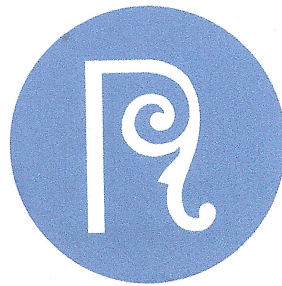


Sistemes d'Equacions Lineals i Matrius

2n de Batxillerat

IES Arquitecte Manuel Raspall
Cardedeu



Departament de Matemàtiques

A. $x = 5$, què és això?

Això és una equació. És una equació tan senzilla que directament sabem que el 5 és l'única solució, la solució.

Juguem una mica amb aquesta equació: $x = 5$ (equació 1)

(eq. 2) $x + 1 = 6$.

No és la mateixa equació però s'hi assembla molt. D'entrada veiem que té la mateixa solució, el 5. També observem que si sumem 1 als dos membres de l'equació 1 obtenim l'equació 2. Les equacions 1 i 2 són equivalents però és més fàcil resoldre l'equació 1 que la 2.

Dues equacions són equivalents si i només si tenen la mateixa solució.

Hi ha dues transformacions molt senzilles que ens permeten construir equacions equivalents.

Si sumem (o restem) un mateix nombre als dos membres d'una equació obtenim una equació equivalent.

(eq. 3) $x - 2 = 3$ és equivalent a l'eq. 1

Si multipliquem (o dividim) els dos membres d'una equació per un mateix nombre, diferent de 0, obtenim una equació equivalent.

(eq. 4) $3x = 15$ és equivalent a l'eq. 1.

(eq. 5) $\frac{x}{2} = 2,5$ és equivalent a l'eq. 1.

Podem combinar diverses transformacions per construir una equació equivalent. Per exemple si multipliquem per 4 i restem 10 a l'equació 1, obtenim l'equació equivalent:

(eq. 6) $4x - 10 = 10$

Exercicis

A.1 Esbrina quines de les equacions següents són equivalents a l'equació 1. Aquelles equacions que ho siguin transforma-les fins arribar a l'equació 1, explicant les transformacions que fas.

a) $x + 3 = 10$

b) $-x = -5$

c) $4x = 15$

d) $2x - 3 = 7$

e) $-3x + 7 = 8$

Un procediment per resoldre equacions és:

Transformar l'equació en una altra equivalent de solucions evidents.

A.2 Resol les següents equacions utilitzant el procediment anterior.

a) $3x - 7 = 15$

b) $2x + 5 = 3x - 7$

c) $2(2x - 5) + 5 = (3x + 8) + x$

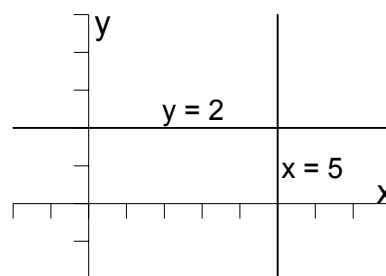
d) $-5x + 4 = 6 + 3x$

e) $\frac{x+5}{3} - 2 = x + \frac{1}{2}$

f) $4 - (x - 5) = 5$

I això, què és?
$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array} \right\} \quad (\text{s.e.l. 1})$$

És un sistema d'equacions lineals. Té dues equacions i dues incògnites. És tan senzill que la solució és evident. La solució és (5, 2). Només aquests dos nombres fan certes les dues equacions del sistema.



Anem a complicar el s.e.l. 1 sense canviar la solució.

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ 3y = 6 \end{array} \right\} \quad (\text{s.e.l. 2}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{eq1}' = \text{eq1} \\ \text{eq2}' = 3\text{eq2} \end{array} \right.$$

La primera equació és la mateixa.

La segona equació l'hem substituït per una altra d'equivalent a ella.

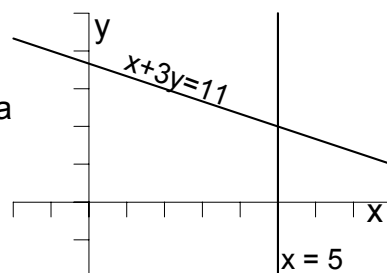
Anem a complicar el s.e.l. 2 sense canviar la solució.

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ x + 3y = 11 \end{array} \right\} \quad (\text{s.e.l. 3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{eq1}'' = \text{eq1}' \\ \text{eq2}'' = \text{eq2}' + \text{eq1}' \end{array} \right.$$

La primera equació és la mateixa.

La segona equació l'hem canviat per la segona més la primera.

Els s.e.l. 1, 2 i 3 tenen la mateixa solució (5, 2).



Dos s.e.l. són equivalents si i només si tenen la mateixa solució.

Un procediment per resoldre un sistema d'equacions lineals és transformar-lo en un altre d'equivalent que tingui la solució evident.

Hi ha dues transformacions molt senzilles que ens permeten construir s.e.l. equivalents.

Transformació 1:

Substituir una equació per una altra d'equivalent.

Transformació 2:

Substituir una equació per ella més (o menys) una altra equació del mateix s.e.l.

Aquestes dues transformacions es poden combinar, per exemple:

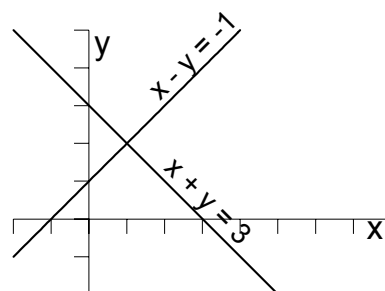
Una equació es pot substituir per ella més (o menys) una equació equivalent a una altra del mateix s.e.l.

