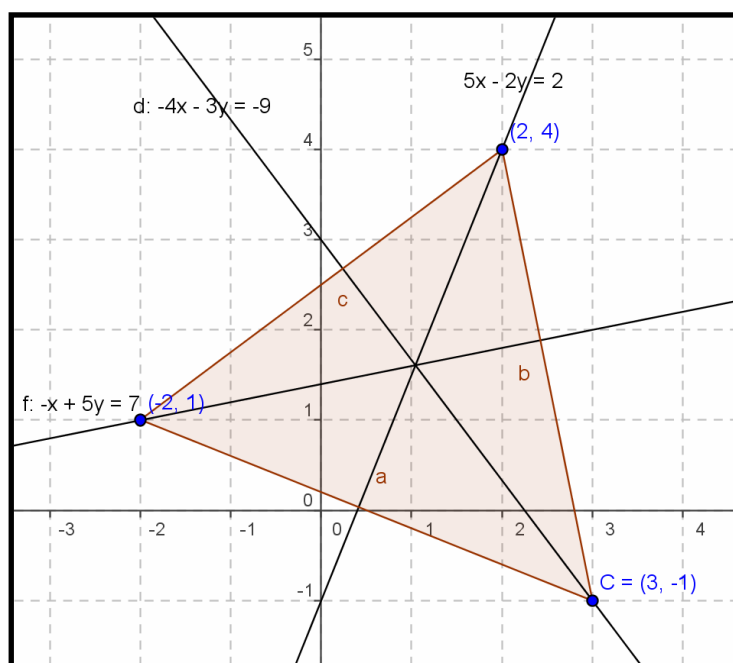


IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

GEOMETRIA DEL PLA



2n Batxillerat

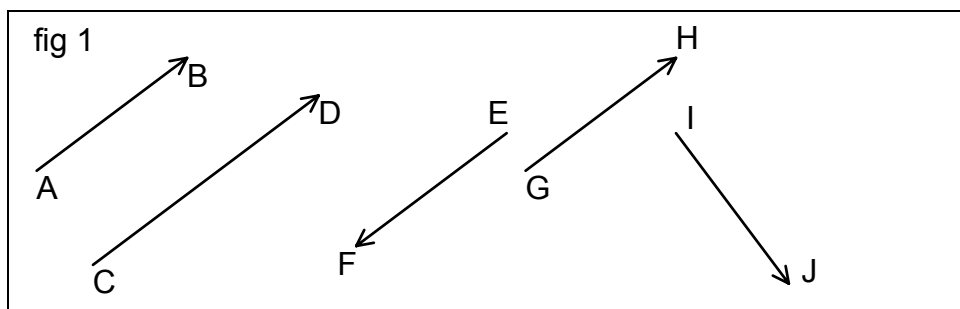
A fletxes i vectors

MAGNITUDS ESCALARS I MAGNITUDS VECTORIALS

Hi ha magnituds com la força o la velocitat que no n'hi ha prou per caracteritzar-les amb donar un nombre que indiqui la seva intensitat. Si apliquem una força de 400 N a un cotxe, per conèixer el seu efecte s'ha de saber com s'aplica aquesta força, és a dir si la força es fa des del darrera, des del davant, del costat, de baix a dalt o de dalt a baix. Un navegant no en té prou amb saber que està bufant un vent de 60 km/h, ha de saber en quina direcció bufa. Aquestes magnituds es diuen **magnituds vectorials** perquè per determinar-les de forma completa caldrà indicar la direcció i el sentit que tenen. Per representar-les farem servir fletxes i vectors. En canvi les magnituds que només cal determinar-les mitjançant un nombre, com la temperatura o el preu, es diuen **magnituds escalars**.

FLETXES

Una fletxa és un segment orientat, és a dir un segment en el qual distingim un extrem de l'altre: un serà el punt inicial i l'altre el punt final que indicarem amb la punta de la fletxa.



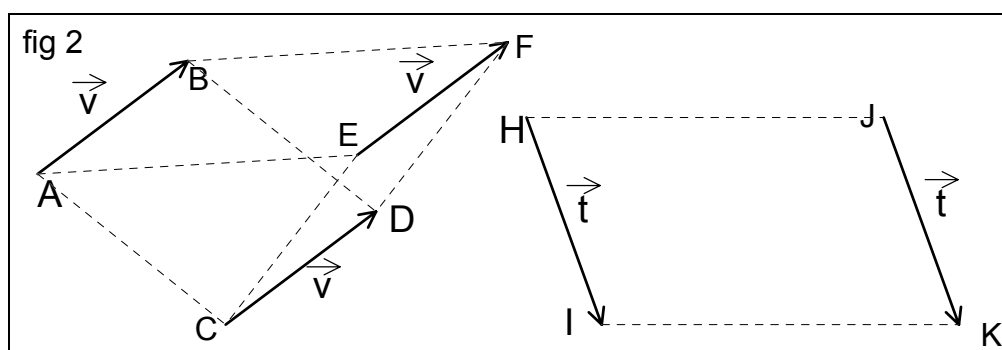
En el gràfic hi tenim representades 5 fletxes diferents: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ i $\overrightarrow{IJ}$. Les fletxes s'anomenen indicant el punt inicial i el punt final amb una fletxa al damunt. Les cinc fletxes són totes diferents, perquè dues fletxes per ser iguals han de tenir el mateix punt inicial i el mateix punt final.

Direcció d'una fletxa: Dues fletxes tenen la mateixa direcció si estan contingudes en rectes **paral·leles** o iguals. En el dibuix hi ha quatre fletxes amb la mateixa direcció i una, la $\overrightarrow{IJ}$, que té una direcció diferent.

Sentit en una direcció: Una direcció té dos sentits. Així, de les quatre fletxes del dibuix que tenen la mateixa direcció, n'hi ha tres amb el mateix sentit i una amb sentit contrari, la $\overrightarrow{EF}$.

Longitud o mòdul d'una fletxa: Un cop fixada una unitat de mesura, la longitud d'una fletxa és la longitud del segment. És un nombre positiu o zero. Una fletxa de longitud zero ve representada per un sol punt, ja que considerarem que un punt és també una fletxa que no té direcció, i en la qual el punt inicial i final coincideixen. En el dibuix totes les fletxes tenen la mateixa longitud excepte la fletxa $\overrightarrow{CD}$.

Fletxes equipol·lents: Dues fletxes es diu que són equipol·lents si tenen la mateixa direcció, el mateix sentit i la mateixa longitud.



A la figura 2 hi podem veure tres fletxes equipol·lents entre si, per un costat i dues altres també equipol·lents entre si per un altre. Si unim els dos punts inicials i el dos punts finals de dues fletxes equipol·lents que no estiguin sobre la mateixa recta es formarà un paral·lelogram, o sigui un quadrilàter amb els costats paral·lels dos a dos.

VECTORS

Si tenim una fletxa, podem considerar **totes les fletxes que siguin equipol·lents amb ella**. Totes aquestes fletxes tindran la mateixa direcció i sentit i la mateixa longitud. Direm que constitueixen **un sol vector**. Aquest vector tindrà com a **representant**, qualsevol de les fletxes que el constitueixen.

No hem de confondre els vectors amb les fletxes perquè tot i que es representen igual, són objectes matemàtics diferents. La diferència està en que un vector es pot representar per moltes fletxes diferents, totes elles equipol·lents, i per tant, quan

representem un vector amb una fletxa, hauriem d'imaginar-nos, no només aquesta fletxa sinó totes les que són equipol·lents amb ella.

Per això a vegades als vectors se'ls anomena **vectors lliures**, perquè els podem representar amb una fletxa que tingui per origen qualsevol punt que vulguem. I a les fletxes se les anomena **vectors fixes**, perquè estan determinades per un únic punt origen i un únic punt final.

En la figura 2, hi ha representades 5 fletxes diferents però només hi ha representats 2

vectors diferents. Les fletxes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ són representants del mateix vector, o sigui com a **fletxes són equipol·lents** i com a **vectors són iguals**. Les altres dues fletxes representen un altre vector. Per això quan escrivim les igualtats:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \vec{v} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{JK} = \vec{t}$$

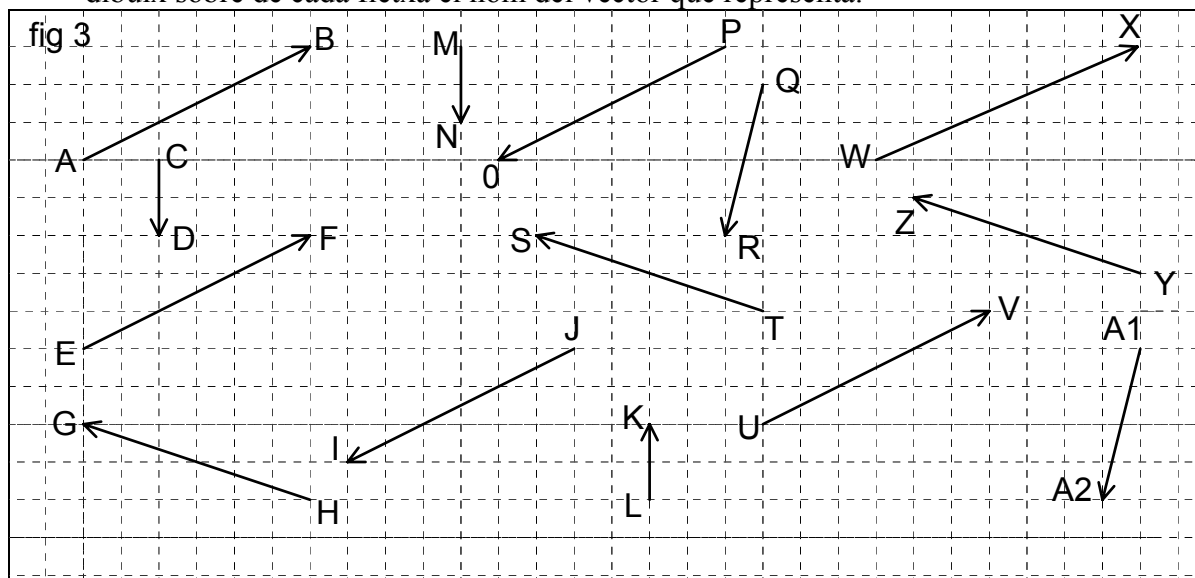
el signe igual el podem entendre com "equipol·lència" de fletxes i a la vegada com a "igualtat" de vectors.

Fixeu-vos que els dos vectors de la figura 2 els hem anomenat respectivament com a

vector $\vec{v}$ i vector $\vec{t}$ és a dir amb una lletra minúscula amb una fletxa al damunt.

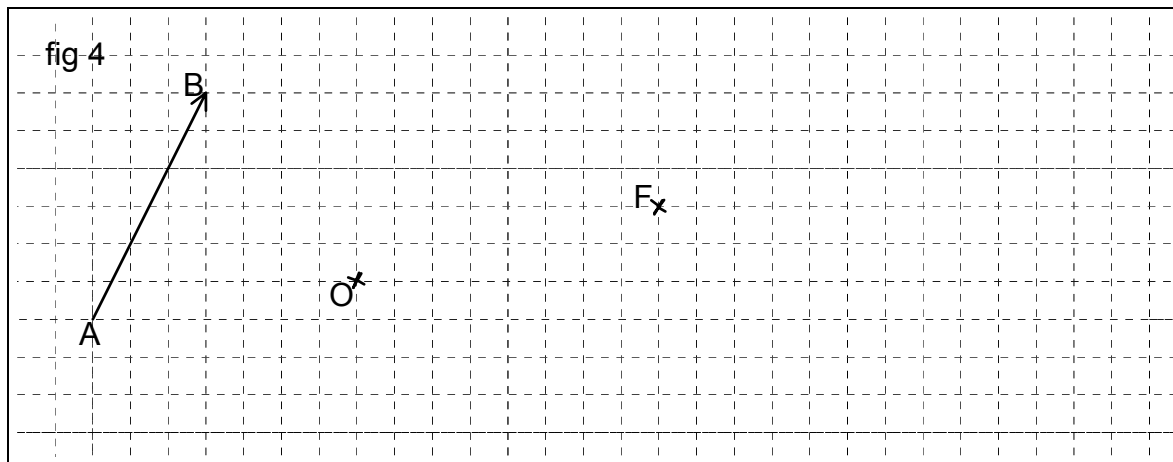
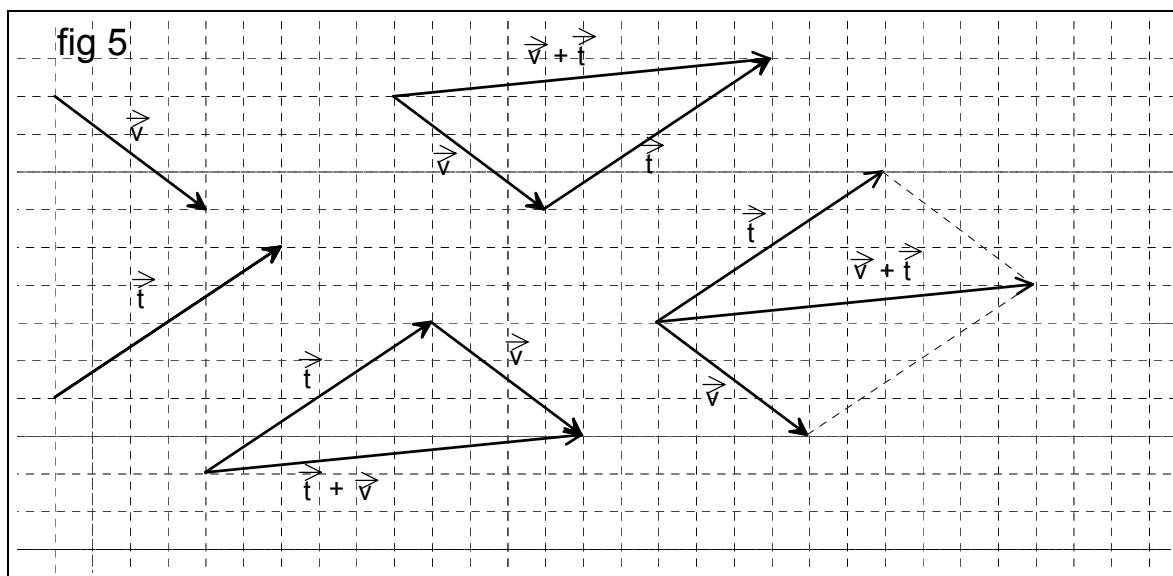
A.1. Observa el gràfic següent:

- Quantes fletxes diferents hi ha representades?.
- Quants vectors diferents hi ha representats?. Expressa amb igualtats les fletxes que són representants del mateix vector.
- Anomena cada vector amb una lletra minúscula amb una fletxa al damunt i posa en el dibuix sobre de cada fletxa el nom del vector que representa.



A.2.

- a) Donada la fletxa $\overrightarrow{AB}$ representa una fletxa que representi el mateix vector i que tingui origen en el punt O. Explica com ho fas.
- b) Representa una fletxa que representi el mateix vector i que tingui punt final en el punt F. Explica com ho fas

**SUMA DE VECTORS**

La suma de dos vectors és un altre vector. El resultat de la suma és diu vector suma o **resultant**. Per sumar dos vectors ho podem fer de dues maneres que ens donaran el mateix resultat:

Suma de vectors fent fletxes consecutives: Es dibuixen fletxes representants dels dos vectors que volem sumar de manera que el punt final d'una coincideixi amb l'inicial de l'altra. El vector suma té per representant una fletxa amb origen la primera fletxa i

punt final el final de la segona. Podem veure en la figura 5 que la suma és commutativa, és a dir que no importa l'ordre dels dos vectors sumands.

Suma de dos vectors pel mètode del paral·lelogram. Es dibuixen dues fletxes representants dels vectors que volem sumar de manera que tinguin el mateix punt origen. Es tracen dues rectes paral·leles: han de passar pel punt final d'una de les fletxes i han de ser paral·leles a l'altra fletxa. D'aquesta manera les dues fletxes amb les dues paral·leles determinen un paral·lelogram. El vector suma té per representant la **fletxa diagonal** del paral·lelogram amb el mateix origen que les fletxes que sumem. Observeu que els dos mètodes per trobar el vector suma són equivalents i que el vector suma no depèn de quines fletxes representants dels sumands hàgim escollit.

