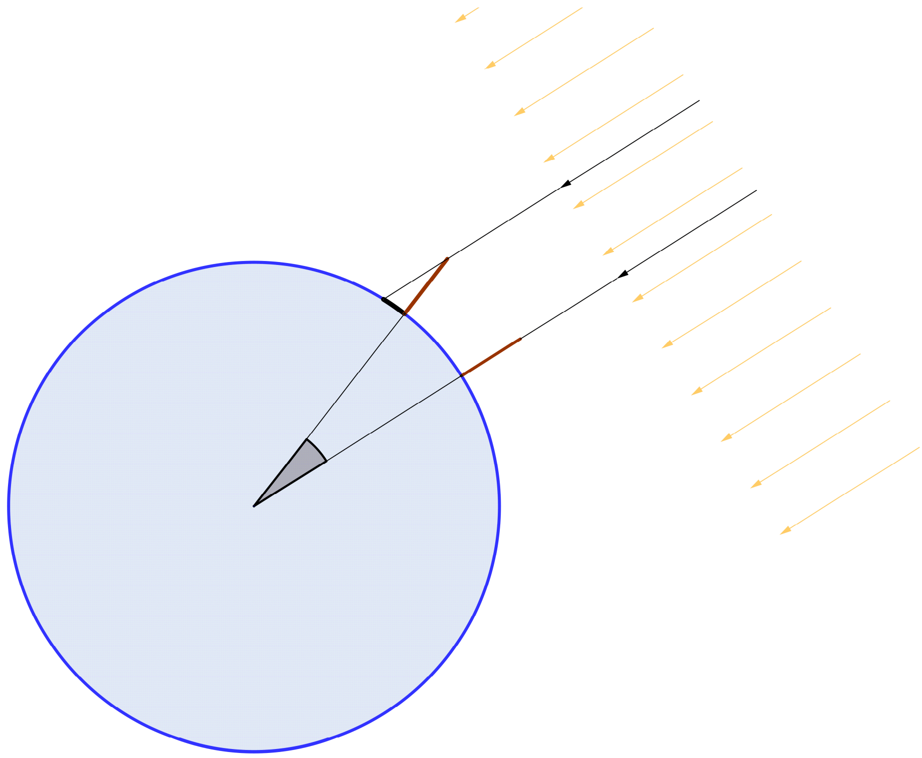
IES Arquitecte Manuel Raspall

Matemàtiques

Trigonometria



1r Batxillerat

A l'angle com a gir

Fins ara, a trigonometria hem treballat amb angles aguts, els quals sempre es poden considerar com a angles d'un triangle rectangle. Però existeixen figures geomètriques amb angles de mesura més gran que 90º. Tractarem de mesurar i representar angles d'aquest tipus.

A.1

a) Una roda d'una màquina ha donat 5 voltes i mitja. Quina és la mesura de l'angle que ha girat qualsevol punt del volant?

b) I si ha donat 4 voltes i quart?

c) I si ha donat 10 voltes i tres quarts?

d) Si un punt de la roda ha girat un angle de mesura 2520º, quantes voltes ha donat? I si l'angle és de 1200º?

e) Troba un gir de menys d'una volta que deixi la roda en la mateixa posició que un gir de 900º.

f) Si haguessis de representar amb un angle els girs dels apartats a) b) c) d) i e) mitjançant quin angle ho faries?

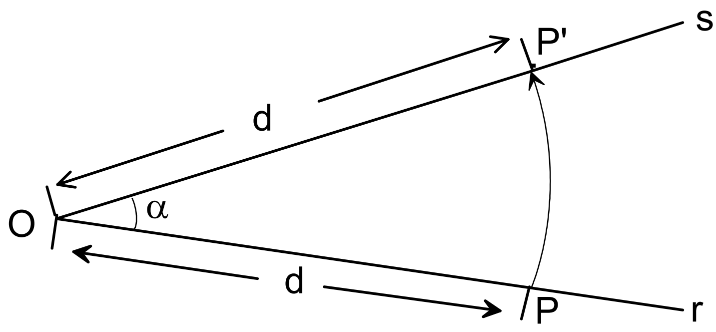
g) Si la roda pot girar en tots dos sentits, com creus que podem diferenciar un sentit de gir de l'altre quan donem la mesura de l'angle recorregut?