Exemple 1:

Resol el s.e.l.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Substituïm la segona equació per ella menys la primera:

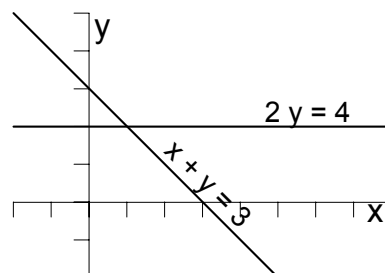
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -4 \end{cases}$$



La solució ja és prou evident: $y=2$ i $x=1$

Exemple 2:

Resol el s.e.l.
$$\begin{cases} x + 4y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$



Substituïm la segona equació per ella menys 3 vegades la primera:

$$\begin{cases} x + 4y = -2 \\ -13y = 13 \end{cases}$$

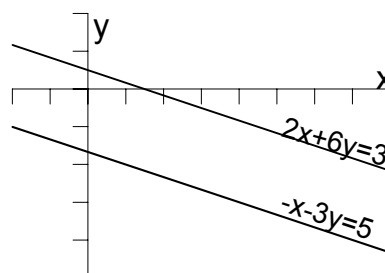
La solució ja és prou evident $y = -1$ i $x = 2$.

No sempre els s.e.l. tenen solució.

Exemple 3:
$$\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ -x - 3y = 5 \end{cases}$$

Substituïm la primera equació per ella més dues vegades la segona.

$$\begin{cases} 0x + 0y = 13 \\ -x - 3y = 5 \end{cases}$$



Observem que no té solució. És impossible troba un parell de nombres que facin certa la igualtat $0 \cdot x + 0 \cdot y = 13$.

Els s.e.l. que tenen solució es diuen compatibles i els que no incompatibles.

Hi ha sistemes que tenen moltes solucions.

Exemple 4:
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -5 \\ -2x - 6y = 10 \end{array} \right\}$$

Substituïm la segona equació per ella més dues vegades la primera:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -5 \\ 0x + 0y = 0 \end{array} \right\}$$

Observem que la segona equació és com si no hi fos, totes les solucions de l'equació 1 són solució del sistema. La solució de l'equació 1 és la solució del sistema.

Aquesta s.e.l. és equivalent al s.e.l. $x + 3y = -5$

La solució del sistema està format per un nombre il·limitat de parells de nombres:
 $\dots, (-2, -1), (-1, -4/3), (0, -5/3), (1, -2), (2, -7/3), (3, -8/3), (4, -3), \dots$

Podem expressar la solució amb l'ajuda d'un paràmetre, la solució té un grau de llibertat: $\begin{cases} y = t \\ x = -5 - 3t \end{cases}$ t és el paràmetre de la solució, per cada valor que donem a t tenim una solució particular.

Els s.e.l. compatibles que tenen solució única es diuen determinats i els que la solució no és única es diuen indeterminats.

Transformació 3:

Si en un s.e.l. eliminem una equació amb tots els coeficients i el terme independent iguals a 0 obtenim un s.e.l. equivalent.

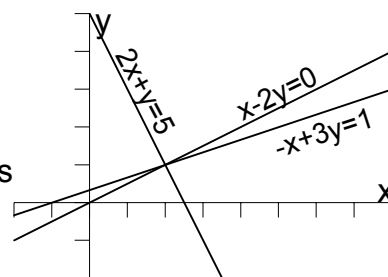
Ja has vist que hi ha s.e.l. d'una equació amb dues incògnites, també existeixen s.e.l. de tres equacions (o més) amb dues incògnites.

Exemple 5: Resol

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{array} \right\}$$

Substituïm la segona equació per ella menys dues vegades la primera:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 0x + 5y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{array} \right\}$$



Substituïm la tercera equació per ella més la primera:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 0x + 5y = 5 \\ 0x + y = 1 \end{array} \right\}$$

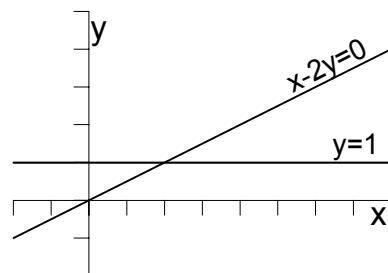
Substituïm la segona equació per ella menys 5 vegades la tercera:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + y = 1 \end{array} \right\}$$

Eliminen la segona equació perquè tots els coeficients són 0.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

El sistema és compatible determinat.
La solució és (2, 1).



Exemple 6:

Resol

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 5y = 4 \end{array} \right\}$$

Substituïm la segona equació per dues vegades ella menys tres vegades la primera:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eq1}' = \text{eq1} \\ \text{eq2}' = 2\text{eq2} - 3\text{eq1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 0x + 19y = -19 \end{array} \right\}$$

De la segona equació és evident que la $y = -1$ i substituint aquest resultat en la primera: $2x - 3 = 9$, la $x = 6$.

El sistema és compatible determinat. La solució és $(2, -1)$.

Aquest procediment el podem fer servir per resoldre qualsevol sistema, anem a fer-ho per un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites.

Exemple 7: Resol

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + 5y + 2z = 5 \\ 5x - 3y + z = 4 \end{array} \right\}$$

Per fer 0 el coeficient de la "x" de la segona i tercera equació només cal que el coeficient de la "x" de la primera equació no sigui 0.

Observem que aquest coeficient és 2.