PROPIETATS DE LA SUMA DE VECTORS

La suma de vectors té unes propietats que són les mateixes que la suma de nombres:

Propietat associativa. Sigui quins siguin els tres vectors:

$$\vec{v} + (\vec{t} + \vec{s}) = (\vec{v} + \vec{t}) + \vec{s}$$

Hi ha un vector neutre en la suma de vectors. Les fletxes de longitud zero, o sigui que es representen amb un sol punt, considerarem que són equipol·lents i determinen un sol vector que en direm **vector zero o vector nul** i l'indicarem $\vec{0}$. Aquest vector serà l'element neutre respecte l'operació suma, és a dir, sigui quin sigui el vector que sumem al vector zero ens dóna el mateix vector :

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

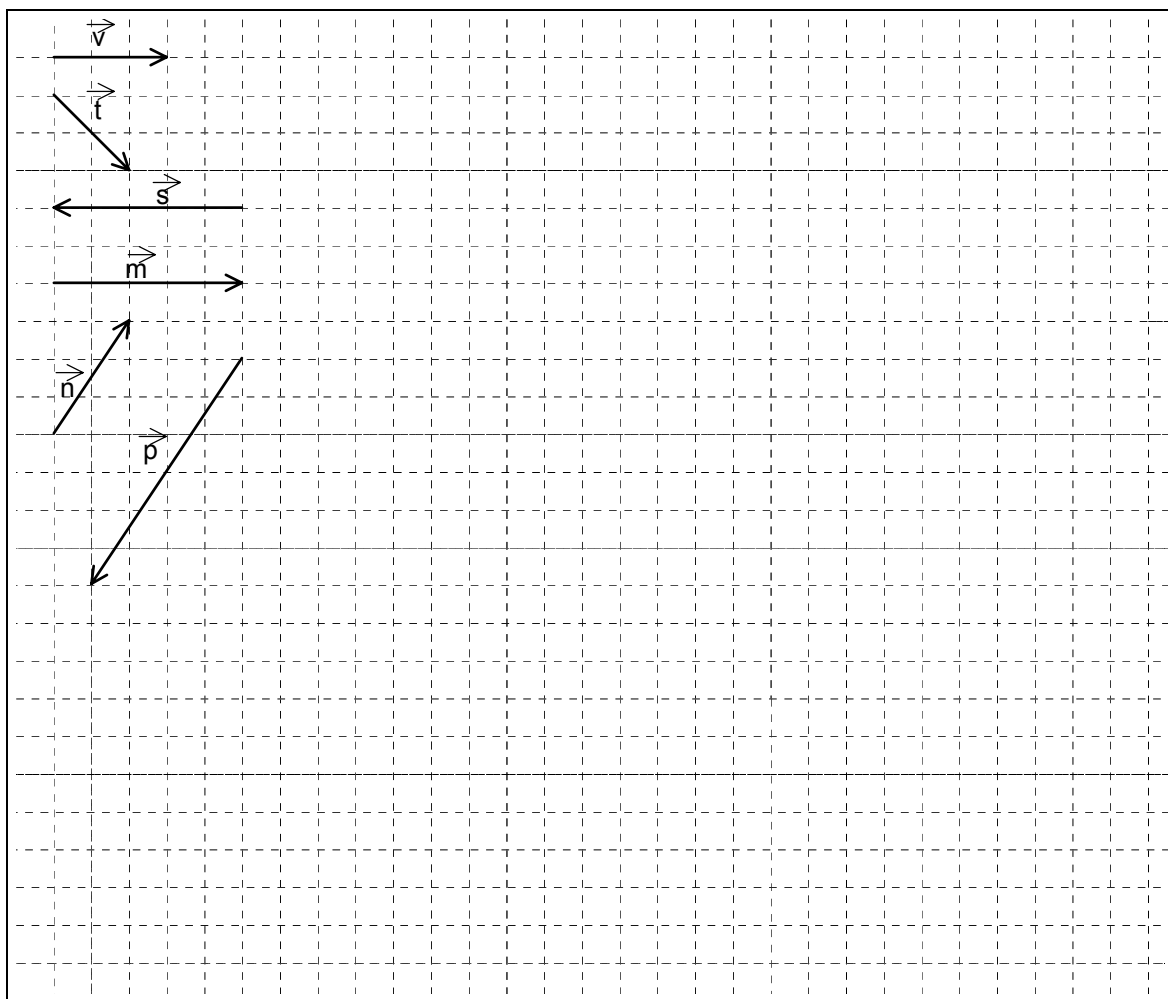
Cada vector té el seu vector oposat. Si tenim un vector i una fletxa que el representa, el seu oposat és un vector que té per representant la **fletxa de sentit contrari**. Tal com fem amb els nombres per indicar el vector oposat ho farem posant un signe menys davant del vector. Per tant:

si $\vec{AB} = \vec{v}$ aleshores l'oposat serà $-\vec{v} = \vec{BA}$ de manera que si sumem un vector amb el seu oposat es neutralitzen i dóna $\vec{0}$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

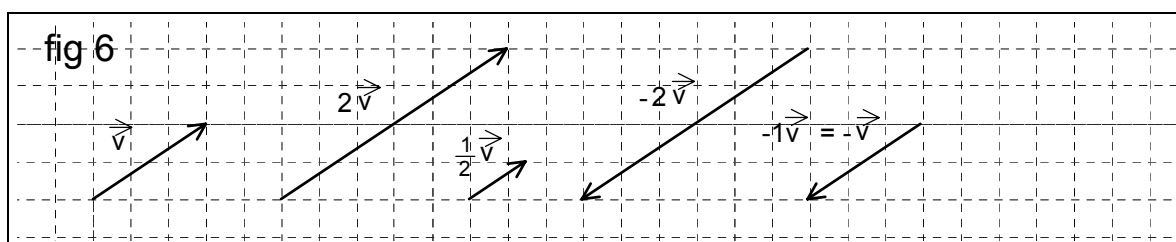
La suma de vectors és commutativa. El resultat de la suma no depèn de l'ordre dels sumands.

$$\vec{v} + \vec{t} = \vec{t} + \vec{v}$$

A.3. Donats els vectors representats per les fletxes:

Dibuixa una fletxa representant dels vectors següents utilitzant els dos mètodes per sumar vectors.

$$\vec{v} + \vec{t}, \quad \vec{v} + \vec{p}, \quad \vec{s} + \vec{v}, \quad \vec{m} + \vec{v}, \quad \vec{s} + \vec{m}, \quad (\vec{t} + \vec{m}) + \vec{n} \quad \text{i} \\ \vec{t} + (\vec{m} + \vec{n})$$

PRODUCTE D'UN ESCALAR PER UN VECTOR

Un escalar és un nombre. Considerarem com a escalars els nombres reals.

Es pot definir una operació que en direm **producte d'un escalar per un vector**, que consisteix en **multiplicar la longitud de la fletxa que representa el vector per**

l'escalar, mantenint la direcció. El producte serà del **mateix sentit si l'escalar és positiu** i de **sentit contrari si l'escalar és negatiu**.

Observeu que seguint les convencions del llenguatge algebraic el producte per un escalar que s'hauria d'indicar amb un puntet $\cdot$ no s'indica amb cap símbol entre nombres i lletres, entre lletres o entre parèntesis

PROPIETATS DEL PRODUCTE PER UN ESCALAR:

Siguin quins siguin els vectors i els escalars, el producte per un escalar compleix les quatre següents propietats fonamentals (observa que els vectors porten la fletxa al damunt i els escalars no):

Doble distributiva:

$$k(\vec{v} + \vec{t}) = k\vec{v} + k\vec{t}$$

$$(k + m)\vec{v} = k\vec{v} + m\vec{v}$$

Associativa:

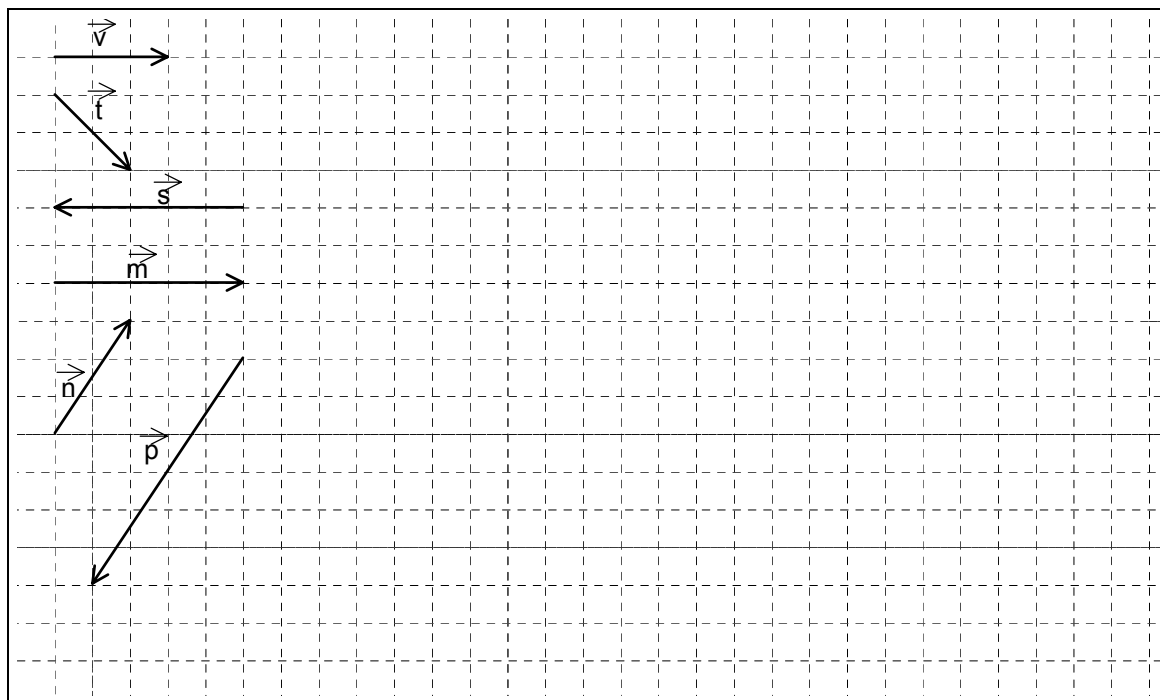
$$(k \cdot m)\vec{v} = k(m\vec{v})$$

Element neutre: el nombre 1

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

A més, si multipliquem un vector per **-1** obtenim l'oposat d'aquest vector tal com podem observar a la figura 6.

A.4. Donats els vectors representats per les fletxes:

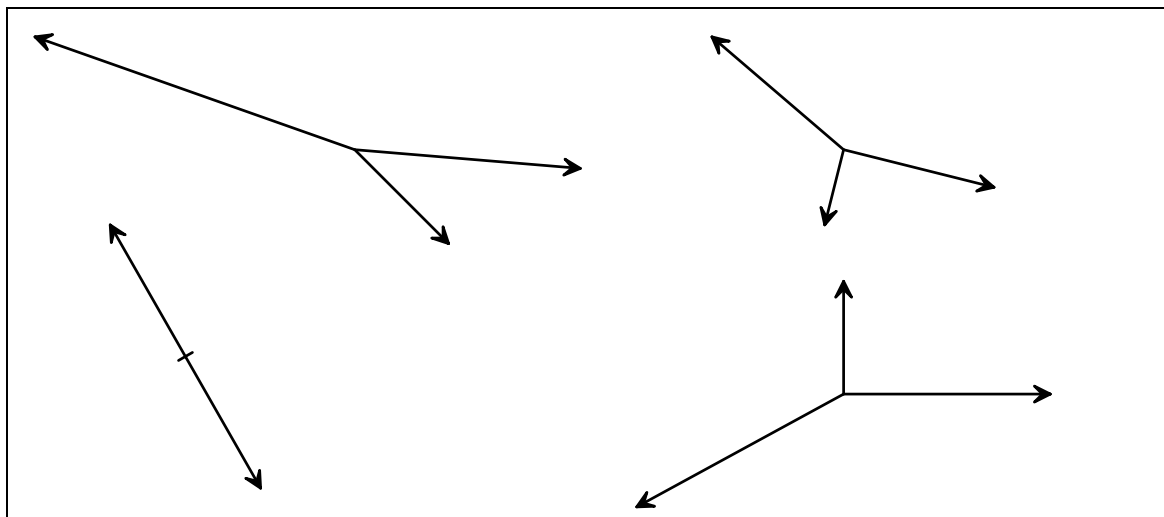


Dibuixa una fletxa representant dels vectors següents:

$$2\vec{t}, -3\vec{v}, 0,5\vec{p}, \frac{1}{5}\vec{m}, \vec{s} + 2\vec{n}, \vec{v} - \vec{n} \text{ i } 2\vec{s} - 1,5\vec{n}$$

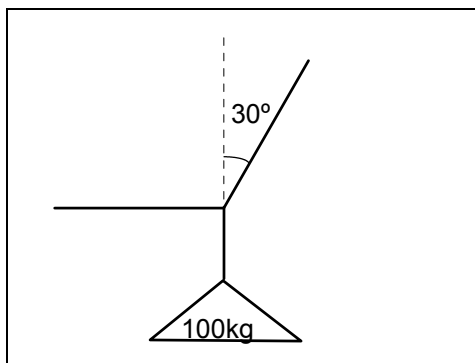
A.5.

Agafem tres dinamòmetres (o més) i els subjectem entre si estirant en tres direccions de manera que estiguin en equilibri. Comprova gràficament que la resultant de les forces és nul·la.

**A.6.**

Dos cavalls estiren, cadascun des d'una riba, una barca. Quina és la força resultant que actua sobre la barca si la intensitat de les dues forces és de 350 N i de 300 N i l'angle que formen és de 50° . Fes-ho gràficament i analítica.

A.7. Troba gràficament i analítica la tensió de les dues cordes de la figura que sostenen un cos de 100 kg, una de les quals és en direcció horitzontal i l'altra forma un angle de 30° amb la vertical.



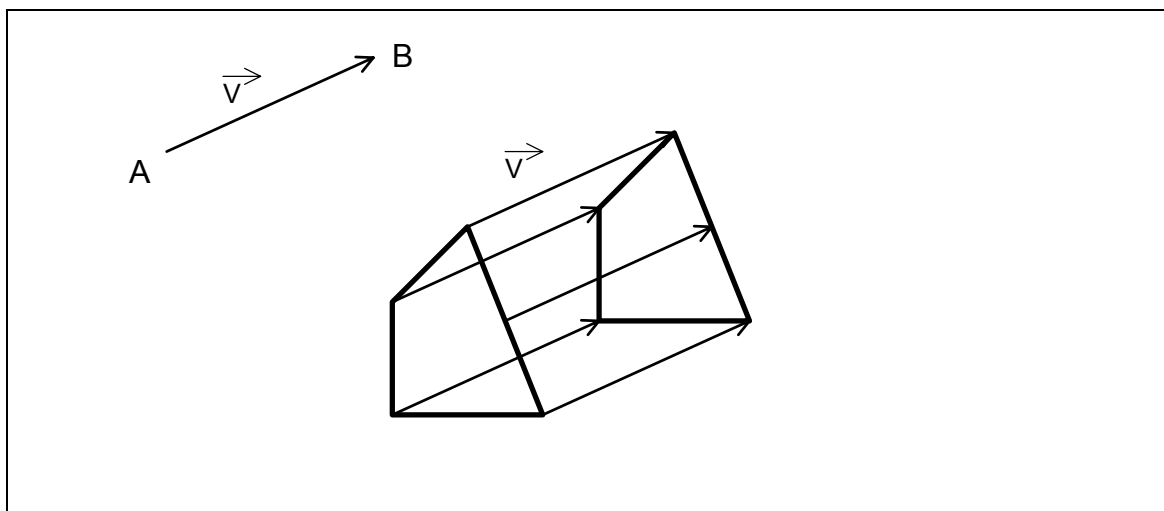
A.8.

- a) Una canoa navega a màxima potència a la velocitat de 24 km/h en aigües tranquil·les. La velocitat del corrent d'un riu és de 8 km/h. Si la canoa surt navegant a la màxima potència del motor en direcció perpendicular a la corrent del riu, calcula la velocitat efectiva a la qual navega la canoa.
- b) Si el riu fa 1 km d'amplada, quina distància haurà recorregut la canoa quan arribi a l'altra costat?

A.9.

Un avió pot volar a la velocitat de 600 km/h en atmosfera tranquil·la sense vent. Quan es dirigeix en direcció Est el vent bufa del Nord-est a la velocitat de 60 km/h. Quina és la velocitat efectiva de l'avió i quin angle es desviarà de la direcció Est?

TRANSLACIÓ DE PUNTS MITJANÇANT UN VECTOR



Si $\overrightarrow{AB}$ és un representant del vector $\vec{v}$, direm que el punt **B és el traslladat d' A** mitjançant el vector $\vec{v}$ i s'indica de la manera següent:

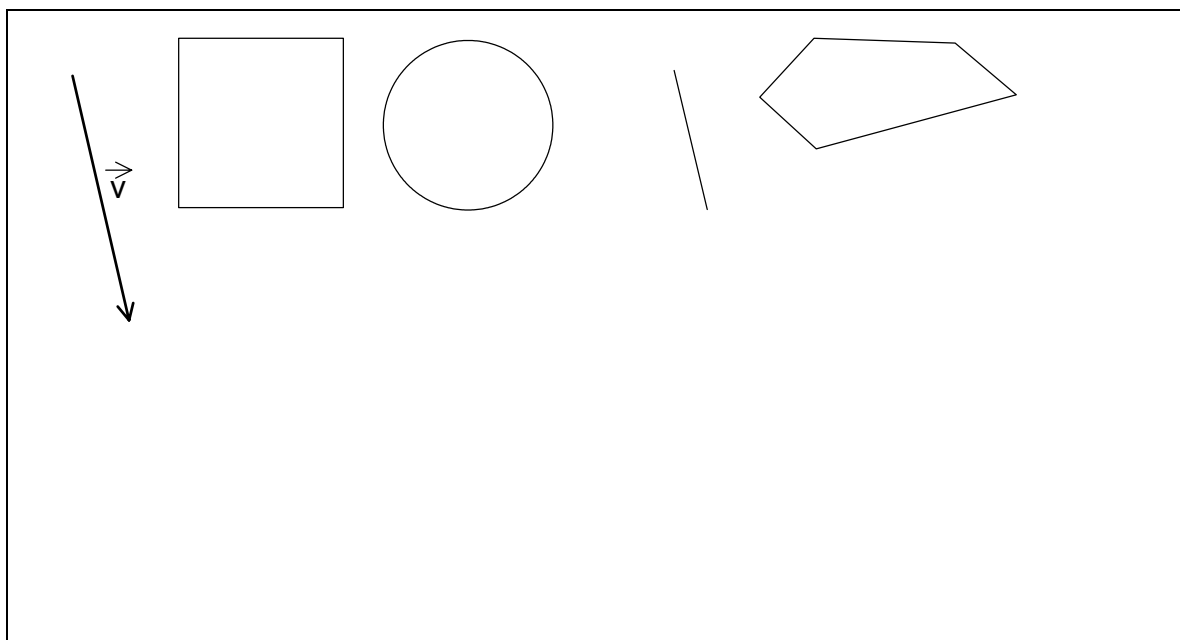
$$B = A + \vec{v}$$

Observeu que el símbol + aquí vol dir "translació".

Un vector el podem imaginar com una "màquina" que trasllada punts: el punt inicial el passa al punt final. Com que hi ha una fletxa representant del vector amb origen qualsevol punt, un vector trasllada tots els punts del pla.

Traslladar una figura geomètrica mitjançant un vector és traslladar cadascun dels punts de la figura mitjançant el vector. Tal com podem veure al dibuix, al traslladar una figura obtenim una figura igual.

