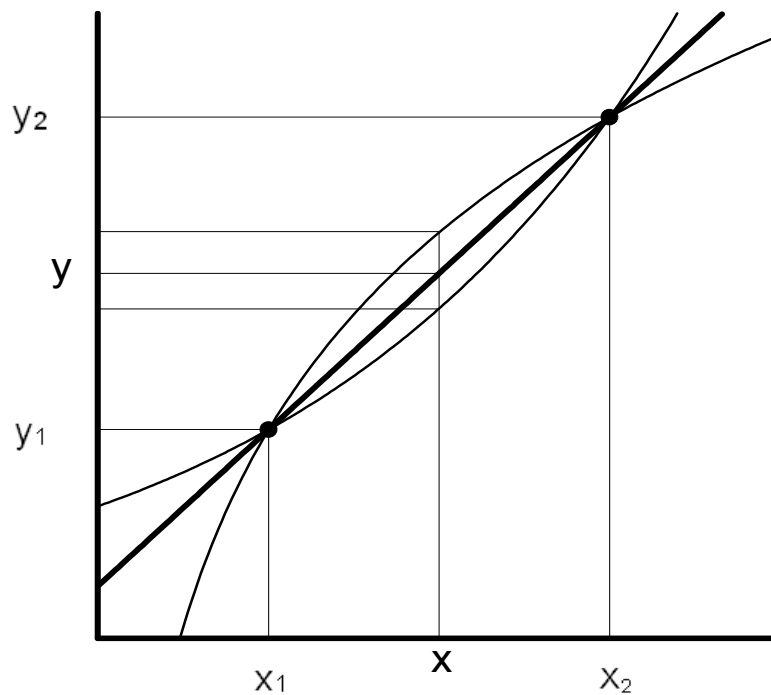


IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

Interpolació lineal



Batxillerat

A. INTERPOLACIÓ LINEAL

Diccionari:

Interpolació: posar una cosa entre d'altres que són ordenades.

Una situació:

Posem a escalfar un recipient amb aigua. Fem dos controls de temperatures als 5 minuts i als 15 minuts de l'inici. Les temperatures són 20°C i 50°C. Volem saber la temperatura als 8 minuts de l'inici.

ANÀLISI DEL PROBLEMA

Considerem la funció entre les variables temps (x) i temperatura (y):

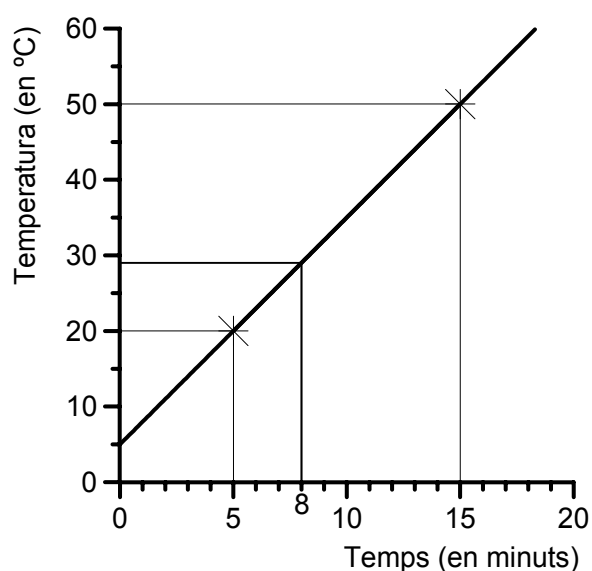
$$y = f(x)$$

PROBLEMA

Ho representem amb una taula:

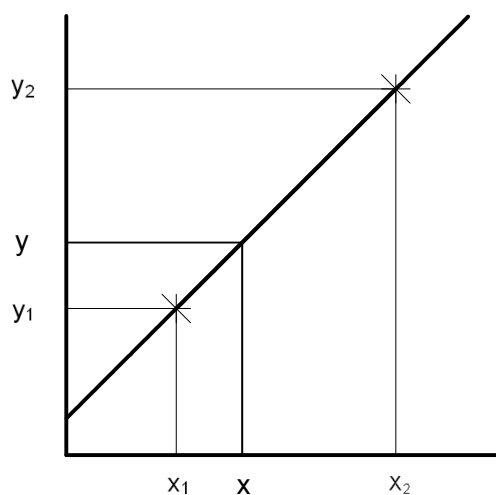
x	y
5 min	20°
15 min	50°

Ho representem amb un gràfic:



Cas general

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2



Si suposem que la relació és lineal podem llegir directament en el gràfic la temperatura als 8 minuts (interpolació lineal, entre els 5 i 15 minuts) o en un altre instant, per exemple 19 minuts (extrapolació lineal, no està entre 5 i 15 minuts).

Ho podem calcular, seguim suposant que la relació és lineal,

Variació de la temperatura = $\Delta T = 50 - 20 = 30$ ($^{\circ}\text{C}$)

Variació del temps = $\Delta t = 15 - 5 = 10$ (minuts)

Variació de la temperatura per minut = $\frac{50 - 20}{15 - 5} = \frac{30}{10} = 3$

Per tant als 8 minuts la temperatura, si la relació és lineal, és: $20 + 3 \cdot 3 = 29$ $^{\circ}\text{C}$

També ho podem calcular trobant l'equació de la recta que passa pels dos punts donats.

EQUACIÓ DE LA RECTA QUE PASSA PER DOS PUNTS

Mètode 1: A partir del pendent

1) Càlcul del pendent m ,

$$m = \frac{50 - 20}{15 - 5} = \frac{30}{10} = 3$$

$$2a) \frac{y - 20}{x - 5} = 3$$

$$\boxed{y - 20 = 3(x - 5)}$$

2b) si la recta és $y = m x + n$
passa per (5, 20)

$$20 = 3 \cdot 5 + n, \rightarrow n = 5$$

$$\boxed{y = 3x + 5}$$

Mètode 2: Resolució d'un sistema

$$y = m x + n$$

passa per (5, 20)

$$20 = 5m + n$$

passa per (15, 50)

$$50 = 15m + n$$

$$\begin{cases} 20 = 5m + n \\ 50 = 15m + n \end{cases}$$

Restant la primera equació a la segona:

$$30 = 10m \rightarrow m = 3; n = 5$$

$$\boxed{y = 3x + 5}$$

Per a $x = 8 \rightarrow y = 3 \cdot 8 + 5 = 29$

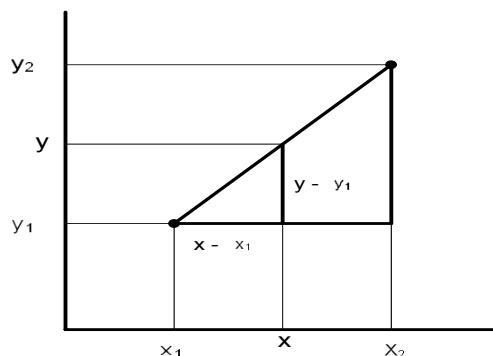
Cas general

Recta que passa per (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

I)

$$1) \text{ pendent } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2a) \boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \text{ perquè } \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$



$$2b) \quad y = m x + n$$

Calculem n imposant $y_1 = m x_1 + n$

II) Resolent un sistema

$$\begin{cases} y_2 = x_2 m + n \\ y_1 = x_1 m + n \end{cases}$$

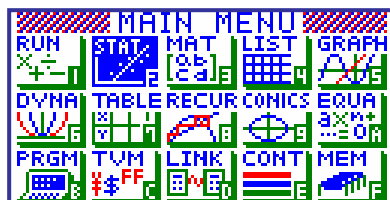
les incògnites són m i n

Mètode 3: Recta de regressió amb la calculadora.

Totes les calculadores amb l'opció estadística de dues variables calculen rectes de regressió, podem utilitzar el càlcul de la recta de regressió de dues dades per a obtenir la recta d'interpolació lineal.