El coeficient de la x de la segona equació és 3. Per convertir-lo en 0 multipliquem la segona equació per 2 i li restem 3 vegades la primera equació:

eq2' = 2 eq2 - 3 eq1

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z = -7 \\ 0x + 16y - 5z = 31 \\ 5x - 3y + z = 4 \end{array} \right\}$$

El coeficient de la x de la tercera equació és 5. Per convertir-lo en 0 multipliquem la tercera equació per 2 i li restem 5 vegades la primera equació:

eq3' = 2 eq3 - 5 eq1

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z = -7 \\ 0x + 16y - 5z = 31 \\ 0x + 4y - 13z = 43 \end{array} \right\}$$

Per fer 0 el coeficient de les "y" de la tercera equació, només cal que el coeficient de les "y" de la segona no sigui 0. Aquest coeficient és 16 i ara serà el pivot.

Multipliquem la tercera equació pel nou pivot i li restem 4 vegades la segona equació. Aquest 4 és el coeficient de les "y" de la tercera equació.

eq3' = 16 eq3 - 4 eq2

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z = -7 \\ 0x + 16y - 5z = 31 \\ 0x + 0y - 188z = 564 \end{array} \right\}$$

De la tercera equació: $z = -\frac{564}{188}$ $z = -3$

Substituint aquest resultat en la segona equació: $16y + 15 = 31$

$$16y = 16 \qquad y = 1$$

Substituint la “y” i la “z” en la primera equació:

$$2x - 2 - 9 = -7 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2.$$

La solució d'aquest sistema és (2, 1, -3).

Exercicis

A.3 Resol els s.e.l. següents

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x - 8 = 2y \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} y = -2 \\ x - 2y = 4 \end{array} \right\}$$

$$d) \quad \left. \begin{array}{l} y - 2x = 8 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right\}$$

$$e) \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 5 \end{array} \right\}$$

$$f) \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = 6 \end{array} \right\}$$

A.4 Representa i interpreta gràficament els sistemes anteriors.

A.5 Resol els s.e.l. següents

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 13 \\ x + 3y + 4z = 11 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{rcl} 4x - 2y & = & 2 \\ & 6y - 3z & = 1 \\ -4x & + & 3z = -1 \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{rcl} x - 3y & = & 1 \\ & 9y - z & = 1 \\ 2x & - & z = 1 \end{array} \right\}$$

B. Sistemes d'equacions lineals

Definició:

Una equació lineal de n incògnites és tota relació entre nombres que es pugui expressar de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Els nombres: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ són les incògnites.

Els nombres: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ són els coeficients de les incògnites.

El nombre b és el terme independent.

Un sistema d'equacions lineals és un conjunt d'equacions lineals amb les mateixes incògnites.

Designem per m el nombre d'equacions i n el nombre d'incògnites. El terme a_{ij} vol dir el coeficient de l'equació i de la incògnita j .

Amb aquesta notació un sistema de m equacions lineals amb n incògnites es pot expressar de la forma:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Solució d'un sistema d'equacions lineals

Una solució particular d'un s.e.l. de m equacions amb n incògnites és un conjunt de n nombres que substituint a les incògnites fan certes les igualtats de les m equacions.

La solució general d'un s.e.l. és el conjunt de totes les solucions particulars.

Quan parlem de la solució ens referim a la solució general.

Classificació

Classificació dels s.e.l. $\left\{ \begin{array}{l} \text{compatibles} \\ \text{incompatibles} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{determinats} \\ \text{indeterminats} \end{array} \right.$

Els compatibles són els que tenen solució.

Els incompatibles no tenen solució.

Els determinats són els que tenen solució única. La solució general té una sola solució particular.

Els indeterminats són els que tenen més d'una solució. La solució general té més d'una solució particular.

Quan tots els termes independents són 0, el s.e.l. es diu homogeni i té com a mínim una solució, que totes les incògnites siguin 0. Els s.e.l. homogenis són sempre compatibles.

Sistemes equivalents.

Dos s.e.l. són equivalents quan tenen la mateixa solució.

Podem modificar un sistema amb transformacions que conserven les solucions.

Transformacions equivalents.

Canviar l'ordre de les equacions.

Multiplicar o dividir qualsevol de les equacions per un nombre diferent del 0.

Sumar a una equació una altra multiplicada per un nombre.

Suprimir una equació que tingui tots els coeficients i el terme independent igual a 0.

Mètode de Gauss

Per resoldre un s.e.l. de m equacions amb n incògnites farem el següent mètode:

Agafarem com primera equació qualsevol que el primer coeficient sigui diferent de 0, les millors són les que tenen aquest coeficient igual a 1.

Reduirem a 0 el primer coeficient de les altres equacions amb transformacions equivalents.

Sense modificar la primera equació, agafarem com segona equació qualsevol altra que el segon coeficient sigui diferent de 0.

Reduirem a 0 el segon coeficient de les equacions, excepte la primera i la segona, amb transformacions equivalents.

I així successivament amb la tercera equació i el tercer coeficient, la quarta equació i el quart coeficient, etc...

Al final tindrem un s.e.l. equivalent on cada equació tindrà, com a mínim, un coeficient 0 més que l'equació anterior.

Si la darrera equació és del tipus:

$$0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \dots + 0 x_n = 0, \quad \text{l'eliminem}$$

Si la darrera equació és del tipus:

$$0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \dots + 0 x_n = b, \quad \text{b diferent de 0, aleshores el s.e.l. és incompatible.}$$

Si la darrera equació és del tipus:

$$0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \dots + a_{nn} x_n = b \quad \text{podem aïllar } x_n \text{ i substituint a les equacions anteriors podem trobar les altres incògnites.}$$

El s.e.l. serà compatible determinat.