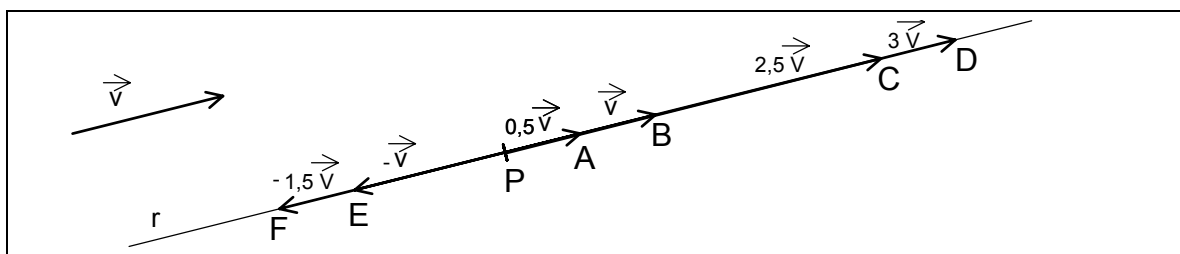
A.10. Traslada les figures següents mitjançant el vector $\vec{v}$:



VECTOR DIRECTOR D'UNA RECTA

Un vector que tingui la direcció d'una recta es diu que és un **vector director de la recta**.

Per tant una recta té infinits vectors directors, tots ells amb la mateixa direcció. Dues rectes paral·leles tenen els mateixos vectors directors.



Donats un punt P i un vector $\vec{v}$, els punts de la **recta r que passa per P i té $\vec{v}$ com a vector director** són els traslladats del punt P mitjançant tots els múltiples del vector director $k\vec{v}$, essent k un nombre real qualsevol.

Podem escriure que la recta r està formada pels punts Q :

$$\mathbf{Q = P + k \vec{v} \quad \text{expressió vectorial de la recta}}$$

on Q és un punt de la recta

P és el punt donat de la recta

+ significa traslladar

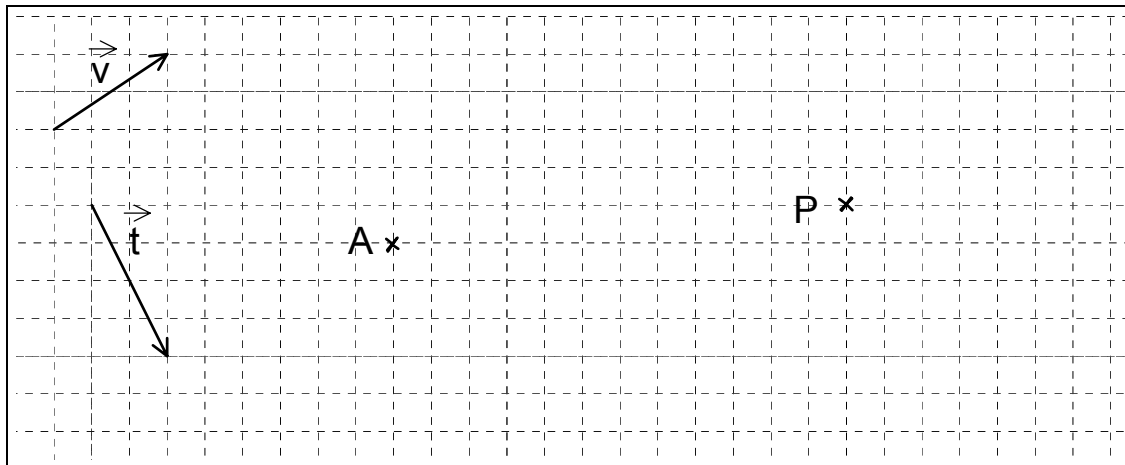
$\vec{v}$ és un vector director de la recta

$k \in \mathbf{R}$ és un escalar qualsevol.

En el dibuix podem veure com a partir del punt P obtenim diferents punts de la recta traslladant-lo mitjançant múltiples del vector director.

A.11.

- a) Dibuixa la recta que passa pel punt A i té $\vec{v}$ com a vector director.
- b) Indica sobre la recta els punts: $B = A + 2\vec{v}$ i $C = A + (-1, 5\vec{v})$
- c) Escribe l'expressió vectorial de la recta que passa per P i té vector director $\vec{t}$. Dibuixa aquesta recta.
- d) Dibuixa el punt $D = P + k\vec{v}$ $k = -1$.



B geometria amb coordenades

INTRODUCCIÓ:

NAIXEMENT DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA

En la primera meitat del segle XVII, va néixer una branca completament nova de les matemàtiques: la **Geometria analítica**, que va establir un nexa d'unió entre les corbes del pla i les equacions algebraiques amb dues variables que abans s'estudiaven per separat.

Fa 2000 anys, els grecs ja estudiaven algunes corbes del pla com: circumferències, el·lipses, hipèrboles, paràboles, les quals reben el nom de còniques perquè es poden obtenir com el resultat de la intersecció d'un con i un pla.

D'altra banda les equacions algebraiques amb dues incògnites com, per exemple, $2x+3y-1=0$, no es consideraven importants perquè tenien infinites solucions (si donem el valor $x=0$, tindrem $3y-1=0$, $y=1/3$, per tant $x=0$, $y=1/3$ és una solució d'aquesta equació; si anem donant valors a la x , obtindrem infinites solucions de l'equació).

Amb la geometria analítica es van relacionar corbes i equacions algebraiques. Quan relacionem els punts que compleixen l'equació $y=x^2-4x+3$ amb una paràbola, o els punts que compleixen $y=2x+3$ amb una recta, estem relacionant el món de la geometria amb l'aritmètica (els nombres) i l'àlgebra.

Per poder establir aquesta relació entre geometria i àlgebra és essencial poder manejar els elements geomètrics bàsics, els punts, mitjançant nombres. Això es fa assignant coordenades als punts. Per això la Geometria Analítica és la geometria amb coordenades.

L'aparició d'aquesta nova branca de les matemàtiques no va ésser accidental, la transició a Europa als nous mètodes de producció va requerir el progrés de quasi totes les ciències. Durant el segle XVI, a totes les branques de les ciències naturals s'havien anat acumulant dades empíriques i s'havien perfeccionat els instruments d'observació i, en lloc de les teories escolàstiques ja antiquades, se'n van començar a crear altres de noves. El ràpid desenvolupament de la navegació d'altura necessitava urgentment coneixements més avançats d'astronomia i mecànica, així com la guerra que anava incorporant els avenços de la mecànica.

En la primera meitat del segle XVII, al principi dels anys 1600, un grup constituït pels matemàtics més importants van començar a preveure la idea d'estudiar les corbes del pla amb mètodes numèrics (normalment se'n diu Geometria Analítica). Els que millor s'adonaren de la possibilitat de crear una nova branca de les matemàtiques foren: Pierre Fermat, conseller del parlament de la ciutat de Tolosa del Llenguadoc i matemàtic famós arreu del món, i el conegut filòsof René Descartes. Aquest està considerat com el principal creador de la geometria analítica i escriví el gran tractat filosòfic: *"Discurs del mètode per a dirigir correctament la raó i buscar la veritat en les ciències amb aplicacions a la Dioptria, Meteorologia i Geometria"*.

L'última part d'aquest treball, titulada "Geometria" i publicada l'any 1637, conté una exposició bastant completa, encara que no gaire clara, de la teoria matemàtica que des d'aquella època s'anomena **Geometria Analítica**. Descartes, amb aquesta teoria, desitjava crear un mètode general que pogués aplicar-se a la resolució de tots els problemes de la Geometria, és a dir que subministrés un mètode general de resolució.

(Aquesta introducció està basada en la introducció a la geometria analítica del llibre *La matemàtica: su contenido, métodos i significado*. Alianza Universidad, nº 68)

SISTEMA DE COORDENADES CARTESIANES

Per a poder aritmetitzar el pla, és a dir poder manejar els punts amb nombres, s'ha d'establir un sistema de referència de coordenades.

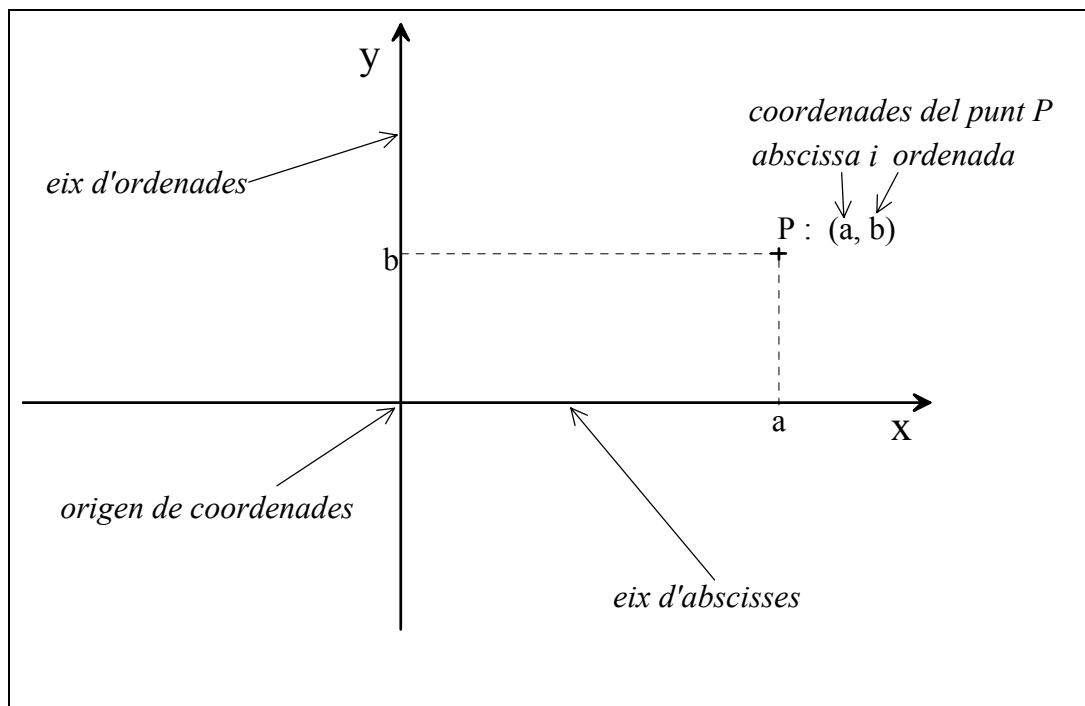
Per establir un sistema de referència cal:

- Fixar un punt, que en direm l'**origen de coordenades**.
- Donar dues direccions i un sentit en cadascuna d'elles. Aquestes direccions les visualitzem dibuixant dues rectes que passin per l'origen de coordenades. Són els **eixos de coordenades**. Les dues direccions s'acostumen a agafar perpendiculars: l'eix d'**abscisses** i l'eix d'**ordenades**.
- Establir una unitat de longitud en cada direcció. És el que en diem agafar **una escala en cada eix**.

Un cop tenim el sistema de referència **cada punt del pla té dos nombres que s'anomenen coordenades** que el determinen i l'identifiquen de forma única.

S'anomenen coordenades cartesianes en reconeixement a Descartes pare de la geometria analítica.

Cal observar que les coordenades d'un punt són úniques un cop fixada una referència, però que si canviem la referència és clar que canviaran les coordenades del punt.



B.1. Representa en un sistema de coordenades cartesianes els punts:

A: (-2, 4) ; B: (2, 4) ; C: (2, 0) ; D: (6, -4) ; E: (2, -4) ; F: (0, -2) ;

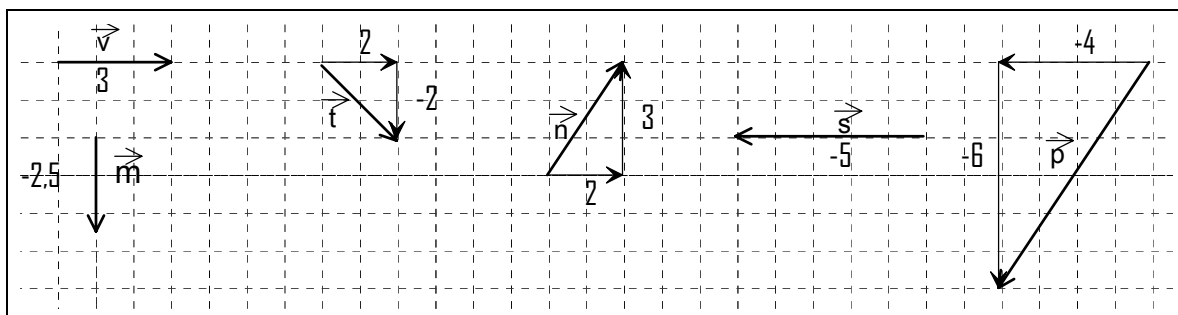
G: (-2, -4) ; H: (-2, 0) ; I: (0, 2)

Uneix amb segments de recta cada dos punts consecutius i tanca la figura unint també I i A.

COMPONENTS D'UN VECTOR

Si podem manejar els punts mitjançant dos nombres, les seves coordenades, també podem manejar els vectors mitjançant nombres si tenim un sistema de referència.

Quan treballàvem amb els vectors us haureu adonat que eren molt més manejables quan teníem una quadrícula al fons. Perquè, potser sense que us en adonéssiu, assignàveu dos nombres a cada vector: per anar del punt inicial al final de la fletxa el nombre de quadrets a la dreta o a l'esquerra que calia avançar i el nombre de quadrets amunt o avall. Si considerem que cap a la dreta i cap amunt són els sentits positius de la quadrícula, observa els nombres que assignem a cada vector del dibuix següent:



Aquests nombres són les **components del vector** i cada vector té dues components. Quan un vector té la direcció de les línies de la quadrícula una de les components serà zero.

Observa que un sistema de referència el que fa és establir una trama en el pla si ens imaginem línies paral·leles als eixos de coordenades. Per això podem considerar que en el dibuix anterior hi ha un sistema de referència de manera que les línies de la quadrícula són paral·leles als eixos i estan separades per una unitat de l'escala. Per això direm que la component esquerra-dreta és la component d'abscisses o primera component i la de dalt - baix component d'ordenades o segona component.

Per no confondre els punts i els vectors les components dels vectors les escriurem en

columna. Així el vector $\vec{v}$ del dibuix tindrà components: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

PENDENT D'UN VECTOR

El pendent d'un vector, un cop fixat un sistema de referència, és el pendent d'una recta que tingui la direcció del vector. Les rectes paral·leles tenen el mateix pendent, per tant el pendent d'un vector no depèn de la recta que considerem.

Tal com es defineixen les components d'un vector, el seu pendent es calcula dividint la segona component entre la primera, si aquesta no és zero:

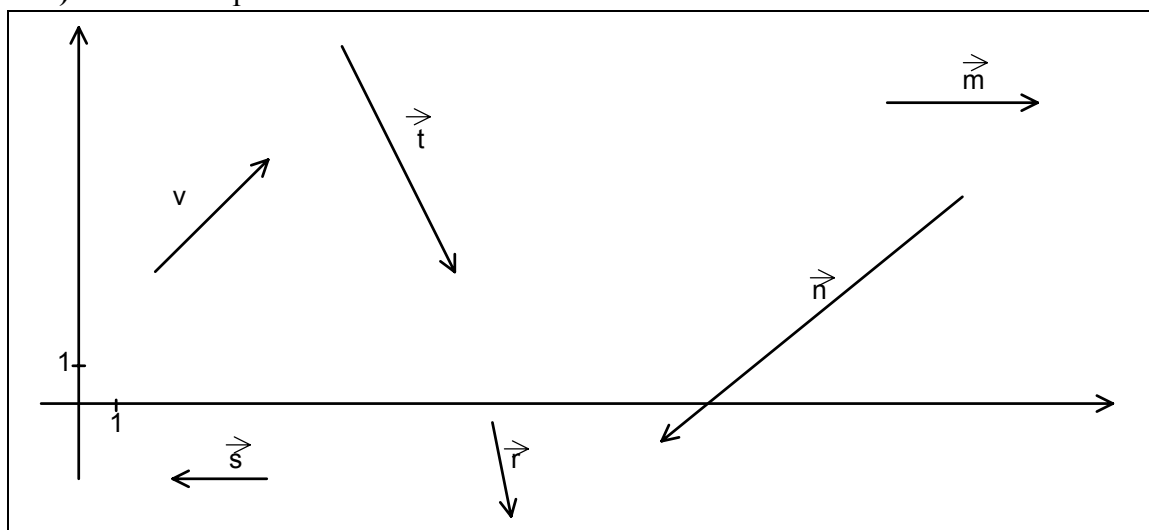
El pendent del vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ serà $\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$. Si $a = 0$ serà un vector paral·lel a l'eix d'ordenades i direm que no té pendent. En canvi un vector paral·lel a l'eix d'abscisses té pendent 0. No hem de confondre els vectors que no tenen pendent, vectors del tipus $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, amb vectors que tenen pendent 0 que són del tipus $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

B.2.

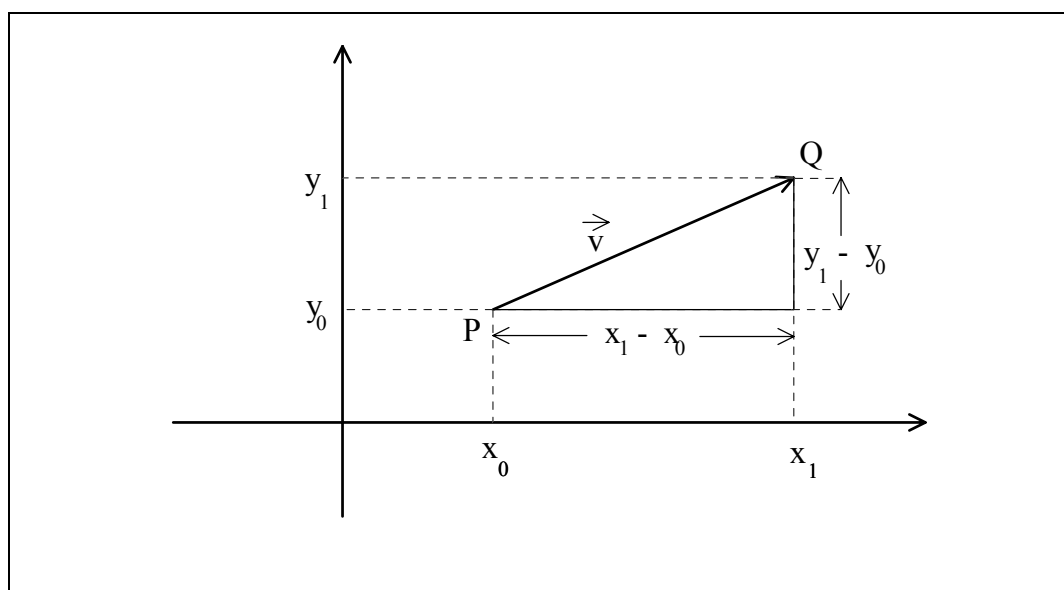
- Escriu les components de tots els vectors del dibuix anterior.
- Dibuixeu un altra fletxa representant dels mateixos vectors i comproveu que per a cada vector s'obté les mateixes components amb el nou representant.
- Calculeu el pendent dels vectors.