En aquest exercici, com que $\frac{900^\circ}{360^\circ} = 2 + \frac{180^\circ}{360^\circ}$ o sigui 900º = 2·360º + 180º, hem parlat d'una roda que dóna per exemple 2 voltes i mitja, o que un punt ha girat un angle de 900º. Estem tractant l'angle com a **gir**. Quan diem que aquest gir ho representaríem mitjançant un angle de 180º (ho hem reduït al primer gir) l'estem considerant com a **element geomètric**.

Per determinar el camí recorregut per un punt P en passar a la posició P' en un gir de Centre O, ens cal donar la mesura de l'angle format per POP'. Es a dir, un gir de centre O queda determinat per la mesura de l'angle format per la posició inicial d'un punt qualsevol, el centre O i la posició final d'aquest punt.
Així a cada gir de centre O li podem associar la mesura de l'angle format per :
- la posició inicial d'un punt qualsevol

- el centre O
- la posició final d'aquest punt.

Recíprocament, donat un angle de mesura α i vèrtex O, li podem associar el gir que fa que la semirecta r es transformi en la semirecta s.

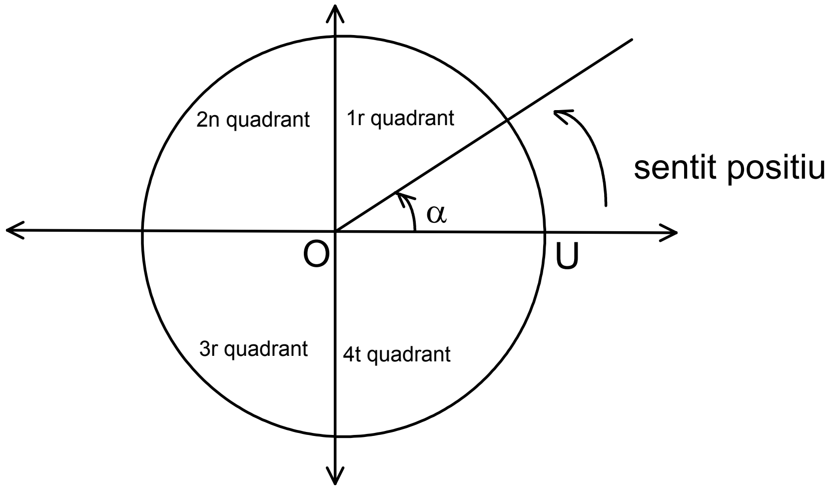


Un punt P de la recta **r** situat a una distància **d** de O es transforma en el punt P' de la recta **s** situat a la mateixa distància de O.

Per a representar i mesurar aquests angles o girs d'una manera determinada, cal adoptar un sistema de referència que ens permeti representar i mesurar l'angle format per una posició fixa que prenem com a origen (1r costat de l'angle) i una segona posició variable (2n costat de l'angle) amb un sentit de gir que passa de la 1a posició a la segona.

Per això, sobre uns eixos cartesians rectangulars, situarem:

- el vèrtex O de l'angle a l'origen de coordenades
- el costat fix de l'angle sobre l'eix d'abscisses positiu
- com a sentit positiu de gir el sentit contrari al de les agulles del rellotge.

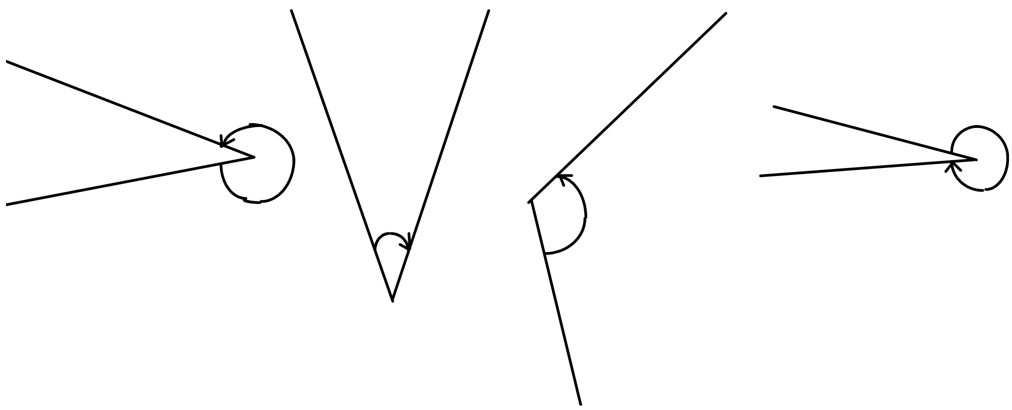


Els eixos divideixen el pla en quatre regions que s'anomenen quadrants. Així, segons a quin quadrant estigui el 2n costat d'un angle representat en el sistema de referència, direm que l'angle és del 1r, 2n, 3r o 4t quadrant.