Si la darrera equació és del tipus:

$$0 x_1 + 0 x_2 + \dots + a_{m m} x_m + \dots + a_{m n} x_n = b \quad \text{podem aïllar } x_m \text{ si convertim } x_{m+1}, \dots, x_n \text{ en terme independent. El s.e.l. és compatible indeterminat, les solucions depenen de: } x_{m+1}, \dots, x_n, \text{ paràmetres de les solucions.}$$

Exercicis

B.1 Resol amb el mètode de Gauss

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 25 \\ x - y - z = 9 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 3x + 2y - 5z = 16 \\ 2x + y - 3z = 10 \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 13 \\ -x - 4y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

$$d) \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 13 \\ 3x + \quad + 5z = 10 \end{array} \right\}$$

Matriu d'un sistema d'equacions lineals

Hem vist que les transformacions que utilitzem per obtenir s.e.l. cada vegada amb més coeficients 0 no modifiquen les incògnites. Només modifiquem els coeficients i els termes independents.

Ordenem els coeficients i el terme independent en una taula de doble entrada. Les files corresponen a les equacions i les columnes als coeficients i termes independents.

$$\text{s.e.l.:} \quad \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

$$\text{taula de doble entrada:} \quad \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Aquesta taula de doble entrada es diu matriu ampliada del sistema. Si eliminem la darrera columna, la dels termes independents, es diu matriu del sistema:

matriu del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per representar les dues matrius, la del sistema i l'ampliada, utilitzem la notació

següent:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Resolució d'un sistema de 3 equacions amb tres incògnites amb el mètode de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3 \end{array} \right\}$$

La matriu ampliada del sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

Es tracta d'esglaonar les files amb transformacions equivalents fins tenir la forma

següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array} \right)$$

Observem que la darrera fila correspon a l'equació $c_{33} z = d_3$ que ens dona el valor de la z .

Substituint en les equacions anteriors obtenim la "y" i la "x".

Si la matriu esglaonada té aquesta forma: $\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right)$ i el d_3 no és 0, el sistema no té solució, és incompatible perquè $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$ mai pot ser diferent de 0.

Si la matriu esglaonada té aquesta forma: $\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ el sistema té solució però no és única, és compatible indeterminat:

De la segona fila tenim l'equació: $c_{22} \cdot y + c_{23} \cdot z = d_2$

Escollim una de les incògnites com paràmetre de la solucions, per exemple la z:

$$y = \frac{d_2 - c_{23}z}{c_{22}}$$

Substituïm aquest resultat en la primera equació i aïllem la x.

Exemple d'aplicació de la Regla del Pivot

Per esglaonar una matriu podem utilitzar la Regla del Pivot.

Exemple 1.

$$\text{Resol } \left. \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 3z & = & 11 \\ 3x - y + 2z & = & 9 \\ -x + 4y - z & = & 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{La matriu ampliada és: } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 4 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Per utilitzar com a pivot el primer element de la fila 3,

$$\text{permuto les files 1 i 3: } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 11 \end{array} \right)$$

$$\text{Canvio tots els signes de la primera fila (multiplicar per -1): } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 11 \end{array} \right)$$

Agafó l'1 com a pivot i "arreglo" les files 2 i 3 (Regla del Pivot):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-4) & 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & 1 \cdot 9 - 3 \cdot (-4) \\ 0 & 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) & 1(-3) - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 11 - 2 \cdot (-4) \end{array} \right)$$

El resultat d'aquestes operacions és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 12 & -5 & 19 \end{array} \right)$$

Ara agafem l'11 com a pivot i "arreglem" la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & 11 \cdot (-5) - 12 \cdot (-1) & 11 \cdot 19 - 12 \cdot 21 \end{array} \right)$$

Fem les operacions:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & -43 & -43 \end{array} \right)$$

La tercera fila correspon a l'equació $-43z = -43$, això vol dir que $z = 1$.

Substituint aquest valor a la segona fila-equació tenim: $11y - 1 = 21$, això equival a dir $11y = 22$, l' $y = 2$.

Substituint aquests valors a la primera equació: $x - 8 + 1 = -4$, això vol dir $x = 3$.

Exemple 2.

Resol
$$\left. \begin{array}{l} x + 4y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 5x + 6y - z = 8 \end{array} \right\}$$

La matriu ampliada és:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Escollim a_{11} com pivot i "arreglem" la 2a i 3a fila:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

Observem que la tercera fila és la mateixa que la segona. Si a la tercera fila li resto

la segona queda una fila de 0:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema és compatible indeterminat.

De la segona fila tinc l'equació $-14y + 4z = -2$.

Escullo la "y" com paràmetre de les solucions: $z = \frac{-2 + 14y}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{7}{2}y$

Substituïm la z en la primera equació: $x + 4y - \left(\frac{-1}{2} + \frac{7}{2}y\right) = 2$

Aïllem la “x”:

$$x = 2 - 4y + \frac{-1}{2} + \frac{7}{2}y$$

Simplifiquem el resultat

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y$$

La solució general del sistema és: $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y, y, \frac{-1}{2} + \frac{7}{2}y\right)$

Separem els paràmetres: $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}y, y, \frac{7}{2}y\right)$

Traiem “y” factor comú: $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}\right)y$

La solució és suma de dos termes. El primer és una solució particular, el segon és la solució general del s.e.l. homogeni associat al sistema inicial. Aquest resultat no és una casualitat d'aquest exemple, sempre és compleix.

La solució d'un s.e.l. és la suma d'una solució particular i la solució general del s.e.l. homogeni associat.