B.3.

- a) Escriviu les components dels vectors del dibuix següent en el sistema de referència indicat. Com que no hi ha la trama hauràs de tenir en compte l'escala dels eixos.
- b) Calculeu el pendent de cada vector



LES COMPONENTS D'UN VECTOR I LES COORDENADES DEL PUNT INICIAL I PUNT FINAL DE LA FLETXA QUE EL REPRESENTA



Si tenim un vector $\vec{v}$ de components $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ representat per la fletxa $\overrightarrow{PQ}$

$$P : (x_0, y_0) \text{ i } Q : (x_1, y_1) \text{ aleshores } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Per tant tenim les següents relacions entre les components d'un vector i les coordenades dels punts inicial i final d'una fletxa que el representi:

$$\begin{array}{ccccc} a = x_1 - x_0 & & x_1 = x_0 + a & & x_0 = x_1 - a \\ b = y_1 - y_0 & i & y_1 = y_0 + b & i & y_0 = y_1 - b \end{array}$$

Per recordar aquestes relacions podem pensar que la translació del punt inicial mitjançant el vector ens dona el punt final:

$$Q = P + \vec{v}$$

O sigui:

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x_0 + a, y_0 + b)$$

i per tant per traslladar un punt mitjançant un vector se sumen les coordenades del punt amb les components del vector. Amb això es veu el sentit de l'ús del símbol de la suma per a la translació.

Cal anar en compte a l'hora d'expressar aquestes relacions perquè així com podem "sumar" a un punt un vector perquè significa "traslladar-lo" **no té cap sentit rigorós restar punts**. Per tant encara que a la pràctica direm que:

$$\text{coord. PUNT FINAL} - \text{coord. PUNT INICIAL} = \text{comp. VECTOR}$$

A l'hora d'expressar-ho procurarem restar les coordenades però **no indicarem una resta dels punts**.

Exemple: si tenim el punt $P = (-2, 3)$ i $Q = (7, 4)$, posarem:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(-2, 3) (7, 4)} = \begin{pmatrix} 7 - (-2) \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.4.

Donades les fletxes $\overrightarrow{(4, 1) (0, -2)}$, $\overrightarrow{(2, 4) (6, 7)}$ i $\overrightarrow{(1, 9) (-3, 5)}$

- Digues quines són equipol·lents entre si calculant les components del vector que representen.
- Comprova-ho fent-ho gràficament.

B.5.

- Donada la fletxa $\overrightarrow{(1, 1) (3, 2)}$, troba analíticament el punt final de fletxes equipol·lents que tinguin origen en els punts $(-1, 4)$, $(3, 5)$ i $(2, -3)$.
- Troba també analíticament el punt inicial de fletxes que representin el vector anterior amb punt final a $(2, 5)$, $(5, -3)$ i $(-4, 1)$.

- c) Representa les fletxes que has trobat als apartats anteriors i comprova si representen el mateix vector.

B.6. Donades les fletxes següents, digues analíticament quants vectors diferents representen. Comprova-ho gràficament.

a) $\overrightarrow{(4,1)(3,3)}$ b) $\overrightarrow{(1,0)(0,2)}$ c) $\overrightarrow{(2,-3)(1,-1)}$

d) $\overrightarrow{(4,2)(3,5)}$ e) $\overrightarrow{(2,2)(1,3)}$ f) $\overrightarrow{(0,0)(-1,2)}$

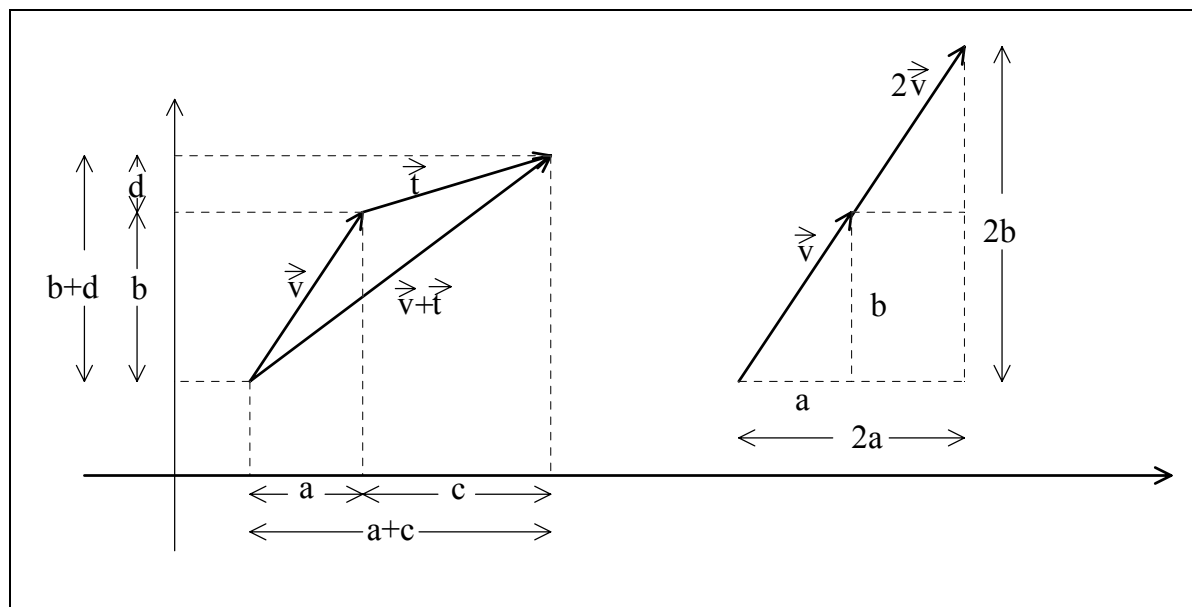
g) $\overrightarrow{(1,-3)(0,0)}$ h) $\overrightarrow{(4,-5)(3,-4)}$ i) $\overrightarrow{(-3,-1)(-2,-3)}$

B.7. Completa la taula següent:

PUNT INICIAL	PUNT FINAL	COMPONENTS	PENDENT
(4, -3)	(-1, 5)		
$(3, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$		
(-9, 1)		$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$	
	(-2, 0)	$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	
(-1, 6)			5

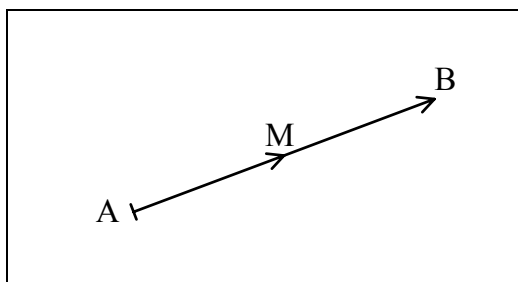
B.8. Donats els punts A=(-3, -1), B=(2, 2) i C=(-1, 3), quants paral·lelograms podem construir que tinguin com a tres dels seus quatre vèrtexs aquests tres punts? Troba en cada cas el vèrtex que falta. (Fes-ho gràficament i analítica)

B.9. Troba gràficament i analítica els vèrtexs B' i C' del triangle traslladat del triangle que té per vèrtexs A=(-2, -1), B=(2, 0) i C=(1, 5), si sabem que el vèrtex traslladat d'A és A'=(-7, 4).

SUMA I PRODUCTE PER UN ESCALAR EN COMPONENTS

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i $\vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ aleshores :

$$\vec{v} + \vec{t} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad k \vec{v} = \begin{pmatrix} k a \\ k b \end{pmatrix}$$

COORDENADES DEL PUNT MITJÀ D'UN SEGMENT

Si M és el punt mitjà del segment AB aleshores $\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AM}$.

Si les coordenades dels punts són: A : (a_x , a_y) , B : (b_x , b_y) i M : (m_x , m_y) tindrem:

$$\begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} m_x - a_x \\ m_y - a_y \end{pmatrix} \text{ o sigui } \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_x - a_x) \\ 2(m_y - a_y) \end{pmatrix} \text{ i d'aquí:}$$

$$b_x - a_x = 2(m_x - a_x) \Rightarrow b_x - a_x = 2m_x - 2a_x \Rightarrow b_x + a_x = 2m_x \Rightarrow$$

$$m_x = \frac{a_x + b_x}{2}, \quad \text{i de la mateixa manera podem trobar que} \quad m_y = \frac{a_y + b_y}{2}$$

Per tant les coordenades del punt mitjà d'un segment són **la mitjana de les coordenades dels extrems**.

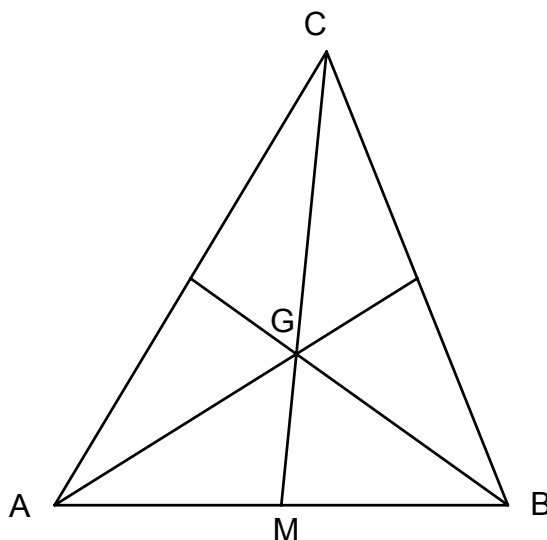
B.10.

- Troba analíticament les coordenades dels punts mitjans dels costats del quadrilàter de vèrtexs consecutius: A: (-2, 0), B: (4, 4), C: (6, 2) i D: (2, -8).
- Dibuixa el quadrilàter i uneix els punts mitjans de costats consecutius. Quin tipus de quadrilàter formen el punts mitjans?
- Demuestra analíticament que la figura és un paral·lelogram.

B.11.

Creus que el que has observat a l'exercici anterior es complirà en un quadrilàter qualsevol? Investiga-ho.

B.12. El baricentre d'un triangle.



La recta que uneix un vèrtex d'un triangle amb el punt mitjà del costat oposat s'anomena mediana del triangle. Les tres medians d'un triangle qualsevol es tallen en un punt (G) que s'anomena el baricentre del triangle. El segment d'extrems el vèrtex i el punt mitjà del costat oposat també s'anomena mediana i la seva longitud és triple que la del segment que uneix el baricentre amb el punt mitjà. Considerant vectors podem escriure:

$$\overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MG}$$

- Considera el triangle A: (1,6); B: (9, 4) i C: (5, 8). De manera semblant a com hem trobat les coordenades del punt mitjà d'un segment, calcula analíticament les coordenades (x, y) del baricentre.

- b)** Comprova que les coordenades que has trobat del baricentre es poden obtenir amb la fórmula: $x = \frac{a_x + b_x + c_x}{3}$ i $y = \frac{a_y + b_y + c_y}{3}$
- c)** Intenta demostrar les fórmules de l'apartat anterior

C equacions d'una recta

rectes que es tallen i

rectes paral·leles

UNA RECTA: ELS PUNTS QUE SÓN SOLUCIÓ D'UNA EQUACIÓ DE PRIMER GRAU AMB DUES INCÒGNITES

En la geometria analítica les rectes venen expressades per equacions algebraïques.

Una expressió del tipus $y=mx+n$ sabem que és una fórmula d'una funció polinòmica de primer grau que té per gràfic una recta de pendent m i ordenada a l'origen n . Si donem un valor a la x de la fórmula, variable independent, obtenim un valor de la y , variable dependent. Si representem en un sistema de coordenades cartesianes el conjunt de tots els punts (x,y) que compleixen que $y=mx+n$ tindrem una recta. Per això es diu que $y=mx+n$ és una **equació cartesiana de la recta**, concretament l'**equació cartesiana explícita** perquè la y està aïllada.

Però una mateixa recta la podem expressar per diferents equacions cartesianes o d'altre tipus.

EQUACIÓ CARTESIANA EXPLÍCITA: $y = mx + n$

Com que el pendent, m , i l'ordenada a l'origen, n , són únics per a una recta determinada, l'equació explícita d'una recta és també única. És a dir una recta té una sola equació cartesiana explícita.

El **pendent o coeficient angular** m ens indica la inclinació de la recta. És la tangent trigonomètrica de l'angle que determina l'eix d'abscisses amb la recta.

L'**ordenada a l'origen** n , ens indica el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades.

EXEMPLE 1. $y = 3x - 2$

És l'equació cartesiana explícita de la recta que té pendent 3 i ordenada a l'origen -2 . Per a $x = 5$, substituint a l'equació, tindrem $y = 13$, per tant el punt $(5, 13)$ és un punt de la recta.

El punt $(-1, -4)$ és de la recta? Si substituïm en l'equació de la recta $x = -1$ i $y = -4$ obtindríem que $-4 = -5$, que és fals. Per tant el punt $(-1, -4)$ no pertany a la recta.

Si anomenem α l'angle que formen l'eix d'abscisses i la recta, $\tan \alpha = 3$ (el pendent), per tant $\alpha = \arctan 3 \approx 71,6^\circ$.

Podem transformar l'equació d'una recta i obtenir equacions cartesianes equivalents. Per exemple, l'equació $3x - y - 2 = 0$ és una altra equació cartesiana, no explícita, de la mateixa recta.

EXEMPLE 2. Recta que té pendent 5 i passa pel punt $(-2, 1)$

L'equació explícita : $y = 5x + n$

Si passa per $(-2, 1)$: $1 = 5 \cdot (-2) + n$

$n = 1 + 10 = 11$. L'equació explícita de la recta és $y = 5x + 11$

EXEMPLE 3. Recta que passa pels punts $(-4, 1)$ i $(2, 3)$

El vector $\overrightarrow{(-4, 1)(2, 3)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ serà un vector director de la recta.

El pendent del vector director i per tant de la recta serà $m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

L'equació explícita serà de la forma $y = \frac{1}{3}x + n$

La recta passa pel punt $(-4, 1)$: $1 = \frac{1}{3}(-4) + n$ (podríem utilitzar l'altre punt)

$$3 = -4 + 3n$$

$$n = \frac{7}{3}$$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ és l'equació explícita de la recta que passa pels punts $(-4, 1)$ i $(2, 3)$.

Comprovació: per $x = -4$ $y = \frac{-4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1$ per tant passa per $(-4, 1)$

per $x = 2$ $y = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3$ per tant passa també per $(2, 3)$

EXEMPLE 4. Recta que té per equació $3x - 4y + 5 = 0$

És una equació cartesiana d'una recta perquè és una equació de primer grau amb dues incògnites. Aquest tipus d'equació cartesiana en direm **equació general** de la recta. Si aïllem la y obtindrem l'equació explícita:

$$-4y = -3x - 5$$

$$y = \frac{-3x - 5}{-4}$$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ equació cartesiana explícita de la recta. Recta de pendent $\frac{3}{4}$ i ordenada a l'origen $\frac{5}{4}$.

EQUACIÓ VECTORIAL D'UNA RECTA $(x, y) = (x_0, y_0) + k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

L'expressió vectorial d'una recta que passa pel punt P i té vector director $\vec{v}$ és :

$$Q = P + k \vec{v}$$

I en coordenades i components tindrem:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{equació vectorial de la recta}$$

on (x, y) és un punt de la recta

(x_0, y_0) és el punt donat de la recta

+ significa traslladar

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ és un vector director de la recta

$k \in \mathbb{R}$ és el **paràmetre**: un escalar qualsevol.

Si donem valors a k en l'equació vectorial obtindrem punts de la recta.

Podem escriure moltes equacions vectorials diferents d'una mateixa recta perquè podem agafar qualsevol punt de la recta com a punt inicial i qualsevol vector director.

EQUACIONS PARAMÈTRIQUES D'UNA RECTA

$$\begin{cases} x = x_0 + k a \\ y = y_0 + k b \end{cases}$$

De l'equació vectorial d'una recta:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tindrem $(x, y) = (x_0 + k a, y_0 + k b)$ i d'aquí:

$$\begin{cases} x = x_0 + k a \\ y = y_0 + k b \end{cases} \quad \text{equacions paramètriques de la recta que passa}$$

pel punt (x_0, y_0) i té vector director $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donant valors al paràmetre k obtindrem les coordenades (x, y) dels punts de la recta.

EQUACIÓ CARTESIANA CONTÍNUA

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Si una recta té equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = x_0 + k a \\ y = y_0 + k b \end{cases}$$

un punt (x, y) serà de la recta si i només si hi ha un valor del paràmetre k per al qual obtinguem el punt en les equacions paramètriques. És a dir si aïllem el paràmetre en les dues equacions:

$$k = \frac{x - x_0}{a} \quad \text{i} \quad k = \frac{y - y_0}{b} \quad (\text{suposem que } a \neq 0 \text{ i } b \neq 0)$$

el punt (x, y) serà de la recta si les dues expressions són iguals:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{equació cartesiana contínua de la recta que passa}$$

pel punt (x_0, y_0) i té vector director $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. En diem una equació cartesiana perquè és una relació algebraica que compleixen les coordenades (x, y) de la recta.

L'equació contínua d'una recta no és única: depèn del punt de la recta que escollim i del vector director.

Si alguna de les components del vector director és nul·la es tractarà d'una recta paral·lela a un dels eixos de coordenades. En aquest cas no podem escriure l'equació cartesiana contínua: hi haurà una paramètrica que ja serà l'equació cartesiana de la recta.

EQUACIÓ CARTESIANA D'UNA RECTA A PARTIR D'UN PUNT I EL PENDENT : $y - y_0 = m(x - x_0)$

Si l'equació contínua d'una recta és:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Aïllant $y - y_0$ obtenim:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{i si posem el pendent } \frac{b}{a} = m$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si d'aquí aïllem la y :

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

$$y = mx - mx_0 + y_0 \quad \text{i si anomenem } -mx_0 + y_0 = n$$

tindrem

$$y = mx + n$$

que és l'**equació explícita de la recta**.