Hi ha una gran diversitat de marques i models per a fer aquests càlculs, fem una descripció de les pantalles que corresponen a la marca Casio models 9750, 9850 i Algebra fx 2.0.

Escollim l'opció estadística



Introduïm les coordenades dels punts donats en la pantalla de les dades estadístiques.

	List 1	List 2	List 3	List 4
1	5	20		
2	15	50		
3				
4				
5				50
	1VAR	2VAR	REG	SET

Escollim regressió amb REG i obtenim la pantalla.

	List 1	List 2	List 3	List 4
1	5	20		
2	15	50		
3				
4				
5				5
	X	Med	X^2	X^3

Escollim X per trobar l'equació de la recta de regressió lineal. $y = 3x + 5$

```
LinearReg
a = 3
b = 5
r = 1
r² = 1
y = ax + b
1VAR 2VAR REG SET
```

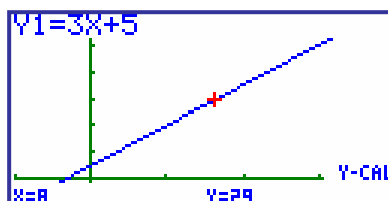
En mode RUN obtenim el valor esperat de la y coneguda la x, a $x = 8$ li correspon una y de 29.

```
80
29
1/x 1/y
```

Entrem en mode gràfic i comprovem que hi tenim l'equació de la recta de regressió, es pot copiar directament des del menú estadístic.

```
Graph Func :Y=
V1=3X+5
V2:
V3:
V4:
V5:
V6:
SEL DEL TYPE CLR MEM DRAW
```

Visualitzem la recta de regressió i el valor esperat de la y.



Si cal modificarem el domini, recorregut i escala dels eixos.

```
View Window
Xmin :-5
max :20
scale:5
Ymin :-10
max :60
scale:10
INIT TRIG STD STO RCL
```

ERROR EN LES APROXIMACIONS LINEALS

La relació entre les dues variables pot ser no lineal, per tant a l'hora de fer una interpolació o extrapolació lineal hem de raonar l'adequació del model lineal en la situació concreta plantejada.

PROBLEMES

1) Troba per interpolació lineal els valors que falten a les taules:

a)

x	y
3	7
8	19
4	

b)

x	y
2,5	18
4,7	24
3,7	
4,1	

c)

x	y
315	4,75
504	1,19
442	

- 2) La població d'una ciutat l'any 1970 era de 18.725 habitants i a l'any 2003 era de 25.723. Calcula quants habitants et sembla que podria tenir a l'any 1970. Et sembla apropiat el model lineal? I el model exponencial?
- 3) En l'estudi del factor de protecció del Sol d'unes cremes protectores solars s'ha trobat que permet prendre el Sol sense perill:

Factor	Temps
10	65 minuts
18	94 minuts

Quan temps protegirà una crema de factor 15?

Quan temps sense protecció?

- 4) Considera la funció $f(x) = x^2 - 4x + 7$
- a) Troba les coordenades dels punts del gràfic de la funció per $x = 0$ i $x = 3$.
 - b) Calcula per interpolació lineal entre els dos punts de l'apartat anterior el valor de la y per $x = 2$.
 - c) Calcula $f(2)$ i compara-ho amb el valor obtingut a l'apartat anterior.
 - d) Fes el gràfic de la funció f i de la recta que has usat en la interpolació i interpreta-ho.
 - e) Tindria sentit fer una extrapolació?
- 5) Fes el mateix, però considerant els punts del gràfic $x = 3$ i $x = 6$, fent la interpolació al valor $x = 5$.
- 6) La producció d'arròs per hectàrea depèn, d'entre altres factors, dels adobs que es posen al terreny:

X, nitrogen aplicat en kg/ha	20	60
Y, producció d'arròs en tones/ha	4,78	7,21

Quina producció podem suposar que hi hauria sense adobar el camp? I si l'adob fos de 40 kg/ha? I de 33 kg/ha?