El s.e.l. homogeni associat té els mateixos coeficients de les incògnites i els termes independents són 0.

Exemple 3

Resol

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 4y - z & = & 2 \\ 3x - 2y + z & = & 4 \\ 5x + 6y - z & = & 5 \end{array} \right\}$$

La matriu ampliada és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Escollim a_{11} com pivot i “arreglem” la 2a i 3a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 4 & -5 \end{array} \right)$$

A la tercera fila li restem la segona:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Observem que el sistema no té solució perquè no existeixen x, y, z que compleixin l'equació $0x + 0y + 0z = -3$.

Regla del Pivot.

Escollim com pivot un terme qualsevol diferent de 0 de la matriu.

Per reduir a 0 els termes de la mateixa columna del pivot, excepte ell mateix, farem:

Multiplicar cada fila, excepte la del pivot, pel pivot i li restarem la fila del pivot multiplicada pel terme de la fila que està en la mateixa columna del pivot.

Amb notació algebraica, pràctica per programar màquines:

Si a_{kk} és el pivot i volem arreglar la fila i , i sempre diferent de k , els nous valors de la fila i són: $a'_{ij} = a_{kk} \cdot a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$

Exercicis

B.2 Resol els s.e.l. següents

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = -12 \\ 3x - 5y = -37 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = -1 \\ 5x + y = 8 \\ 6x + 4y = 18 \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 6 \\ 4x + y = -2 \\ 6x - 2y = 3 \end{array} \right\}$$

$$d) \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y + 4z = 3 \\ 5x + 4y - 2z = 12 \\ 3x - 2y - 3z = 1 \end{array} \right\}$$

$$e) \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 4y - 3z = 11 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ -x + 4y - z = 4 \end{array} \right\}$$

$$f) \quad \left. \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right\}$$

$$g) \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x - 5y - 3z + 2t & = & 7 \\ 3x + 2y - z - t & = & 10 \\ x + y - 2z - 3t & = & -1 \\ -2x + 3y - z + 2t & = & -7 \end{array} \right\}$$

$$h) \quad \left. \begin{array}{rcl} 3x - 2y + z & = & 4 \\ x + 4y - z & = & 2 \\ 5x + 6y - z & = & 8 \\ x - 10y + 3z & = & 0 \end{array} \right\}$$

B.3 Els coeficients de les incògnites dels dos s.e.l. següents són iguals però els termes independents no, l'a és homogeni i el b no. Es tracta de resoldre'l i explicar la relació que hi ha entre les solucions.

$$a) \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ 3x + 2y - z & = & 0 \\ x - 5y - 2z & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 2 \\ 3x + 2y - z & = & 3 \\ x - 5y - 2z & = & 1 \end{array} \right\}$$

B.4 Els coeficients de les incògnites dels dos s.e.l. següents són iguals però els termes independents no, l'a és homogeni i el b no. Es tracta de resoldre'l i explicar la relació que hi ha entre les solucions.

$$a) \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ 3x + 2y - z & = & 0 \\ x + 5y - 2z & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 2 \\ 3x + 2y - z & = & 3 \\ x + 5y - 2z & = & 1 \end{array} \right\}$$

B.5 Tenim dues equacions amb tres incògnites $\left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z & = & 5 \\ 3x + 5y - 2z & = & 4 \end{array} \right\}$ afegeix una tercera equació per tenir un sistema:

- a) incompatible
- b) compatible determinat
- c) compatible indeterminat

B.6 La matriu dels coeficients de les incògnites d'un s.e.l. és $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Troba:

- a) Els termes independents sabent que una solució és (2, -1, 3).
- b) El s.e.l. té altres solucions?

B.7 La matriu dels coeficients de les incògnites d'un s.e.l. és $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$. Troba:

- a) Els termes independents sabent que una solució és (2, -1, 3).
- b) El s.e.l. té altres solucions?

B.8 Escriu un s.e.l. de tres equacions amb tres incògnites que tingui de solució:

- a) (1, -2, 2)
- b) (1, -2, 2) + (3,1,-2)t
- c) (1, -2, 2) + (3,1,-2)t + (0, 0, 1)p

Mètode de Gauss-Jordan

És una variant del mètode de Gauss per a resoldre s.e.l.

Consisteix en aplicar transformacions equivalents fins aconseguir que la matriu del

sistema i la seva ampliada sigui: $\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & c_{22} & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array} \right)$.

Exemple:

Resol
$$\left. \begin{array}{rrcr} x & -4y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 11 \end{array} \right\}$$

La matriu ampliada és: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 11 \end{array} \right)$

Agafem de pivot l' a_{11} i apliquem la Regla del Pivot a la 2a i 3a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 12 & -5 & 19 \end{array} \right)$$

Agafem de pivot l' a_{22} i apliquem la Regla del Pivot a la 1a i 3a fila:

Dividim per -43 la 3a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 7 & 40 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Agafem de pivot l' a_{33} i apliquem la Regla del Pivot a la 1a i 2a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 11 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Dividim per 11 la 1a i 2a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La solució és $x = 3$, $y = 2$ i $z = 1$.

Exercicis

B.9 Resol amb el mètode de Gauss-Jordan els exercicis B.1 i B.2

C. Matrius

Hem parlat de matrius d'un sistema d'equacions lineal perquè són molt útils per estudiar-lo i resoldre'l. Però les matrius també són útils per estudiar altres temes, per aquest motiu parlem de matrius sense necessitat d'associar-les a un sistema d'equacions lineal.

Exercicis

C.1 Per construir unes màquines es necessita ferro, alumini, plàstic i fibra de vidre. Hi ha tres models diferents de màquines i la següent taula ens indica en kg la quantitat de cadascun dels materials que necessita cadascuna de les

màquines.