Com ja sabem, aquesta és la fórmula de les funcions polinòmiques de primer grau que tenen per gràfic una recta.

EQUACIÓ CARTESIANA GENERAL D'UNA RECTA: $Ax + By + C = 0$

Si desenvolupem l'equació contínua o explícita d'una recta podem obtenir una equació del tipus :

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{equació general de la recta}$$

de manera que si aïllem la y tindrem l'equació explícita:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{que ens dóna la relació entre els}$$

coeficients A i B de l'equació general i el vector director i el pendent de la recta:

$$\text{pendent } m = \frac{-A}{B} \quad \text{i vector director } \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$$

L'equació general, com la contínua, no és única. Podem multiplicar l'equació per un nombre diferent de zero i obtindrem una altra equació general equivalent de la mateixa recta.

EXEMPLE 5. Recta que passa pel punt $(2, -3)$ i té la direcció del vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$(x, y) = (2, -3) + k \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{és una equació vectorial de la recta.}$$

Si donem valors al paràmetre k obtindrem punts de la recta. Per exemple:

$$\text{per a } k=2 \quad (x,y) = (2, -3) + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (0, 5)$$

$$\text{per a } k=-3 \quad (x,y) = (2, -3) - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (5, -15)$$

Els punts $(0, 5)$ i $(5, -15)$ són punts de la recta.

L'equació vectorial de la recta no és única. Així si considerem el punt $(0, 5)$ i un vector

director amb la mateixa direcció com $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, podem escriure una altra equació vectorial de la mateixa recta:

$$(x, y) = (0, 5) + t \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Quan hem donat valors al paràmetre k per obtenir punts de la recta, de fet hem usat unes equacions paramètriques de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -3 + 4k \end{cases} \quad \text{i així per a } k=2 \quad \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = -3 + 4 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$

Per passar de les equacions paramètriques a la cartesiana contínua hem "d'eliminar el paràmetre" és a dir posar la condició per tal que el punt (x,y) es pugui obtenir amb el mateix paràmetre en les dues equacions. Això ho fem aïllant el paràmetre en les dues equacions i igualant:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{4} \quad \text{i desenvolupant aquesta equació contínua:}$$

$$4x - 8 = -y - 3$$

$$4x + y - 5 = 0 \quad \text{que és una equació general de la recta, i aïllant la } y:$$

$$y = -4x + 5 \quad \text{equació explícita de la recta.}$$

Comprovació a partir de les dades inicials: si el vector director és $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ el pendent és -4 i per $x=2$ tenim $y = -4 \cdot 2 + 5 = -3$, o sigui passa pel punt $(2, -3)$.

Observem que l'equació explícita l'hauríem pogut trobar directament a partir de les dades inicials: si la recta té pendent -4 i passa pel punt $(2, -3)$ tindrem:

$$y + 3 = -4(x - 2) \quad \text{i d'aquí:}$$

$$y = -4x + 8 - 3$$

$$y = -4x + 5$$

Una manera d'entendre el significat de les equacions paramètriques en relació a l'equació cartesiana de la recta és pensar que les paramètriques expressen totes les solucions de l'equació de primer grau en dues incògnites:

Les solucions de l'equació $y = -4x + 5$ són les parelles de valors (x, y) tal que:

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -3 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

O bé, unes altres paramètriques que podem obtenir directament de l'equació explícita si considerem que la variable x és un paràmetre, donant valors al qual obtenim els punts de la recta. De manera que si considerem $x = q$ serà $y = -4q + 5$, i tindrem unes altres paramètriques de la mateixa recta:

$$\begin{cases} x = q \\ y = 5 - 4q \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}$$

EXEMPLE 6. L'eix d'ordenades.

L'eix d'ordenades és una recta que passa pel punt $(0, 0)$ i té vector director $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Una equació vectorial $(x, y) = (0, 0) + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Unes equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot k \\ y = 0 + 1 \cdot k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$

L'equació $x = 0$ ens indica que els punts de la recta són de la forma $(0, y)$, per tant $x = 0$ és ja l'equació cartesiana de l'eix d'ordenades.

Observem que **l'eix d'ordenades i les rectes paral·leles a ell** no tenen equació cartesiana explícita. Són rectes que no tenen pendent. La seva equació cartesiana té la forma $x = a$.

En canvi **les rectes paral·leles a l'eix d'abscisses** són les que tenen pendent zero. La seva equació cartesiana explícita serà del tipus $y = n$. L'eix d'abscisses tindrà equació $y = 0$.

EXEMPLE 7. Recta d'equació general $2x + 4y - 3 = 0$

Aïllant la y :

$$4y = -2x + 3$$

$$y = \frac{-2x + 3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad \text{equació explícita de la recta.}$$

Per tant coneixent el pendent $m = -\frac{1}{2}$ podem trobar un vector director i escriure una equació vectorial de la recta.

$$(x, y) = (0, \frac{3}{4}) + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Podem trobar un vector director de la recta directament a partir dels coeficients de l'equació

general $2x + 4y - 3 = 0$: $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

C.1 Troba l'equació cartesiana explícita de les rectes següents:

- a) Recta que passa pel punt $(-3, 0)$ i té pendent 5.
- b) Recta que passa pels punts $(1, -2)$ i $(4, 4)$.
- c) Recta d'equació: $5x - 3y + 1 = 0$
- d) Recta que passa pel punt $(0, 4)$ i forma un angle de 35° amb l'eix d'abscisses.

C.2 Comprova analíticament quins dels punts pertanyen o no a les rectes dels apartats següents:

R: $(5, 4)$ S: $(-1, -2)$ T: $(0, 5)$ U: $(0, 0)$ V: $(\frac{1}{2}, 0)$

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{4x - 2}{3}$

c) $y = -\frac{2}{5}x + 6$

C.3 Calcula en cada cas el valor de t per tal que la recta compleixi la condició indicada:

- a) La recta $y = tx + 7$ passi pel punt $(3, -4)$
- b) La recta $y = \frac{tx + 2}{3}$ sigui paral·lela a la recta $y = 2x - 5$.
- c) La recta $5y = (3t + 2)x - 2t + 3$ passi pel punt $(2, -1)$

C.4 Troba l'equació d'una recta que passa pel punt $(2, 5)$ i determina amb els eixos de coordenades un triangle rectangle isòsceles. Només hi ha una recta que compleixi aquesta condició?

C.5

- a) Representa la recta d'equació vectorial: $(x, y) = (3, -1) + k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b) Troba analíticament les coordenades de tres punts de la recta. Comprova en el gràfic que efectivament són punts de la recta.
- c) Escriu unes equacions paramètriques de la recta.
- d) Troba una equació contínua de la recta.
- e) A partir de l'equació contínua troba l'equació explícita.
- f) Troba l'equació explícita de la recta directament a partir de la informació de l'equació vectorial sense escriure l'equació contínua.

C.6 Escriu una equació vectorial i unes paramètriques de les rectes:

- a) Recta que passa pel punt $(-3, 5)$ i té vector director $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- b) Recta que passa pel punt $(4, -2)$ i té pendent 3.
- c) Recta que passa pels punts $(5, -1)$ i $(7, -2)$.
- d) Recta d'equació $y = 2x + 6$.
- e) Recta d'equació $\frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-1}$.
- f) Recta d'equació $3x + 2y - 6 = 0$.
- g) L'eix d'abscisses.
- h) Recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passa pel punt $(1, 6)$.

C.7 Comprova analíticament quins dels punts pertanyen o no a les rectes dels apartats següents:

$$R: (0, 4) \quad S: (-1, 3) \quad T: (0, 5) \quad U: (2, 3) \quad V: (7, -7)$$

a) $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$

b) $x + 2y - 8 = 0$

c) $(x, y) = (5, 9) + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $y = 3$

C.8 Indica un vector director de cada una de les rectes següents i escriu-ne una equació vectorial:

a) $y = \frac{2x+7}{4}$

b) $3x + 5y - 2 = 0$

c) $3x - 5y + 16 = 0$

d) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{5}$

e) $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

C.9 Escriu en cada cas l'equació cartesiana de la recta que passa pels punts indicats en la forma que s'indica:

- a) Equació contínua de la recta que passa per (2, 3) i (5, -1)
- b) Equació general de la recta que passa per (0, -2) i (4, 5)
- c) Equació explícita de la recta que passa per (-2, 4) i (0, -3)

C.10 Troba quina equació de la primera columna representa la mateixa recta que una altra de la segona:

1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1}$

a) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1}$

2) $\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = k + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -5k + 2 \\ y = 3k - 2 \end{cases}$

3) $(x, y) = (3, -1) + k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(x, y) = (-3, 1) + k \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $3x + 5y + 4 = 0$

d) $x + 3y + 5 = 0$

POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

Dues rectes en el pla poden ser **paral·leles** si no tenen cap punt en comú, o **tallar-se** en un punt.

Dues rectes són paral·leles si tenen la mateixa direcció i per tant el mateix pendent.

Comparant el pendent de dues rectes diferents podrem saber de forma ràpida si les rectes són paral·leles o es tallen.

El procediment general per estudiar analíticament la posició relativa de dues rectes i trobar el punt d'intersecció consisteix en **resoldre el sistema de les dues equacions cartesianes de les rectes**: la solució del sistema ens dóna les coordenades del punt de tall. Si el sistema no té solució les dues rectes són paral·leles.

Si les rectes ens venen donades per les equacions vectorial o paramètriques per calcular el punt de tall podem trobar les equacions cartesianes i resoldre el sistema. Però també es pot trobar el punt de tall directament a partir de les equacions paramètriques. A continuació hi trobaràs un esquema de com trobar la intersecció de dues rectes segons el tipus d'equació en què venen donades.

DUES EQUACIONS CARTESIANES

Cal **resoldre el sistema** format per les dues equacions cartesianes amb les incògnites x i y pel mètode de resolució que creguem més pràctic.

- Si el sistema té solució, **les solucions de les incògnites x i y ens donaran les coordenades del punt de tall**. És diu que el sistema és COMPATIBLE DETERMINAT.
- Si el sistema **no té solució les rectes són paral·leles** (segurament ja ens n'hauem adonat que tenen el mateix pendent). És diu que el sistema és INCOMPATIBLE.
- Atenció: com que una mateixa recta pot presentar la seva equació cartesiana de formes diferents, **podria ser que les dues equacions corresponguessin a una mateixa recta**. En aquest cas a més de tenir el mateix pendent tindran un punt en comú i per tant els tindran tots. El sistema tindrà infinites solucions: el sistema es diu COMPATIBLE INDETERMINAT.
- **Comprovarem que el punt obtingut pertany a les dues rectes**.

EQUACIÓ CARTESIANA D'UNA RECTA I PARAMÈTRIQUES DE L'ALTRA

Donant valors al paràmetre obtindrem tots els punts de la segona recta. Es tracta de buscar quin d'aquests punts pertany a la primera recta: cal trobar un paràmetre que ens doni un punt que compleixi l'equació cartesiana. Per això **substituïrem la x i la y de l'equació cartesiana per les equacions paramètriques de l'altra recta i resoldrem l'equació de primer grau** que tindrà per incògnita el paràmetre.

- Si l'equació de primer grau amb el paràmetre com a incògnita té solució, **substituïrem aquesta solució en les equacions paramètriques** i obtindrem el punt de tall.
- Si l'equació de primer grau no té solució, les dues rectes seran paral·leles. Podem comprovar que tenen el mateix pendent.
- Si l'equació té infinites solucions es tracta de la mateixa recta. Podem comprovar que tenen el mateix pendent i que un punt qualsevol de la recta en paramètriques pertany a l'altra recta.

EQUACIONS PARAMÈTRIQUES DE LES DUES RECTES

Es tracta de buscar un valor per a cada paràmetre (atenció: cal anomenar els dos paràmetres amb lletres diferents!) que ens doni el mateix punt en les dues rectes. Per això **resoldrem el sistema** de dues equacions amb dues incògnites **que s'obté a l'igualar les dues coordenades x i y de les dues rectes**. Les incògnites del sistema seran els dos paràmetres.

- Si el sistema té solució, substituint un dels paràmetres solució trobats a les paramètriques corresponents obtindrem el punt de tall. Podem comprovar que amb l'altre paràmetre obtenim el mateix punt.
- Si el sistema no té solució, les dues rectes són paral·leles. Segurament ja ens haurem adonat que les dues rectes tenen el mateix pendent.
- Si el sistema té infinites solucions, les equacions paramètriques són d'una mateixa recta. Podem comprovar que tenen el mateix pendent i que el vector determinat per un punt d'una recta i un punt de l'altre està en la direcció de les rectes.

EXEMPLE 8. recta r: $y = 2x - 7$; recta s: $y = \frac{5x+3}{4}$

Observem que no tenen el mateix pendent (2 i $\frac{5}{4}$) per tant són dues rectes que es tallen. Plantegem el sistema, que resolldrem per igualació:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 7 \\ y = \frac{5x+3}{4} \end{array} \right\} \quad 2x - 7 = \frac{5x+3}{4} \quad \text{Resolent l'equació tenim } x = \frac{31}{3}$$

Substituint en una de les equacions $y = \frac{41}{3}$

El punt de tall de les rectes r i s té coordenades $\left(\frac{31}{3}, \frac{41}{3}\right)$

EXEMPLE 9. recta r: $2x + 5y + 3 = 0$; recta s: $\frac{x-4}{6} = \frac{y+2}{5}$

Observem que no tenen el mateix pendent ($-\frac{2}{5}$ i $\frac{5}{6}$) per tant són dues rectes que es tallen. Plantegem el sistema que després de desenvolupar l'equació de la recta s i el resolldrem per reducció:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y + 3 = 0 \\ \frac{x-4}{6} = \frac{y+2}{5} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 5y = -3 \\ 5x - 6y = 32 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \bullet 5 \quad 10x + 25y = -15 \\ \bullet (-2) \quad -10x + 12y = -64 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 37y = -79 \\ y = -\frac{79}{37} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y = -3 \\ 5x - 6y = 32 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \bullet 6 \quad 12x + 30y = -18 \\ \bullet 5 \quad 25x - 30y = 160 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 37x = 142 \\ x = \frac{142}{37} \end{array} \right\}$$

El punt de tall de les rectes r i s té coordenades $\left(\frac{142}{37}, -\frac{79}{37}\right)$

EXEMPLE 10. Recta r $y = 5x - 3$ i recta s $10x - 2y + 7 = 0$

Tenen el mateix pendent 5 , per tant són paral·leles o bé són la mateixa recta, la qual cosa veiem que no és així perquè tenen diferent ordenada a l'origen.

Si no ens haguéssim adonat que eren paral·leles al resolldre el sistema tindriem:

$$\left. \begin{array}{l} y = 5x - 3 \\ 10x - 2y + 7 = 0 \end{array} \right\} \text{Per substitució: } 10x - 2(5x - 3) + 7 = 0$$

$$0x + 13 = 0$$

$$13 = 0 \quad : \text{ el sistema no té solució}$$

Les rectes r i s són rectes paral·leles.

EXEMPLE 11. Recta r $2x + 5y + 3 = 0$ i recta s $\begin{cases} x = 4 + 6k \\ y = -2 + 5k \end{cases}$ (rectes de l'exemple 9)

No són paral·leles. Podríem trobar una equació cartesiana de la recta s i resoldre el sistema de les dues equacions cartesianes. Però substituint les paramètriques de la recta s en la cartesiana de la r :

$$2(4+6k) + 5(-2+5k) + 3 = 0$$

$$37k = -1$$

$$k = -\frac{1}{37} \quad \text{i substituint en les paramètriques}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 6\left(-\frac{1}{37}\right) & x = \frac{142}{37} \\ y = -2 + 5\left(-\frac{1}{37}\right) & y = -\frac{79}{37} \end{cases}$$

Les rectes r i s es tallen en el punt $\left(\frac{142}{37}, -\frac{79}{37}\right)$

EXEMPLE 12. Recta r $\begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = -3 + k \end{cases}$ i recta s $\begin{cases} x = -10 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Només comparant els vectors directores $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ veiem que no són paral·leles. Per trobar el punt de tall podríem trobar una equació cartesiana de cada recta i resoldre el sistema. Però ho podem fer directament igualant les equacions paramètriques:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 5k = -10 + 2t \\ -3 + k = -2 - 3t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5k - 2t = -12 \\ k + 3t = 1 \end{array} \right\} \quad \bullet(-5) \quad \left. \begin{array}{l} 5k - 2t = -12 \\ -5k - 15t = -5 \end{array} \right\}$$

$$-17t = -17 \quad t = 1$$

i substituint el paràmetre $t=1$ a les paramètriques de s :

$$\begin{cases} x = -10 + 2 \\ y = -2 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -8 \\ y = -5 \end{cases}$$

Si haguéssim aïllat k en comptes de t hauríem obtingut $k = -2$ que substituint a les paramètriques ens hauria donat el mateix punt.

Les rectes r i s es tallen en el punt $(-8, -5)$.

C.11 Troba el punt on es tallen, si es tallen, les següents parelles de rectes. Fes-ho analíticament i comprova-ho gràficament:

a) $y = 2x - 7$ i $y = -x + 2$

b) $5x - y = 4$ i $y = -3x + 6$

c) $2x+y=0$ i $(x, y) = (-2, 7) + k \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-2}$ i $y = \frac{9-2x}{3}$

C.12

- a) Troba les equacions de les tres medianes del triangle determinat pels punts A (2, 0), B (0, 4) i C (8, 2).
b) Troba el punt en què es tallen dues de les medianes.
c) Comprova que aquest punt, el baricentre, també pertany a l'altra mediana.

C.13

Determina el valor de m per tal que les tres rectes següents es tallin en un mateix punt.

$$x - y + 2 = 0$$

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$(m+2)x + (2m-1)y + m + 1 = 0$$

C.14

Determina la posició relativa de les parelles de rectes següents. Si es tallen troba el punt d'intersecció:

- a) Recta que passa per (0, 0) i (-1, 4) i recta que passa per (-3, -10) i (15, -16).
b) Recta que passa per (2, 2) i (5, 1) i recta que passa per (-4, 3) i (2, 1).