A.2

a) Dibuixa un sistema de referència per mesurar angles.

b) Transporta sobre el sistema de referència els angles següents, mesura'ls i digues a quin quadrant pertanyen.



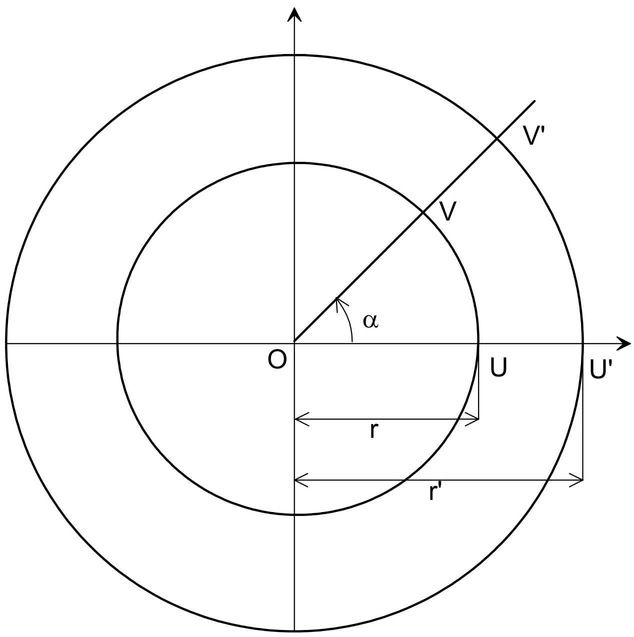
A.3

Redueix al primer gir positiu i representa els angles següents:

370º ; 400º ; 1000º ; 3600º ; -20º ; -270º

MESURA D'UN ANGLE EN RADIANS

Hem vist que a un angle UOV de mesura α li associem un gir de centre O que transforma el punt U en el punt V, o el punt U' en el V'.



Un cop fixat un radi, l'amplitud de l'angle o el gir la podem donar mesurant la longitud de l'arc. Està clar que per a un mateix angle si variem el radi també variem la longitud de l'arc. Però si agafem com a unitat de mesura el radi, la mesura de l'arc corresponent no dependrà de quin radi hàgim considerat perquè la mesura de l'arc és proporcional al radi:

$$\frac{\text{arcUV}}{r} = \frac{\text{arcU}'\text{V}'}{r'} = \textbf{mesura de l'angle } \boldsymbol{\alpha} \textbf{ en radians}$$

Aquesta **mesura de l'arc agafant per unitat el radi** ens dóna una mesura de l'angle o gir en **radians.**

Així, definirem **1 radià** com **la mesura d'un angle que determina un arc de circumferència de longitud igual al radi.**

Un gir complet, o sigui un angle de 360º, determina una arc que és tota la circumferència i que té longitud $2\pi r$, i prenent el radi com a unitat de mesura d'arcs tindrem que **360º són 2π radians**.

A.4

a) Quants radians mesura un angle de 180º? I un de 90º? I un de 45º? I un de 30º? I un angle de 270º? I un de 720º? (Expressa-ho en una taula posant els radians com un múltiple o submúltiple de π radians)

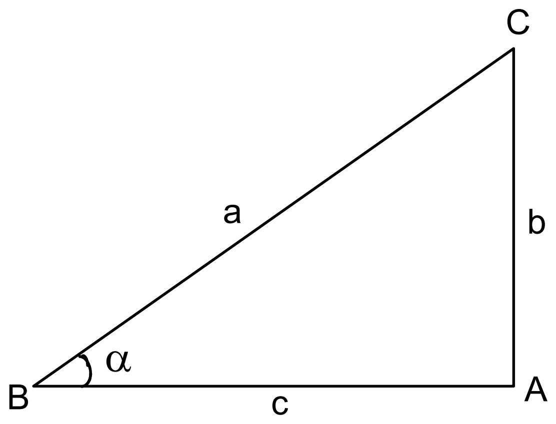
b) Quants graus mesura un angle d'un radià?

c) Expressa en graus sexagesimals el angles de 3π rad, $\frac{\pi}{5}$rad, rad i $\frac{2\pi}{3}$rad.

B raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

Recorda que en un triangle rectangle:

sin $\alpha = \frac{b}{a}$



cos $\alpha = \frac{c}{a}$

tan $\alpha = \frac{b}{c}$

i que hem demostrat que es compleixen les igualtats següents:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B.1 CONSTRUCCIÓ D'UN CERCLE TRIGONOMÈTRIC D'1 dm DE RADI

Per visualitzar més bé aquest estudi, dibuixa sobre paper mil·limetrat uns eixos de coordenades. Amb centre l'origen de coordenades O dibuixa un cercle de radi 1dm. i gradua'l de 10º en 10º des de 0º a 360º, començant a partir del semieix positiu d'abscisses. Aquest cercle l'anomenarem **cercle trigonomètric**.

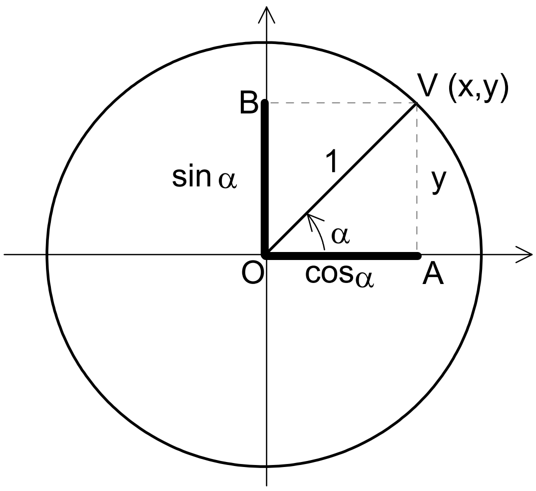
Un cercle trigonomètric és un cercle que té el centre a l'origen de coordenades i té per radi la unitat.

B.2

Utilitza el cercle trigonomètric d'1 dm de radi per trobar, amb una precisió de dues xifres decimals, el sinus i el cosinus dels angles de la taula següent. Per a això considera els angles representats sobre el sistema de referència del cercle. Calcula també la tangent a partir del sinus i el cosinus. Pots comprovar l'error comès mitjançant la calculadora:

	sin	cos	tan
20º			
50º			
85º			

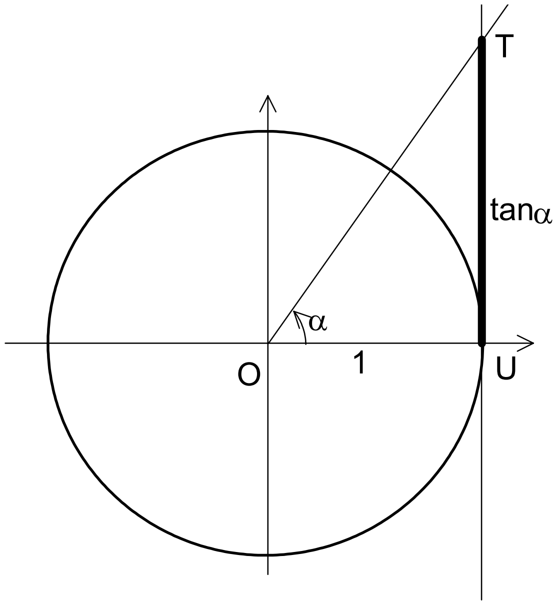
EL SINUS I EL COSINUS D'UN ANGLE AGUT EN UN CERCLE TRIGONOMÈTRIC



Si representem un angle agut en un cercle trigonomètric a partir del triangle rectangle OAV, podem veure que **el sinus** de l'angle és **l'ordenada y** del punt V on talla el segon costat de l'angle amb el cercle. I **el cosinus** és **l'abscissa x** d'aquest punt.

De manera que en un cercle trigonomètric podem representar el sinus com un segment OB sobre l'eix d'ordenades i el cosinus com un segment OA en el d'abscisses.

LA TANGENT D'UN ANGLE AGUT EN UN CERCLE TRIGONOMÈTRIC



Si representem un angle agut en un cercle trigonomètric, i tracem la recta tangent a la circumferència en el punt U, tenim el triangle rectangle OUT que té el catet adjacent a l'angle de longitud 1. Per tant el segment UT representa la tangent trigonomètrica de l'angle.