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \\ 13 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

- a) Quina quantitat de plàstic necessita la màquina 1.
- b) Quina quantitat d'alumini necessita la màquina 3.
- c) Les files què indiquen?
- d) Les columnes què indiquen?
- e) Hem de fabricar 5 màquines del primer tipus, 3 del segon tipus i 4 del tercer, quines quantitats de materials necessitem?
- f) Hem gastat 145 kg de ferro, 103 kg d'alumini, 116 kg de plàstic i 134 kg de fibra de vidre. Quantes màquines hem fabricat de cada tipus?
- g) El preu en ptes/kg de cadascun dels quatre materials són: el ferro 65, l'alumini 980, el plàstic 115 i la fibra de vidre 340. Quant valen els materials de cada model de màquina.
- h) Quant val els materials de 5 màquines del primer tipus, 3 del segon i 4 del tercer.

Definicions

Una matriu de m files i n columnes és un conjunt de $m \cdot n$ nombres ordenats en un rectangle de m files i n columnes.

Ordre d'una matriu: Una matriu d'ordre $m \times n$ vol dir que té m files i n columnes.

Una matriu quadrada d'ordre $n \times n$ també es diu simplement matriu d'ordre n .

Exemple 1: Una matriu d'ordre 2×3 és un conjunt de 6 nombres ordenats de la següent forma: $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} & -3 \\ 2,4 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Notació

Per anomenar el terme de la matriu A que està en la fila i columna j escriurem a_{ij} .

Exemple 2: Per representar una matriu qualsevol de dues files i tres columnes farem servir la notació següent: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Tipus de matrius

Matrius quadrades: Són aquelles que tenen el mateix nombre de files i columnes.

Exemple: Una matriu quadrada d'ordre 3 qualsevol:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrius iguals: Dues matrius són iguals si i només si tenen tots els termes iguals.

Matrius matriu-fila: Són les que tenen una sola fila.

Exemple: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

Matrius matriu-columna: Són les que tenen una sola columna.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Matrius diagonal: Tots els termes diferents dels a_{ii} són 0.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Els termes a_{ii} formen la **diagonal principal**.

Matriu nul·la: Tots els seus elements són 0.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu unitat: És una matriu diagonal que té tots els termes de la diagonal principal igual a 1.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu triangular: Tots els termes situats sota de la diagonal principal són 0.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Quan resollem un s.e.l. amb el mètode de Gauss transformem la matriu del sistema en una matriu triangular. Per fer aquesta transformació utilitzem la regla del pivot.

Matriu transposada: És la que resulta de canviar les files per les columnes.

Exemple: La transposada de $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} & -3 \\ 2,4 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 2,4 \\ \frac{3}{4} & 0 \\ -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Suma de matrius

La matriu suma de dues matrius del mateix ordre és una altra matriu del mateix ordre on cada terme és la suma dels termes que ocupen el mateix lloc en les matrius sumands.

Siguin A i B dues matrius del mateix ordre, aleshores la matriu $C = A + B$ és la matriu tal $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diferència.

Per restar dues matrius sumarem a la primera la segona amb tots els termes canviats de signe.

Producte d'una matriu per un nombre

El producte d'una matriu per un nombre és la matriu que resulta de multiplicar cadascun dels termes de la matriu pel nombre.

Sigui A una matriu i k un nombre, aleshores $B = k \cdot A$, on $b_{ij} = k a_{ij}$.

Exemple:
$$2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Producte d'una matriu-fila per una matriu-columna

Han de tenir el mateix nombre de termes. El resultat és la suma dels productes:

$$\text{Exemple: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) = 2 + 0 + 6 = 8$$

El producte d'una matriu A d'ordre $1 \times n$ per una matriu B d'ordre $n \times 1$ és un nombre

$$= \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{i1}$$

Producte d'una matriu per una matriu-columna

Els ordres no poden ser qualsevol, el nombre de columnes de la matriu ha de ser el mateix que el nombre de files de la matriu-columna.

El producte d'una matriu $m \times n$ per una $n \times 1$ és una matriu $m \times 1$, on cada terme de la nova matriu és el producte de la fila de la matriu inicial per la matriu columna.

$$\text{Exemple: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercicis

C.2 Escribe la matriz transpuesta de:

a)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

C.3 Escribe una matriz de orden 3 que sea igual a su transpuesta.

C.4 Utilizando el método de Gauss o el de Gauss-Jordan transforma las siguientes matrices:

a)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 a triangular.

b)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 a diagonal.

C.5 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentra:

a) $A + B$

b) $B - C$

c) $A - B + C$

d) $2A$

e) $3A + 2B$

C.6 Con las matrices de el ejercicio C.5 comprobamos la propiedad asociativa de la suma de matrices.

a) $(A + B) + C$

b) $A + (B + C)$

C.7 Amb les matrius de l'exercici C.5 comprovem la propietat commutativa de la suma de matrius.

a) $A + B$

b) $B + A$

C.8 Amb les matrius de l'exercici C.5 fes els següents

a) $3(A + B)$

b) $3A + 3B$

c) La relació que hi ha entre els apartats anteriors es compleix per a tots els nombres i totes les matrius. Escriu aquesta propietat.

C.9 Amb les matrius de l'exercici C.5 fes els següents

a) $(2 + 3)A$

b) $2A + 3A$

c) La relació que hi ha entre els apartats anteriors es compleix per a tots els nombres i totes les matrius. Escriu aquesta propietat.