C.15

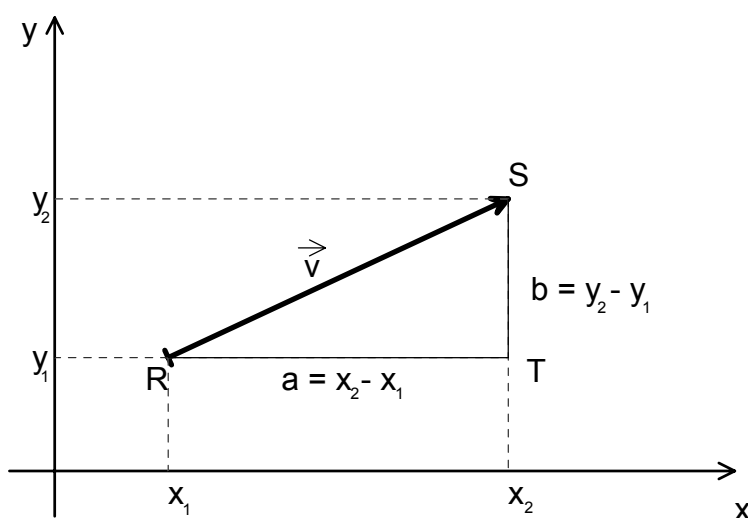
Dos costats d'un paral·lelogram tenen per equacions $y = 2x$ i $2y = x$; si les diagonals es tallen en el punt (2, 3), troba les coordenades dels quatre vèrtexs del paral·lelogram.

D

distàncies

llocs geomètrics: la circumferència

MÒDUL D'UN VECTOR. DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS



CÀLCUL DEL MÒDUL D'UN VECTOR A PARTIR DE LES COMPONENTS

El **mòdul** d'un vector és la **longitud** del segment d'una fletxa que el representi. A vegades també se'n diu la **norma** del vector. S'expressa de diverses maneres: o bé simplement traient la fletxa, o posant el vector entre línies verticals o dobles línies.

Longitud o mòdul o norma del vector $\vec{v}$: $v = |\vec{v}| = \|\vec{v}\|$

Si tenim el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, aleshores aplicant el teorema de Pitàgores al triangle RST (observa la figura) tindrem:

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

CÀLCUL DE LA DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS A PARTIR DE LES COORDENADES

Com que la distància entre dos punts és el mòdul del vector que determinen aquest dos punts, tindrem:

$$d(R, S) = \|\vec{RS}\|$$

i considerant les coordenades dels punts: $\vec{RS} = \overrightarrow{(x_1, y_1)(x_2, y_2)} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

$$d(R, S) = d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

D.1

Calcula la norma dels vectors: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

D.2

Comprova si el triangle A:(-10, 3), B:(4, 8) i C:(-7, -2) és o no isòsceles.

D.3

Demostra que el quadrilàter de vèrtexs (1, -3), (5, -1), (7, 3) i (3, 1) és un rombe i troba la seva àrea.

D.4

Troba la longitud dels costats del triangle determinat pels punts (2, 0), (7, -2) i (6, 10) i demostra que és un triangle rectangle.

D.5

Busca un vector paral·lel al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ que tingui norma 1. Fes el mateix amb el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En general escriu les components d'un vector unitari paral·lel al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

D.6

Donat el triangle de vèrtexs A:(-1,0), B:(2,3) i C: (8,1). Calcula la longitud dels seus costats i utilitza el teorema del cosinus per trobar els seus angles.

D.7

Si A:(2, 3), B:(8, 1), comprova si els punts (6, 5), (4, 0) , (7, 6) i (1, -10) pertanyen o no a la mediatriu del segment AB.

D.8

Comprova si els punts (3, 6), ($\sqrt{24}$, 3), (4, 4), (5, 2), (-3, 7) i (-2, -3) pertanyen o no a la circumferència de centre el punt (0, 2) i radi 5.

LA CIRCUMFERÈNCIA

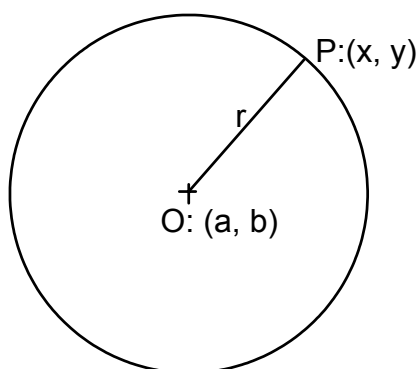
LLOCS GEOMÈTRICS

Hi ha figures geomètriques que es poden definir com un conjunt de punts que compleixen una propietat. Aleshores es diu que aquesta figura és **el lloc geomètric dels punts que compleixen la propietat**.

Per exemple la mediatriu d'un segment és el lloc geomètric dels punts que compleixen la propietat d'estar a la mateixa distància dels extrems del segment. Si el segment és AB i considerem P un punt de la mediatriu, aquest punt haurà de verificar que:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

EQUACIÓ D'UNA CIRCUMFERÈNCIA



Una circumferència de centre el punt O i radi r és el **lloc geomètric dels punts** tal que la seva distància al centre O és igual al radi r.

Per tant els punts P d'una circumferència de centre O i radi r són aquells punts que compleixen la condició:

$$d(O, P) = r$$

D'aquí podem obtenir la condició analítica o equació que hauran de complir les coordenades dels punts d'una circumferència.

Si les coordenades del centre són $O: (a, b)$, per tal que un punt $P: (x, y)$ estigui a la circumferència haurà de complir :

$$d[(a, b), (x, y)] = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \text{i elevat al quadrat els dos membres:}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{i desenvolupant :}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

de manera que l'equació general d'una circumferència de centre (a, b) i radi r té la forma:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad \text{on :} \quad \begin{aligned} m &= -2a \\ n &= -2b \\ p &= a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned}$$

RECONeixEMENT D'UNA EQUACIÓ COM EQUACIÓ D'UNA CIRCUMFERÈNCIA

Si tenim una equació de la forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ podem suposar que els punts (x, y) que en són solució formen una circumferència.

Per determinar el seu centre (a, b) :

$$\begin{aligned} m = -2a &\Rightarrow a = -\frac{m}{2} \\ n = -2b &\Rightarrow b = -\frac{n}{2} \end{aligned}$$

I per determinar el radi r :

$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$

Si $a^2 + b^2 - p \leq 0$ no podrem calcular el radi o serà 0, i per tant l'equació no serà l'equació d'una circumferència.

Si considerem la forma general d'una equació de segon grau amb dues incògnites:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Per tal que una equació d'aquest tipus sigui d'una circumferència ha de complir:

- 1. No hi ha d'haver el terme en xy . O sigui $C=0$.
- 2. Els coeficients de x^2 i y^2 han de ser iguals : $A = B$

Aleshores podrem dividir tota l'equació per A i obtindrem una equació equivalent del tipus $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, de manera que podrem trobar: $a = -\frac{m}{2}$ i $b = -\frac{n}{2}$. I per tal que sigui una circumferència haurem de poder trobar el radi, o sigui s'ha de complir:

- 3. $a^2 + b^2 - p > 0$

D.9

Donat el segment determinat pels punts M:(0, 0) i N:(2, -2).

- a) Escriu la condició que han de complir els punts de coordenades (x, y) que equidisten dels extrems del segment. De quina figura geomètrica es tracta?
- b) Dibuixa el segment i la figura del lloc geomètric.
- c) Desenvolupa la condició per tal de trobar l'equació simplificada d'aquest lloc geomètric.
- d) Comprova en el dibuix que l'equació que has trobat és correcta.

D.10

Troba l'equació de les circumferències següents:

- a) De centre el punt (0, 0) i radi 2.
- b) De centre el punt (0, -2) i radi 3.
- c) De centre el punt (-1, 3) i que passa pel punt (1, 1).

D.11

Donada la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$, determina si els punts següents estan dins, fora o sobre de la circumferència: (5, -2), (-2, 6) i (5, 3).

D.12

Digues si les equacions següents corresponen a una circumferència. En cas que sigui així determina el seu centre i el seu radi i representa-la.

- a) $x^2 + y^2 - 36 = 0$
- b) $2x^2 + y^2 + 2x - 5y - 1 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$
- d) $x^2 + y^2 + 8y = 0$
- e) $x^2 + y^2 + 2xy + 3y - 6 = 0$
- f) $x^2 - y^2 + 10x + 2y + 1 = 0$
- g) $2x^2 + 2y^2 - 9 = 0$
- h) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 15 = 0$
- i) $x^2 + y^2 + x + y = 0$
- j) $x^2 + y^2 - 5x + 6,25 = 0$

D.13

Troba l'equació del lloc geomètric dels punts del pla que la seva distància al punt (0, 0) és el doble que la seva distància al punt (3, 0). Pots identificar a quina figura correspon l'equació?

E projecció ortogonal

producte escalar

PERPENDICULARITAT

Rectes perpendiculars: dues rectes són perpendiculars o **ortogonals** si es tallen formant quatre angles rectes.

Vectors ortogonals: dos vectors són ortogonals o perpendiculars si ho són les rectes que contenen els seus representants.

Vector ortogonal a una recta: un vector és perpendicular o ortogonal a una recta si ho és als vectors directors de la recta.

E.1

- a) Dibuixa una fletxa representant del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dibuixa un vector perpendicular a l'anterior i de la mateixa longitud: quants vectors hi ha amb aquestes condicions? Indica les components d'aquests vectors.
- b) Fes el mateix amb el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- c) Escribe l'expressió general de tots els vectors ortogonals al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

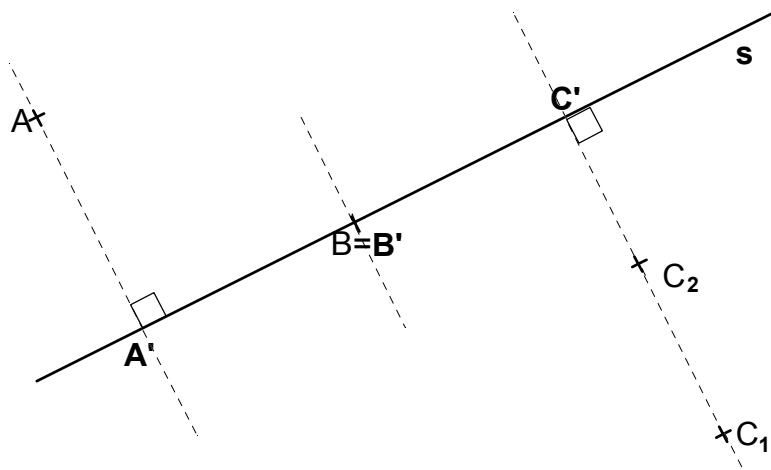
E.2

- a) Troba l'equació vectorial d'una recta que passa pel punt $(3, -2)$ i és perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- b) Troba l'equació cartesiana d'una recta que passa pel punt $(0, 5)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $(3, 2)$ i $(6, -2)$.

E.3 Troba l'equació de la mediatriu del segment d'extrems A: $(-1, 4)$ i B: $(5, 2)$.

PROJECCIONS ORTOGONALS

PROJECCIÓ ORTOGONAL D'UN PUNT SOBRE UNA RECTA



La projecció ortogonal d'un punt sobre una recta **és un punt** que està sobre la recta i que és la intersecció de la recta amb una altra recta que passa pel punt que projectem i és perpendicular a la recta sobre la qual projectem el punt.

En el gràfic tenim que A' és la projecció ortogonal sobre la recta s del punt A . Ho indicarem simbòlicament:

$$\text{Proj}_s(A) = A'$$

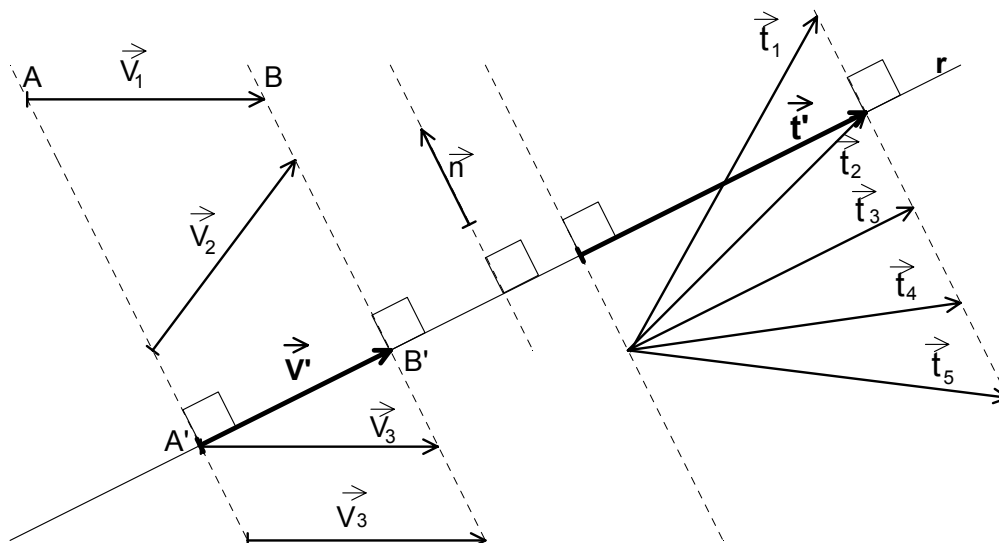
I de la mateixa manera tindrem:

$$\text{Proj}_s(B) = B' \quad \text{i} \quad \text{Proj}_s(C_1) = \text{Proj}_s(C_2) = C'$$

Observem que:

- ♦ El punt projecció és entre tots els punts de la recta s , aquell que està a distància mínima del punt projectat. Ens determina **la distància del punt projectat a la recta**:

$$d(A, s) = d(A, A')$$
- ♦ Els punts de la recta s es projecten en ells mateixos: $B' = B$.
- ♦ Tots els punts que estan en una recta perpendicular a la recta s tenen la mateixa projecció.

PROJECCIÓ ORTOGONAL D'UN VECTOR SOBRE UNA RECTA

La projecció ortogonal d'un vector sobre una recta **és un vector** que té per representant una fletxa d'extremes les projeccions dels extrems del vector projectat.

En el gràfic anterior tenim que la projecció sobre la recta r del vector $v_1 = \overrightarrow{AB}$ és el vector $v' = \overrightarrow{A'B'}$. Ho podem expressar de la forma simbòlica següent:

$$\text{Proj}_r(v_1) = v'$$

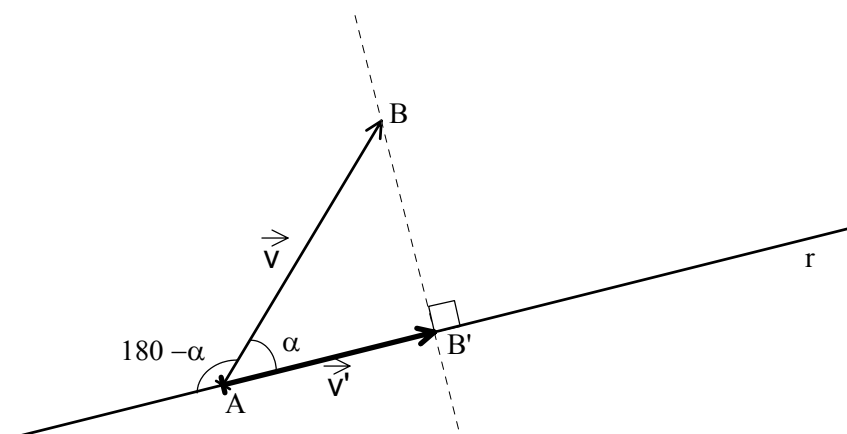
De la mateixa manera podem posar que:

$$\text{Proj}_r(v_1) = \text{Proj}_r(v_2) = \text{Proj}_r(v_3) = v'$$

$$\text{Proj}_r(t_1) = \text{Proj}_r(t_2) = \text{Proj}_r(t_3) = \text{Proj}_r(t_4) = \text{Proj}_r(t_5) = t'$$

Observem que:

- ♦ La projecció d'un vector té un mòdul més petit o igual que el vector projectat. Segons l'angle que formin el vector i la recta el vector projecció tindrà més o menys longitud. Només serà igual si el vector projectat és paral·lel a la recta. En aquest cas el vector projecció i el projectat són el mateix vector. En la figura: $t_3 = t'$.
- ♦ Si el vector projectat és perpendicular a la recta, la projecció és el vector nul. En el dibuix: $\text{Proj}_r(n) = \vec{0}$.
- ♦ La projecció no depèn de la fletxa representant del vector projectat: Les dues fletxes equipol·lents que al dibuix representen el vector v_3 ens donen la mateixa projecció.
- ♦ Si considerem una recta paral·lela a la recta r , tindríem les mateixes projeccions.

MÒDUL DEL VECTOR PROJECCIÓ

Del triangle rectangle ABB' tenim la relació:

$$\cos \alpha = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = AB \cos \alpha$$

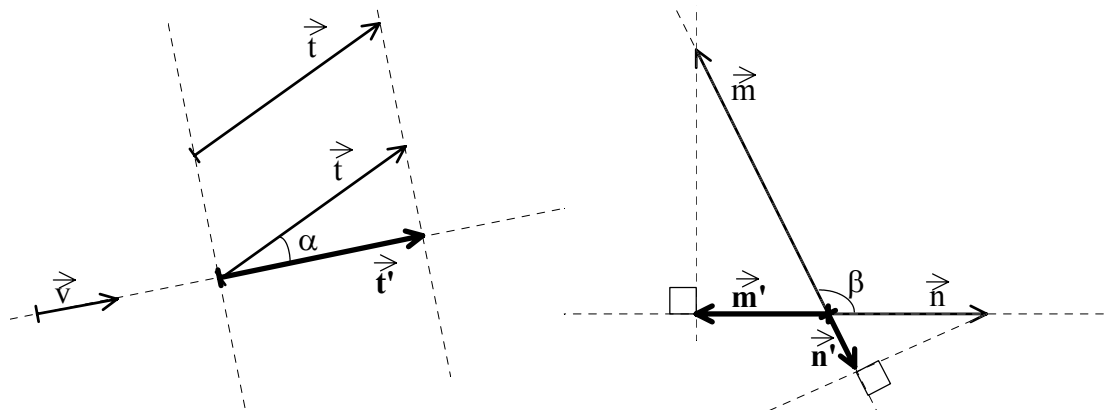
i per tant

$$\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

Observem que l'angle α és l'angle que forma la recta r amb el vector $\vec{v}$. De fet formen dos angles suplementaris: α i $180-\alpha$. Com que $\cos(180-\alpha) = -\cos \alpha$, podem escriure que en general :

$$\|\text{Proj}_r(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| |\cos(\angle r, \vec{v})|$$

on $\angle r, \vec{v}$ significa qualsevol dels dos angles que formen la recta r i el vector $\vec{v}$.