B.3

A partir del segment que representa la tangent trigonomètrica d'un angle, troba en el teu cercle trigonomètric tan 10º, tan 30º i tan 50º.

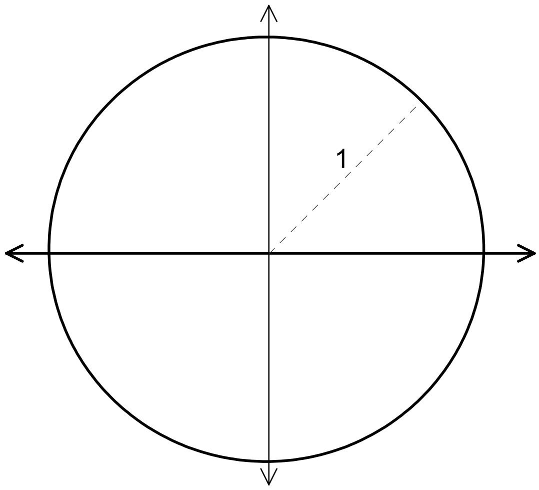
B.4 EL SINUS I EL COSINUS D'UN ANGLE QUALSEVOL

a) Ampliant la definició de sinus i cosinus d'un angle agut en un cercle trigonomètric a un angle qualsevol, com creus que podries trobar a partir del cercle d'1 dm de radi el sinus i el cosinus d'angles més grans de 90º, per exemple d'un angle de 120º? (Les raons trigonomètriques d'angles no aguts poden ser negatives).

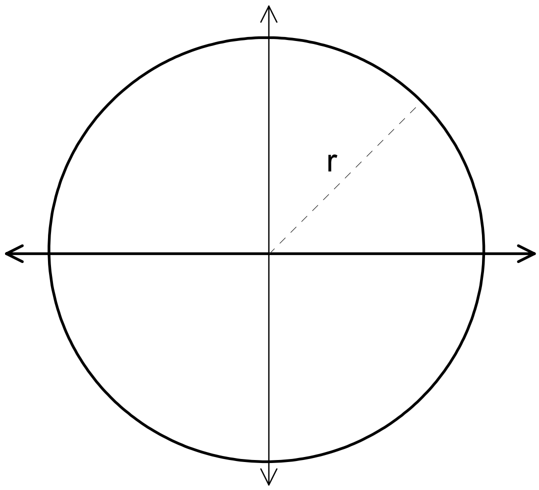
a) Omple a partir del cercle trigonomètric la taula següent:

	sin	cos
130º		
260º		
340º		
450º		
-10º		
-140º		

b) Com definiries el sinus i el cosinus d'un angle de mesura α qualsevol que estigués representat en un cercle de radi unitat?



c) I si l'angle de mesura α qualsevol estigués representat en un cercle de radi **r,** com definiries el sinus i el cosinus ?



d) Quin valor pren el sinus i el cosinus de 0º, 90º, 180º, 270º i 360º ?

B.5 LA TANGENT D'UN ANGLE QUALSEVOL

a) Com creus que podries trobar la tangent d'angles més grans de 90º a partir del seu sinus i cosinus?

b) Omple la taula següent a partir de les dades de l'apartat b) de l'exercici B3:

	tan
130º	
260º	
340º	
-10º	
-140º	

c) Com definiries la tangent d'un angle de mesura α qualsevol?

d) Intenta calcular la tangent dels angles de 0º, 90º, 180º, 270º i 360º ? Pots calcular la tangent de tots aquests angles? Perquè?

.