C.10 Donades les matrius: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Troba:

a) $3A$

b) $A + B$

c) $B - A$

d) $3A + 2B$

C.11 Producte de matrius. Amb les matrius A i B de l'apartat anterior calcula:

a) AB

b) BA

c) El producte de matrius té la propietat commutativa?

C.12 Escribe dues matrius quadrades C i D d'ordre 2 tals que $C D = D C$.

C.13 Amb les matrius A, B i C de l'exercici C. 5 calcula:

- $(A B) C$
- $A (B C)$
- El resultat obtingut és vàlid per a qualsevol conjunt de tres matrius que es puguin multiplicar?
- Com es diu la propietat anterior?

C.14 Calcula A^2

C.15 Definim $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcula $I \cdot A$, $A \cdot I$
- Calcula $A \cdot B$, $B \cdot A$
- Calcula tots els productes que es poden fer amb aquestes quatre matrius, escriu les respostes en una taula de doble entrada com aquesta:

	I	A	B	C
I				
A				
B				
C				

Matriu inversa

L'existència de la matriu unitat planteja la possibilitat de la matriu inversa.

El producte d'una matriu per la seva inversa dóna la matriu unitat.

Càlcul de la matriu inversa

Exemple 1.

Trobar la matriu inversa de $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Es tracta de trobar una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

És equivalent a: $\begin{pmatrix} 5x+4z & 5y+4t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

És equivalent a resoldre: $\left. \begin{array}{l} 5x + 4z = 1 \\ 4x + 3z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5y + 4t = 0 \\ 4y + 3t = 1 \end{array} \right\}$

Aquests dos s.e.l. no sempre tenen solució, quan algun d'ells sigui incompatible direm que la matriu no té inversa.

Les matrius dels dos s.e.l. són: $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$ i $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$

Observem que les matrius del sistema són iguals, només canvien la columna dels termes independents.

Podem resoldre simultàniament els dos s.e.l. amb el mètode de Gauss-Jordan.

Matriu conjunta dels dos s.e.l. $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Escollim el 5 com pivot $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \end{array} \right)$

Canviem el signe de la 2a fila $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right)$

Escollim l'1 com pivot $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right)$

Dividim per 5 la primera fila $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right)$

La matriu inversa $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Exemple 2.

Trobar la matriu inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Li afegim la matriu unitat d'ordre 3: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Canviem el signes de la primera fila: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Apliquem a la files 2 i 3 la Regla del Pivot. El pivot és $a_{11} = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Apliquem a la files 1 i 3 la Regla del Pivot. El pivot és $a_{22} = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

Apliquem a la files 1 i 2 la Regla del Pivot. El pivot és $a_{33} = -6$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -12 & 0 & 0 & -6 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 0 & -10 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

Dividim per -12 les files 1 i 2 i per -6 la fila 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -1/3 \end{array} \right)$$

La matriu inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 5/6 & -1/2 & 2/3 \\ -1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Resolució d'un s.e.l. amb la matriu inversa

En l'apartat F hem vist que un s.e.l. com $\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3 \end{array} \right\}$ el podem

expressar $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ i de forma més abreujada per $A X = B$,

si anomenem A^{-1} a la matriu inversa d' A , tenim

$$X = A^{-1} B.$$

En resum, el matriu-columna solució és igual al producte de la inversa de la matriu del sistema pel matriu-columna dels termes independents.

Exercicis

C.16 Calcular la matriu inversa de:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

D. Rang d'una matriu

Quan esglaonem una matriu i ens surt una fila de 0 vol dir que aquesta fila la podem obtenir fent combinacions lineals de les anteriors.

Combinacions lineals de files vol dir que només podem fer les operacions:

sumar files

multiplicar una fila per un nombre.

El rang d'una matriu és el nombre de files linealment independents.

Per trobar el rang d'una matriu només cal esglaonar-la, eliminar les files que són tots 0 i comptar les files que queden.

Teorema de Rouché-Frobenius

Un s.e.l. té solució si i només si el rang de la matriu del sistema és el mateix que el rang de la matriu ampliada.

Si té solució i el rang de la matriu del sistema és igual al nombre d'incògnites, la solució és única.

Discussió d'un sistema que conté un paràmetre

Podem trobar-nos un s.e.l. amb coeficients o termes independents desconeguts. El fet de ser desconeguts no vol dir que siguin variables, són constants de valor desconegut. Si canviem el valor de la constant desconeguda canviem el s.e.l.

No hem de confondre els paràmetres del sistema amb els paràmetres de les solucions. Els paràmetres de les solucions existeixen quan un s.e.l. és indeterminat.

Quan canviem un paràmetre del sistema canviem de s.e.l., quan canviem un paràmetre de les solucions tenim una altra solució del mateix s.e.l.

Sovint interessa saber per quins valor del paràmetre el sistema té solució i si és, o no és, única. És el que anomenem discussió d'un sistema amb paràmetres.

Exemple 1

$$\text{Discussió del s.e.l. } \left. \begin{array}{l} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = a \end{array} \right\}$$

La matriu del sistema i la seva ampliada és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{array} \right)$$

Escollim a_{11} com pivot i “arreglem” la 2a i 3a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & a-10 \end{array} \right)$$

Escollim a_{22} com pivot i “arreglem” la 3a fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-8 \end{array} \right)$$

Discussió:

$$2a - 8 = 0, \quad a = 4.$$

Si $a = 4$ el s.e.l. és compatible indeterminat.

Si $a \neq 4$ el s.e.l. és incompatible.