PROJECCIÓ ORTOGONAL D'UN VECTOR SOBRE UN ALTRE VECTOR

La projecció ortogonal d'un vector sobre un altre vector és **un vector**. Aquest vector s'obté projectant el vector sobre una recta que té la direcció del vector sobre el qual projectem.

En el dibuix tenim representades les projeccions del vector $\vec{t}$ sobre el vector $\vec{v}$, i les del vector $\vec{n}$ sobre el vector $\vec{m}$ i del vector $\vec{m}$ sobre el $\vec{n}$.

Ho podem indicar en forma simbòlica:

$$\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{t}) = \vec{t}' \quad ; \quad \text{Proj}_{\vec{m}}(\vec{n}) = \vec{n}' \quad ; \quad \text{Proj}_{\vec{n}}(\vec{m}) = \vec{m}'$$

Observem que:

- ♦ La direcció del vector projecció és la direcció del vector sobre del qual projectem. El seu sentit serà:
 - el mateix quan l'angle entre els dos vectors és agut (α , cas de $\vec{t}, \vec{v}$)
 - el sentit contrari si l'angle és obtús (β , cas de $\vec{m}, \vec{n}$).
- ♦ El mòdul del vector projecció serà, en general:

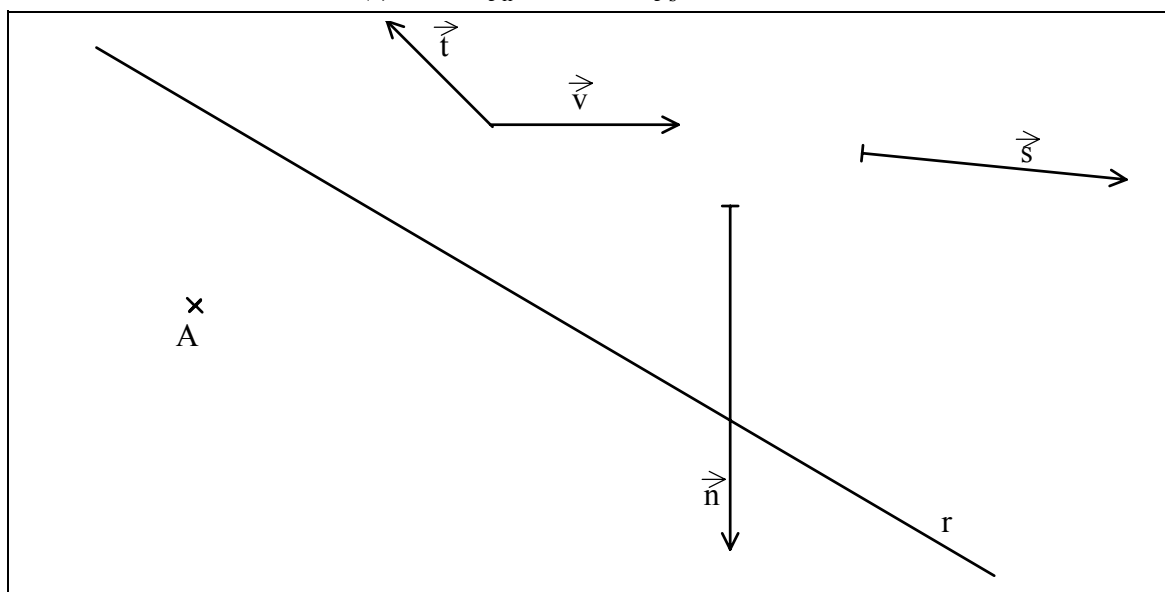
$$\|\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{t})\| = \|\vec{t}\| |\cos(\angle \vec{v}, \vec{t})|$$

E.4

- a) Calcula analíticament la projecció ortogonal del punt (2, -1) sobre la recta $y = 3x - 2$.
- b) Representa-ho en un sistema de referència i comprova el resultat.

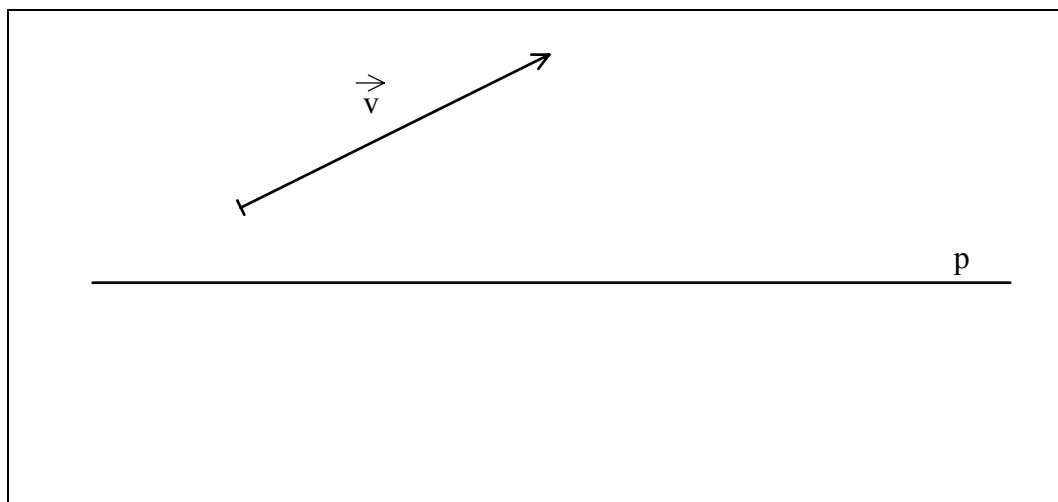
E.5 Representa en el gràfic següent el que es demana en cada apartat:

- a) La projecció ortogonal de A sobre la recta r.
- b) La projecció ortogonal dels vectors $\vec{t}$ i $\vec{n}$ sobre la recta r.
- c) La projeccions: $\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{t})$, $\text{Proj}_{\vec{n}}(\vec{s})$ i $\text{Proj}_{\vec{s}}(\vec{n})$



E.6 Representa en el dibuix següent tres vectors diferents que la seva projecció sobre la recta p sigui igual que la projecció $\text{Proj}_p(\vec{v})$ i que compleixin cadascun una de les condicions següents:

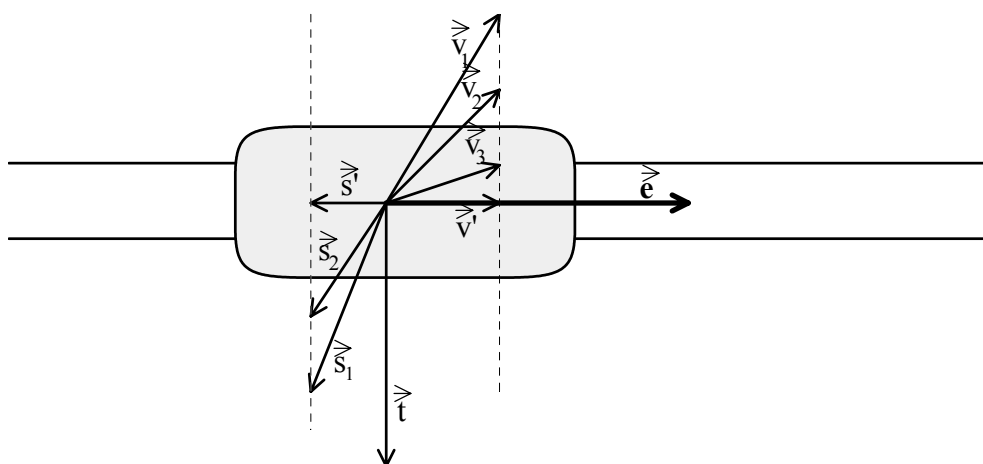
- a) Que sigui de mòdul més gran que el mòdul de $\vec{v}$.
- b) Que sigui de mòdul més petit que el mòdul de $\vec{v}$.
- c) Que sigui diferent que $\vec{v}$ però d'igual mòdul.

**E.7**

- Dibuixa un triangle equilàter que el seu costat mesuri 5 cm. Anomena els seus vèrtexs A, B i C.
- Representa les projeccions ortogonals del vector $\vec{AB}$ sobre les rectes que contenen els tres costats.
- Calcula la longitud de les projeccions ortogonals de l'apartat anterior.

EL PRODUCTE ESCALAR

Hi ha magnituds vectorials que interaccionen amb d'altres magnituds vectorials de manera que el resultat d'aquesta relació es mesura com una magnitud escalar.



En la figura podem observar, vista des de sobre, una vagoneta que circula per una via i que ha recorregut un espai indicat pel vector desplaçament $\vec{e}$. Els altres vectors representen diferents forces aplicades a la vagoneta. La contribució d'aquestes forces al desplaçament de la vagoneta, magnitud física que s'anomena "treball", depèn de la

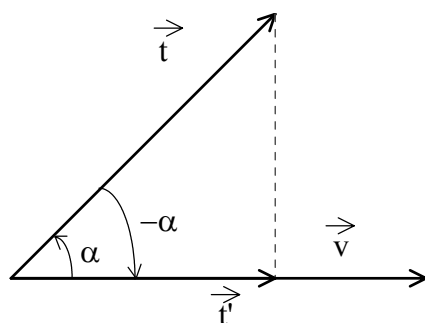
longitud del desplaçament (mòdul del vector desplaçament) i de la intensitat de la força (mòdul del vector força), però també de l'angle entre la força i el desplaçament.

Així un vector perpendicular al desplaçament, vector $\vec{t}$, hi tindrà una contribució nul·la; els vectors que tenen per projecció ortogonal $\vec{s}'$ hi tindran tots la mateixa contribució que serà negativa: serà la mateixa contribució que $\vec{s}'$; en canvi els vectors que es projecten com $\vec{v}'$ tindran tots també la mateixa contribució positiva.

Definirem una operació entre vectors, **el producte escalar**, (no ho hem de confondre amb el producte per un escalar) de manera que el seu "resultat" sigui un nombre que reflecteixi aquesta contribució d'una força a un desplaçament. Per això cal que tingui les característiques següents:

- ♦ El producte de dos vectors paral·lels sigui el producte dels mòduls, amb signe positiu si són del mateix sentit i negatiu si són de sentit contrari.
- ♦ El producte escalar de dos vectors sigui el mateix que el producte escalar d'un d'ells per la projecció ortogonal de l'altre sobre d'ell. És a dir el producte escalar ha de dependre de l'angle entre els dos vectors, de manera que el producte de dos vectors ortogonals sigui 0.

DEFINICIÓ DE PRODUCTE ESCALAR



El **producte escalar de dos vectors és un nombre** que s'obté:

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \cos(\alpha)$$

L'angle $\alpha = \angle \vec{v}, \vec{t}$, és l'angle entre els dos vectors.

Per ser $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, tant és que considerem l'angle $\angle \vec{v}, \vec{t}$ com l'angle oposat $\angle \vec{t}, \vec{v}$. Per això el producte escalar és commutatiu.

CARACTERÍSTIQUES DEL PRODUCTE ESCALAR

A partir de la definició es pot veure que el producte escalar té les característiques següents:

- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} \in \mathbb{R}$. El producte escalar és un nombre real.
Perquè així ho hem definit.
- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot \vec{v}$. El producte escalar és commutatiu.
Perquè $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
- ♦ Si $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = 0$. Si un dels vector és el vector nul, el producte escalar és 0.
Perquè el mòdul del vector $\vec{0}$ és 0.
- ♦ Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{t} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \cdot \vec{t} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{t}$. **Si el producte escalar és 0 i cap dels vectors és nul aleshores els vectors són ortogonals**, i recíprocament: **si són ortogonals el producte escalar és 0**.
Perquè $\cos 90^\circ = 0$.
- ♦ $|\vec{v} \cdot \vec{t}| = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \Leftrightarrow \vec{v}$ i $\vec{t}$ són paral·lels. El producte escalar de dos vectors paral·lels i del mateix sentit és el producte dels mòduls, i si són de sentit contrari el producte dels mòduls canviat de signe.
Perquè $\cos 0^\circ = 1$ i $\cos 180^\circ = -1$.
- ♦ $\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v} \cdot \vec{t'}$ essent $\vec{t'} = \text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{t})$. El producte escalar de dos vectors és el producte escalar d'un d'ells per la projecció de l'altre sobre d'ell.
Perquè $\|\vec{t'}\| = \|\vec{t}\| |\cos \alpha|$

E.8 Calcula el producte escalar de dos vectors que estan representats per fletxes amb origen comú en un vèrtex d'un triangle equilàter de costats de 4 unitats de longitud, i amb final en els altres dos vèrtex.

E.9 Dibuixa un quadrat de costat 3 cm. Anomenem $\vec{v}$ (costat), $\vec{d}$ (diagonal) i $\vec{t}$ (costat), els tres vectors representats per tres fletxes amb origen comú en un dels vèrtexs del quadrat i amb final als altres tres vèrtexs. Calcula $\vec{v} \cdot \vec{d}$, $\vec{d} \cdot \vec{t}$ i $\vec{v} \cdot \vec{t}$.

E.10 Calcula l'angle que formen dos vectors unitaris (de mòdul 1) tal que el seu producte escalar és 0,15.

E.11 Dibuixa:

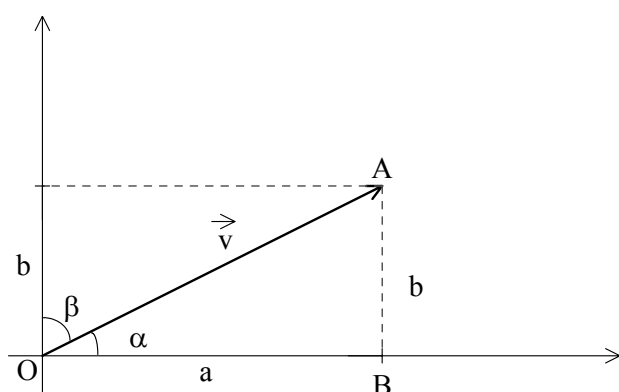
- a) Dos vectors que el seu producte escalar sigui positiu i igual al producte dels mòduls dels dos vectors.
- b) Dos vectors que el seu producte escalar sigui negatiu i de valor absolut igual al producte dels mòduls.
- c) Dibuixa un vector. Dibuixa tres vectors diferents que multiplicats escalarment pel primer vector ens doni un valor positiu i igual en els tres productes.
- d) Dibuixa un vector. Dibuixa tres vectors diferents que multiplicats escalarment pel primer vector ens doni un valor negatiu i igual en els tres productes.

E.12 Calcula el producte escalar d'un vector unitari per un altre que la seva projecció sobre el primer té per mòdul 0,5.

E.13 Una barca es desplaça 200m per un canal estret estirada per un remolcador que fa una força de $7,5 \cdot 10^4$ N. Per ajudar el remolcador un tractor estira també la barca amb una força de $2,3 \cdot 10^4$ N seguint un camí paral·lel al canal amb un cable que forma un angle de 25° amb la direcció del canal. Calcula per separat el treball realitzat per les forces de tracció dels cables del remolcador i del tractor.

EL PRODUCTE ESCALAR EN COMPONENTS

Si volem treballar amb el producte escalar en la geometria analítica ens cal una fórmula per calcular-lo a partir de les components dels vectors. Per això veurem primer la relació entre les components d'un vector i l'angle que forma amb l'eix d'abscisses.



Si considerem el triangle OAB, tindrem que :

$$a = \|\vec{v}\| \cos \alpha \quad b = \|\vec{v}\| \sin \alpha$$

On α és l'angle que forma l'eix d'abscisses amb el vector.

Per tant :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos \alpha \\ \|\vec{v}\| \sin \alpha \end{pmatrix} = \|\vec{v}\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Observem que **$\cos \alpha$** i **$\sin \alpha$** ens indiquen la direcció del vector: són les components d'un vector unitari en la direcció del vector $\vec{v}$. En podem dir **el sinus i el cosinus directors** del vector.

(A vegades es considera l'angle β que forma el vector amb l'eix d'ordenades i com que $\sin \alpha = \cos \beta$, és parla dels **cosinus directors $\cos \alpha$ i $\cos \beta$**)

Fórmula per calcular el producte escalar en components:

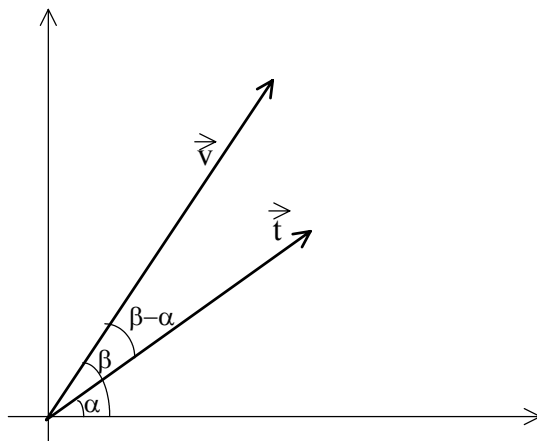
$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ i } \vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{v} \cdot \vec{t} = (ac + bd)$$

Per demostrar aquesta fórmula considerarem els angles que determinen els sinus i cosinus directors dels dos vectors i utilitzarem la fórmula del cosinus de la diferència de dos angles:

Recordem que $\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$

I si mireu la figura següent:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos \beta \\ \|\vec{v}\| \sin \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{t}\| \cos \alpha \\ \|\vec{t}\| \sin \alpha \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \cos(\beta - \alpha) =$$

$$= \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) =$$

$$= (\|\vec{v}\| \cos \beta)(\|\vec{t}\| \cos \alpha) + (\|\vec{v}\| \sin \beta)(\|\vec{t}\| \sin \alpha) =$$

aquí tenim les components dels dos vectors:

$$= ac + bd$$

que és la fórmula que volíem demostrar.