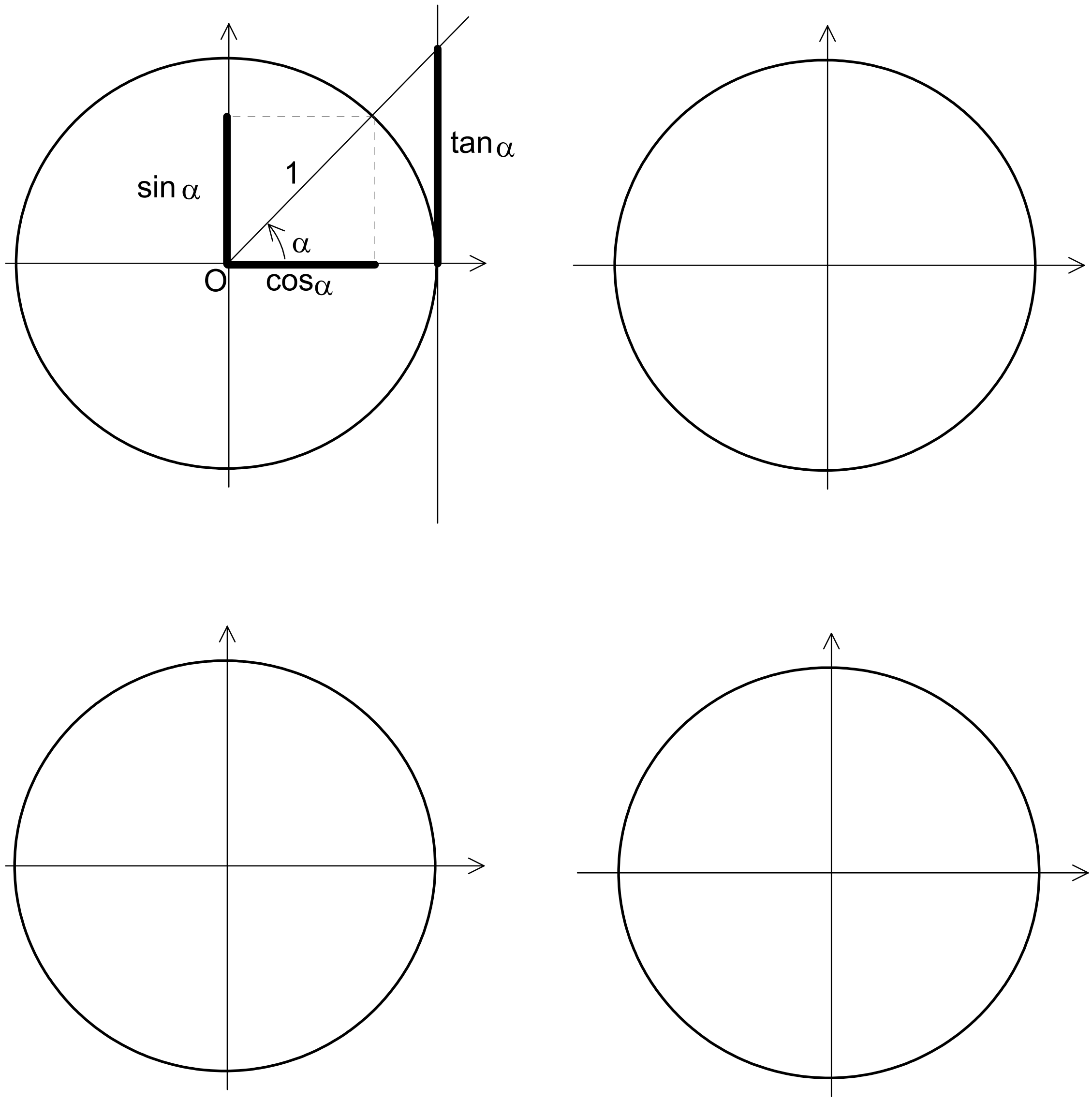
B.6 EL SIGNE DE LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

a) Digues en quin quadrant es troba el segon costat dels angles següents i troba el signe de les raons trigonomètriques. Intenta fer-ho mentalment, imaginant-te la posició de l'angle en el cercle trigonomètric en el cas del sinus i cosinus.

	QUADRANT	SIGNE sin cos tan
156º		
25º		
293º		
97º		
200º		
-70º		
-304º		
500º		

B.7 SEGMENTS QUE REPRESENTEN EL SINUS, COSINUS I TANGENT D'UN ANGLE EN UN CERCLE TRIGONOMÈTRIC.

En el primer cercle trigonomètric hi tens un angle del primer quadrant i els segments que representen les seves tres raons trigonomètriques. Representa en els altre tres cercles un angle del segon, tercer i quart quadrant i indica de forma clara el segment que correspon a cada raó triogonomètrica. En el cas de la tangent tingues en compte que sempre es representa sobre la recta tangent a la circumferència que tens dibuixada en el primer cercle prolongant la recta que conté el segon costat de l'angle de manera que talli la recta tangent.