Exemple 2

$$\text{Discussió del s.e.l. } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 3 \\ ax + (a-1)y = 4 \end{array} \right\}$$

La matriu del sistema i la seva ampliada és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ a & a-1 & 4 \end{array} \right)$$

Escollim a_{11} com pivot i “arreglem” la 2a fila:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4a-1 & 4-3a \end{array} \right)$$

Discussió:

$$4a - 1 = 0, \quad a = 1/4.$$

Si $a = 1/4$ el s.e.l. és incompatible.

Si $a \neq 1/4$ el s.e.l. és compatible determinat.

Solució si $a \neq 1/4$
$$y = \frac{4-3a}{4a-1} \quad x = \frac{3a+9}{4a-1}$$

Encara que hi hagi un paràmetre en la solució el sistema no és indeterminat, el paràmetre és del sistema, les solucions canvien perquè canvia el sistema, però per cada sistema la solució és única.

Exercicis

D.1 Discuteix segons els valors del paràmetre a el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 4x + ay = 3 \end{array} \right\}$$

D.2 Discuteix segons els valors del paràmetre a el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ 4x + ay = 4 \end{array} \right\}$$

D.3 Discuteix segons els valors del paràmetre b el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 3x + 5y = 1 \\ 4x - y = b \end{array} \right\}$$

D.4 Discuteix segons els valors del paràmetre a el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} ax + 4y = 7 \\ 3x - y = -5 \end{array} \right\}$$

D.5 Discuteix segons els valors dels paràmetres a i b el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ ax - y = 6 \\ 4x - by = 0 \end{array} \right\}$$

D.6 Discuteix segons els valors del paràmetre a el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y + az = 5 \end{array} \right\}$$

D.7 Discuteix segons els valors del paràmetre a i resol quan sigui possible el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

D.8 Discuteix segons els valors del paràmetre a i resol quan sigui possible el

$$\text{sistema: } \left. \begin{array}{rcl} 2y - z & = & a \\ 3x - 2z & = & 11 \\ y + z & = & 6 \\ 2x + y - 4z & = & a \end{array} \right\}$$

D.9 Discuteix segons els valors del paràmetre t el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} tx + 3y & = & 2 \\ 3x + 2y & = & t \\ 2x + ty & = & 3 \end{array} \right\}$$

D.10 Discuteix segons els valors del paràmetre a i resol quan sigui possible el

$$\text{sistema: } \left. \begin{array}{rcl} 3x - 5y & = & 12 \\ 5x + 2y & = & 9 \\ x - 12y & = & 15 \\ 11x - 8y & = & 33 \\ 4x + ay & = & 27 \end{array} \right\}$$

E. L'espai

Si representem en uns eixos de tres coordenades les solucions d'una equació de tres incògnites obtenim un pla.

Cadascuna de les solucions (x, y, z) d'una equació del tipus $ax + by + cz = d$ són les coordenades d'un punt del pla $ax + by + cz = d$.

Les equacions equivalents determinen el mateix pla.

A cada equació li correspon un pla i a cada pla li corresponen totes aquelles equacions que tenen per solució les coordenades dels punts del pla.

Exercicis

E.1 Representa en uns eixos de coordenades de l'espai les equacions:

a) $x = 0$

b) $y = 0$

c) $z = 2$

- d) $x + z = 0$
- e) $x + y = 3$
- f) $x + y + z = 3$
- g) $x - y + z = 3$

E.2 Resol cadascuna de les equacions de l'exercici anterior.

E.3 Com són els rangs dels sistemes d'equacions lineals de tres incògnites que representen un pla.

La solució del s.e.l.
$$\left. \begin{array}{l} x + 4y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{array} \right\} \text{ és } (x, y, z) = (1, 1, 3) + (-1, 2, 7) t.$$

Si representem en uns eixos de 3 coordenades la solució obtenim una recta.

Les coordenades de cada punt de la recta és una solució particular del sistema i al revés. El sistema es diu equació cartesiana de la recta.

Sempre que la solució d'un s.e.l. depengui d'un, i només un, paràmetre, tindrem una recta.

Exercicis

E.4 Com han de ser els rangs d'un s.e.l. de tres incògnites per tenir una recta.

E.5 Troba un s.e.l associat a cadascuna de les següents rectes de l'espai.

- a) l'eix OX
- b) paral·lela a l'eix OY i que passa pel punt (2, 1, -1)
- c) $(x, y, z) = (2, -1, 4) + (2, 2, 3) t$

Les posicions relatives de dos plans a l'espai poden ser:

coincidents: són el mateix pla

paral·lels: no tenen cap punt comú

es tallen: tenen una recta comuna.

E.6 Com han de ser els rangs d'un s.e.l. de 2 equacions i 3 incògnites per correspondre a:

- a) dos plans coincidents
- b) paral·lels
- c) una recta

E.7 Troba la posició relativa dels següents parells de plans:

- a) $2x - y + 2z = -1$ $-x - y + 3z = 2$
- b) $3x - 2y + 3z = 1$ $-3x + 2y - 3z = 5$
- c) $x + y - 2z = -4$ $2x + 2y - 4z = -8$
- d) $x + y - 2z = -4$ $x - y + 4z = 5$

E.8 Estudia la posició relativa dels següents conjunts de tres plans:

a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= -3 \\ -4x + y + 4z &= 7 \\ -2x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 1 \\ x - y - z &= -1 \\ x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ x - y + z &= -2 \\ 2x - 2y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= -1 \\ -4x + 2y - 4z &= 2 \\ 6x - 3y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

E.9 Estudia la posició relativa de tres plans a l'espai segons els rangs del s.e.l. de les equacions dels plans.