cos(\beta) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{t}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{t}\|}$$

F.1 Considera el pla que passa pels punt $A : (1, 0, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $C : (3, 2, -1)$ i el punt $Q : (0, 1, 0)$

- Calcula les coordenades del punt projecció ortogonal de Q sobre el pla ABC .
- Calcula la distància de Q al punt projecció que has trobat a l'apartat anterior.
- Calcula la distància del punt Q al pla ABC usant la fórmula de la distància d'un punt a un pla.

F.2 Troba la distància del punt $P: (1, 0, 2)$ a la recta que passa pels punts $A : (-1, -1, 3)$ i $B : (0, -3, 4)$.

F.3 Troba la distància entre els plans $x + y - z + 5 = 0$ i $x + y - z - 1 = 0$

F.4 Troba l'àrea del triangle determinat pels punts A : (1, 0, 0), B : (0, 2, 0) i C : (0, 0, 3).

F.5 Calculeu la distància entre les rectes:

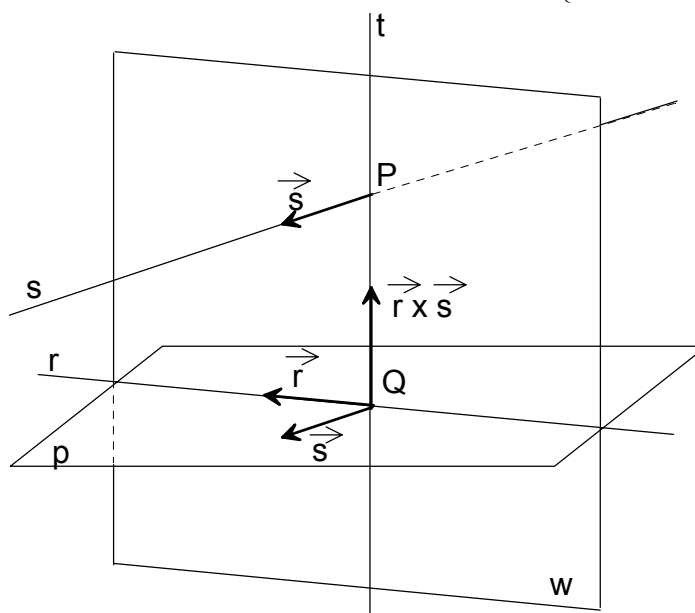
$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{4} = z \\ y = 2 \end{cases} \quad i \quad s: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Per això podeu seguir els passos següents: trobar un pla que contingui a r i sigui paral·lel a s i després calcular la distància d'aquest pla a un punt de la recta s.

F.6 Calculeu la distància entre les rectes de l'exemple 7 apartat E pàgina 38 buscant els punts de les dues rectes que es troben a la mínima distància.

(Si useu el que ja està fet a l'exemple 7, ja teniu un dels punts: P. Només us caldrà trobar l'altre: Q)

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad s: \begin{cases} x = 3 \\ y - 2 = \frac{z-1}{-4} \end{cases}$$



F.7 Calculeu l'angle entre les rectes de l'exercici anterior.

F.8 Calculeu l'angle entre els plans: $x-2y+3z=2$ i $3x-4z=1$.

F.9 Calculeu l'angle entre el pla $x-7y-2z+3=0$ i la recta que passa pels punts (4, 1, -1) i (1, 0, -5).

F.10 Donada la recta: $\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{z+5}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ i el pla $x + ay + z + 6 = 0$, trobeu el valor d'a per tal que el pla formi un angle de 30° amb la recta.