CÀLCUL DE L'ANGLE ENTRE DOS VECTORS

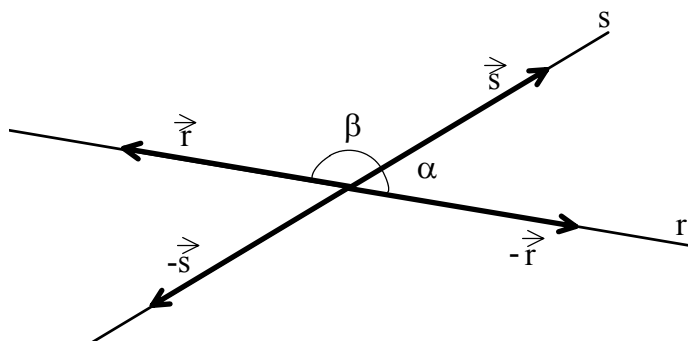
Si considerem la definició de producte escalar entre dos vectors, podem aïllar el cosinus de l'angle entre els dos vectors:

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \|\vec{v}\| \|\vec{t}\| \cos(a) \quad \Rightarrow \quad \cos(a) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\|\vec{v}\| \|\vec{t}\|}$$

Si tenim els vectors en components, podem calcular el producte escalar i els mòduls dels vectors per obtenir el cosinus de l'angle:

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ i } \vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \cos(a) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$$

I per tant podem calcular l'angle entre els dos vectors.

ANGLE ENTRE DUES RECTES

Dues rectes que es tallen determinen sempre quatre angles: dos aguts iguals oposats pel vèrtex i dos obtusos també iguals. Quan són perpendiculars els quatre angles són rectes.

Per conveni s'agafa com a mesura de **l'angle entre dues rectes la mesura de l'angle agut que determinen**.

Fixeu-vos que l'angle agut i l'obtús són suplementaris: $\alpha + \beta = 180^\circ$ i per tant els dos angles tenen cosinus oposats: $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Per calcular l'angle entre dues rectes ho farem calculant l'angle entre dos vectors directores de les dues rectes. Si el cosinus de l'angle entre els dos vectors dóna negatiu voldrà dir que haurem agafat dos vectors directores (com $\vec{s}$ i $\vec{r}$ de la figura) que formen l'angle obtús. Per tant haurem de quedar-nos amb l'angle suplementari o bé canviar el signe del cosinus (agafant el valor absolut del producte escalar) perquè ens doni directament l'angle agut.

O sigui:

Si $\vec{s}$ i $\vec{r}$ són, respectivament, dos vectors directores qualsevol de les rectes s i r , i α és l'angle entre les dues rectes:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{s}\| \|\vec{r}\|}$$

E.14 Calcula el producte escalar dels vectors següents:

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

E.15 Calcula l'angle que forma cada parella de vectors de l'exercici anterior.

E.16 Demuestra que el triangle de vèrtexs $(2, 0)$, $(7, -2)$ i $(6, 10)$ és un triangle rectangle per mitjà del producte escalar. (Recorda que aquest mateix exercici el vas resoldre a la unitat anterior d'una altra manera).

E.17 A la unitat D vas resoldre un problema que deia:

"Donat el triangle de vèrtexs $A: (-1, 0)$, $B: (2, 3)$ i $C: (8, 1)$. Calcula la longitud dels seus costats i utilitza el teorema del cosinus per trobar els seus angles".

Torna a resoldre el problema del càlcul dels angles per mitjà del producte escalar.

E.18 Troba l'angle que determinen les següents parelles de rectes:

- a) les rectes: $(x, y) = (2, -1) + k \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ i $(x, y) = (4, 6) + k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 b) les rectes $y = -4x - 1$ i $3x - 2y = 0$.

PROPIETATS DEL PRODUCTE ESCALAR EN RELACIÓ A LES OPERACIONS DE SUMA I PRODUCTE PER UN ESCALAR: EL PRODUCTE ESCALAR ÉS BILINEAL

A partir de la fórmula del producte escalar en components es poden demostrar les següents propietats del producte escalar:

Siguin quins siguin els vectors $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{s}$ i $k \in \mathbb{R}$:

- 1) $\vec{v} \cdot (\vec{t} + \vec{s}) = \vec{v} \cdot \vec{t} + \vec{v} \cdot \vec{s}$
 $(\vec{v} + \vec{t}) \cdot \vec{s} = \vec{v} \cdot \vec{s} + \vec{t} \cdot \vec{s}$
- 2) $k(\vec{v} \cdot \vec{t}) = k \vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v} \cdot k \vec{t}$

Pel fet de complir aquestes propietats és diu que el producte escalar és bilineal.

CONDICIÓ D'ORTOGONALITAT A PARTIR DEL PRODUCTE ESCALAR

Ja hem vist que dos vectors són ortogonals si i només si el seu producte escalar és nul.

A partir de les components tindrem per tant la condició d'ortogonalitat següent:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ i } \vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{v} \perp \vec{t} \quad \Leftrightarrow \quad ac + bd = 0$$

I la relació entre **els pendents** (m_1 i m_2) dels dos vectors ortogonals la podem obtenir dividint la condició per ac :

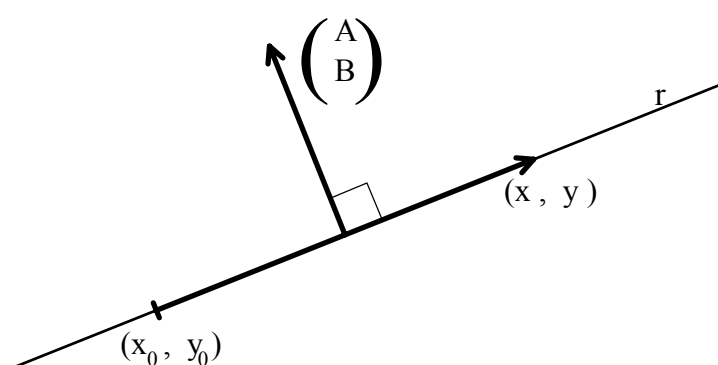
$$0 = \frac{ac + bd}{ac} = 1 + \frac{bd}{ac} = 1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = 1 + m_1 \cdot m_2$$

I d'aquí tenim que **si dos vectors són ortogonals** els seus pendents compleixen:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Observeu que aquestes relacions estan d'acord amb les que ja havíem vist en el primer apartat d'aquesta unitat didàctica quan a través de l'observació del seu dibuix vam trobar un vector ortogonal a un altre.

EQUACIÓ D'UNA RECTA DONAT UN VECTOR ORTOGONAL AL DIRECTOR



Si r és una recta que **passa pel punt** (x_0, y_0) i **és perpendicular al vector** $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, un punt (x, y) serà de la recta si:

$$\overrightarrow{(x_0, y_0)(x, y)} \perp \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ o sigui :}$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \quad \text{i fent } -Ax_0 - By_0 = C$$

tindrem l'equació general de la recta r :

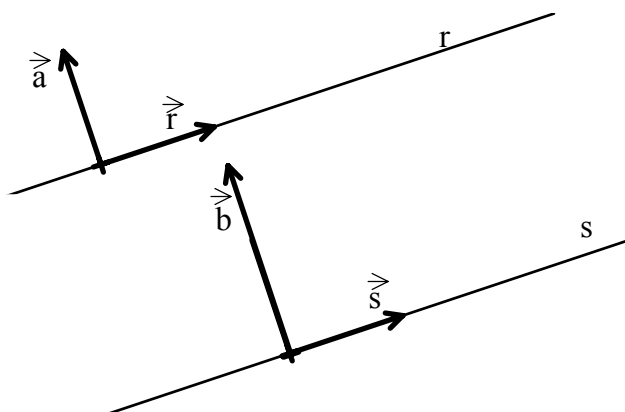
$$Ax + By + C = 0$$

Al vector $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ se'n hi diu **vector associat a l'equació general de la recta**.

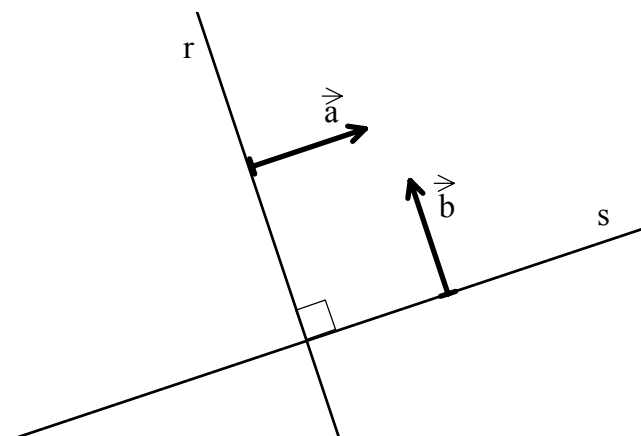
Per tant **el vector associat a l'equació general d'una recta és un vector ortogonal a la mateixa**.

CONDICIONS DE PERPENDICULARITAT I PARAL·LELISME DE DUES RECTES A PARTIR DELS VECTORS ORTOGONALS A LES RECTES

Quant ens donen una recta amb la seva equació general, de forma immediata podem veure quin és el vector associat a l'equació i per tant coneixem un vector ortogonal a la mateixa. Per això és interessant poder establir les condicions de perpendicularitat i paral·lelisme a partir dels vectors ortogonals, o sigui dels vectors associats a les equacions.



Si r i s són paral·leles aleshores els seus vectors ortogonals $\vec{a}$ i $\vec{b}$ també són paral·lels.



Si r i s són rectes perpendiculars aleshores els seus vectors ortogonals $\vec{a}$ i $\vec{b}$ també són perpendiculars.

EXEMPLE 1. Recta que passa pel punt $(7, -1)$ i és ortogonal al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Com que un punt (x, y) de la recta formarà amb el punt $(7, -1)$ un vector ortogonal al vector donat, l'equació d'aquesta recta serà $2(x-7)-3(y+1)=0 \Rightarrow 2x-3y-17=0$.

O bé hauríem pogut fer-ho pensant que el vector que ens donen, ortogonal a la recta, serà el

vector associat a una equació general de la recta. Per tant l'equació de la recta serà de la forma:

$$2x - 3y + C = 0$$

I com que ha de passar pel punt (7, -1): $2 \cdot 7 - 3(-1) + C = 0 \Rightarrow C = -17$

EXEMPLE 2. Recta paral·lela a la recta $5x + 3y - 6 = 0$ i que passa pel punt $(-2, 4)$.

Podríem trobar l'equació de la recta imposant la condició que el pendent ha de ser $-\frac{5}{3}$, però com que per ser paral·leles els vectors ortogonals també han de ser-ho, hauran de tenir el mateix vector associat en l'equació general. Per tant la recta que busquem serà de la forma:

$$5x + 3y + C = 0$$

I com que ha de passar pel punt $(-2, 4)$: $5(-2) + 3 \cdot 4 + C = 0 \Rightarrow C = -2$

L'equació de la recta és $5x + 3y - 2 = 0$

EXEMPLE 3. Recta perpendicular a la recta $4x - 5y + 2 = 0$ i que passa pel punt $(6, 0)$.

Si dues rectes són perpendiculars també ho són els vectors ortogonals a les rectes, o sigui els vectors associats a l'equació general. Si $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ és el vector associat, un vector ortogonal com $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ serà associat a l'equació general de la recta que busquem, que per tant tindrà una equació del tipus:

$$5x + 4y + C = 0$$

I com que ha de passar pel punt $(6, 0)$: $5 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = -30$

L'equació de la recta és $5x + 4y - 30 = 0$

E.19 Troba l'equació de les rectes següents:

- a) Recta que passa pel punt $(-\frac{2}{3}, -2)$ i és perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- b) Recta que passa pel punt $(-5, 2)$ i és perpendicular a la recta $y = 3x - 1$.
- c) Recta que passa pel punt $(2, 0)$ i és paral·lela a la recta $2x - 5y + 4 = 0$.
- d) Passa pel punt $(1, -1)$ i és perpendicular a la recta $3x + y - 4 = 0$.

E.20 Troba el valor de s per tal que les rectes $3x - 2sy + 6 = 0$ i $y = \frac{5}{4}x - 6$ siguin perpendiculars.

E.21 Troba el valor de n per tal que les dues rectes siguin perpendiculars:

$$(n+1)x - ny = 0 \quad ; \quad (n-1)x + 2y - 4 = 0$$

E.22 Considera el punt $P:(3, 5)$, la recta $r: x-2y+2=0$ i el punt $A:(0, 1)$ que pertany a la recta.

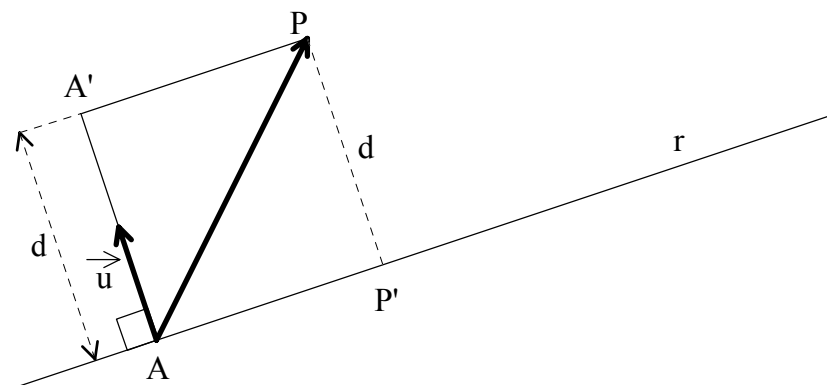
- a) Representa la recta i els dos punts.
- b) Troba analíticament el punt P' , projecció ortogonal de P sobre r . Comprova-ho en el dibuix.
- c) Troba les components del vector $\overrightarrow{AP}$ i d'un vector $\vec{r}$ director de la recta r . Dibuixa dues fletxes representants d'aquests vectors amb origen el punt A .
- d) Comprova que el producte escalar del vector $\overrightarrow{AP}$ per $\vec{r}$ és igual al producte escalar d' $\vec{r}$ per la projecció ortogonal del vector $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{r}$.

E.23 Troba el punt simètric del punt $(7, -3)$ respecte la recta $5x-2y-12=0$.

E.24 Troba el punt de la recta $x+4y=0$ que està a distància mínima del punt $(1, 3)$.

E.25 Troba les equacions de les mediatrises dels costats del triangle $A:(0, 5)$, $B:(2, 1)$ i $C:(6, 3)$. Calcula les coordenades del circumcentre (punt on es tallen les mediatrises).

E.26 Troba les equacions de les altures del triangle $A:(4, -6)$, $B:(1, 3)$ i $C:(6, 3)$. Calcula les coordenades de l'ortocentre (punt on es tallen les altures)

DISTÀNCIA D'UN PUNT A UNA RECTA

La distància d entre un punt P i una recta r és la distància entre el punt P i un punt de la recta r que es troba a la mínima distància de P , o sigui la distància entre P i P' projecció ortogonal del punt P sobre la recta r .

Si $\vec{u}$ és un vector unitari (de mòdul 1) i ortogonal a r aleshores la distància del punt P a la recta és el valor absolut del producte escalar del vector $\overrightarrow{AP}$ pel vector $\vec{u}$. En efecte:

$$|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}| = |\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}| \text{ perquè } \overrightarrow{AA'} \text{ és la projecció de } \overrightarrow{AP} \text{ sobre } \vec{u}.$$

$|\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}| = \|\overrightarrow{AA'}\| \|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AA'}\| \cdot 1 = d$ perquè els vectors són paral·lels i $\vec{u}$ és unitari. Per tant tenim:

$$d(P, r) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}| \text{ on } A \in r, \|\vec{u}\| = 1 \text{ i } \vec{u} \perp r$$

Si considerem que :

$$r: ax + by + c = 0, \quad \text{i } P: (x_0, y_0)$$

$$\text{un vector unitari i ortogonal a } r \text{ serà: } \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{un punt de la recta serà } A: (a, \beta), \text{ per tant } aa + b\beta + c = 0 \Rightarrow c = -(aa + b\beta) \quad (*)$$

$$\text{el vector } \overrightarrow{AP} \text{ serà } \overrightarrow{(a, \beta)(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} x_0 - a \\ y_0 - \beta \end{pmatrix}$$

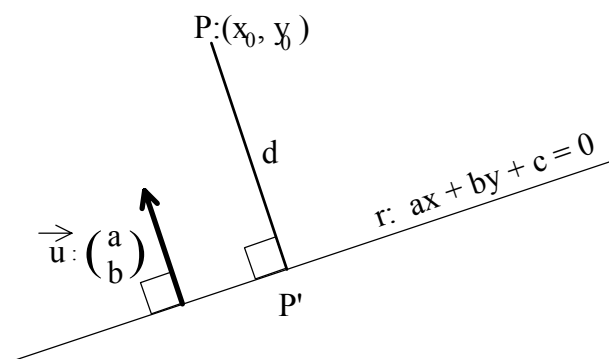
Aplicant la relació que hem obtingut per calcular la distància d'un punt a una recta:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} x_0 - a \\ y_0 - \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \frac{(x_0 - a)a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{(y_0 - \beta)b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 - (aa + b\beta)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \quad \text{i segons la relació } (*) \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Tenim per tant una fórmula fàcil de recordar que ens permet trobar la distància d'un punt a una recta:

La distància d'un punt a una recta s'obté fent el valor absolut del valor de substituir les coordenades del punt en l'equació general de la recta i dividir pel mòdul del vector associat a l'equació.



$$d[(x_0, y_0), ax + by + c = 0] = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Observem que si el punt (x_0, y_0) pertany a la recta aleshores la distància és zero; i si apliquem la fórmula ens donarà zero ja que el punt complirà l'equació de la recta i per tant $ax_0 + by_0 + c = 0$.

E.27

- Calcula la distància del punt A:(-3, 1) a la recta que passa pels punts B:(2, 0) i C:(4, 3).
- Calcula l'àrea del triangle ABC.

E.28 Calcula l'àrea del triangle determinat per les rectes:

$$y = 2x \quad ; \quad 2y = x \quad ; \quad x - 5y + 9 = 0$$

E.29 Calcula m per tal que el punt (m, 3) disti 10 unitats de la recta $3x + 4y + 9 = 0$.

E.30 Un quadrat té dos costats sobre les rectes $3x - 4y + 1 = 0$ i $3x - 4y + 26 = 0$. Calcula l'àrea d'aquest quadrat.

E.31 Troba l'equació del lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del punt (0,2) i de la recta $y=0$. Observa l'equació que obtens, saps de quina figura geomètrica es tracta?