C relacions entre les raons trigonomètriques d'angles diferents

C.1

Utilitza el cercle trigonomètric d'1dm de radi per trobar en cada apartat **tots els angles del primer gir** que compleixen la condició donada. Un cop hagis trobat les solucions aproximades amb el cercle trigonomètric, utilitza les funcions trigonomètriques inverses de la calculadora per determinar-les amb més precisió.

a) $\sin \alpha = 0.34$ b) $\tan \alpha = 0.95$ c) $\cos \alpha = -0.23$

d) $\tan \alpha = -0.20$ e) $\cos \alpha = 0.87$ f) $\sin \alpha = -0.54$

C.2

Coneixent que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, troba les següents raons trigonomètriques exactes raonant sobre un cercle trigonomètric.

a) $\cos 150^\circ$; $\cos 210^\circ$; $\cos 330^\circ$; $\cos(-30^\circ)$

b) $\sin 60^\circ$; $\sin 120^\circ$; $\sin 240^\circ$; $\sin 300^\circ$; $\sin(-60^\circ)$

C.3

Digues si son certes o falses les igualtats següents per a qualsevol angle α. En cas que siguin falses canvia la raó trigonomètrica o/i el signe de manera que esdevinguin certes:

a) $\sin \alpha = \sin(180^\circ + \alpha)$ b) $\sin \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$

c) $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ d) $\cos \alpha = -\sin(-\alpha)$

e) $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$ f) $\tan \alpha = \tan(360^\circ - \alpha)$

g) $\cos \alpha = -\cos(360^\circ + \alpha)$ h) $\cos \alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$

i) $\sin \alpha = \sin(270^o - \alpha)$ j) $\cos \alpha = -\cos(90^o - \alpha)$

C.4

Completa a la taula següent les igualtats que ens permeten trobar les raons d'angles del 2n, 3r, 4t quadrant en funció o a partir de les raons trigonomètriques d'angles del 1r quadrant, i veure la relació entre les raons trigonomètriques d'angles complementaris i angles oposats. (Recorda que dos angles són complementaris si sumen 90º)

2n quadrant $90^o < \alpha < 180^o$	**3r quadrant** $180^o < \alpha < 270^o$	**4t quadrant** $270^o < \alpha < 360^o$	**angles complementaris**	**angles oposats**
$\sin \alpha = \sin(180^o - \alpha)$	$\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180^o)$	$\sin \alpha = -\sin(360^o - \alpha)$	$\sin \alpha = \cos(90^o - \alpha)$	$\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$
$\cos \alpha =$	$\cos \alpha =$	$\cos \alpha =$	$\cos \alpha =$	$\cos \alpha =$
$\tan \alpha =$	$\tan \alpha =$	$\tan \alpha =$	$\tan \alpha =$	$\tan \alpha =$

D fórmules d'addició

D.1

a) Troba el valor de $\sin(30^\circ + 60^\circ)$

b) Calcula $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$

c) Què pots dir de la igualtat $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$

d) Calcula $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

e) Repeteix el mateix que has fet als apartats anteriors per al $\sin(15^\circ + 30^\circ)$ i per al $\sin(30^\circ + 45^\circ)$

f) Creus que podem treure alguna conclusió?

Heu de tenir compte de no confondre la raó trigonomètrica de la suma de dos angles amb la suma de les dues raons trigonomètriques.

Per tal de calcular les raons trigonomètriques d'una suma d'angles a partir de les raons trigonomètriques d'aquests angles, utilitzarem les anomenades fórmules d'addició:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

D.2

A partir de les raons trigonomètriques dels angles de **30º** i **45º** troba el sinus i el cosinus dels angles de 75º , 60º , 15º i 90º, utilitzant les **fórmules d'addició** .

D.3

A partir de les fórmules de l'addició troba una fórmula que posi el sinus de l'angle 2α en funció de les raons de l'angle α. Fes el mateix per al cosinus de 2α.

D.4

Troba les fórmules de $\sin(a + b + c)$ i $\cos(a + b + c)$ en funció de les raons trigonomètriques dels angles a, b i c.

E funcions periòdiques: les funcions trigonomètriques

Hi ha molts fenòmens que tenen un comportament periòdic, o sigui que es van repetint, amb característiques iguals. Així, per exemple, les marees comporten una variació del nivell del mar de forma periòdica. El fenomen de les marees es manifesta especialment en els grans oceans i és degut a l'atracció gravitatòria del Sol i la Lluna.

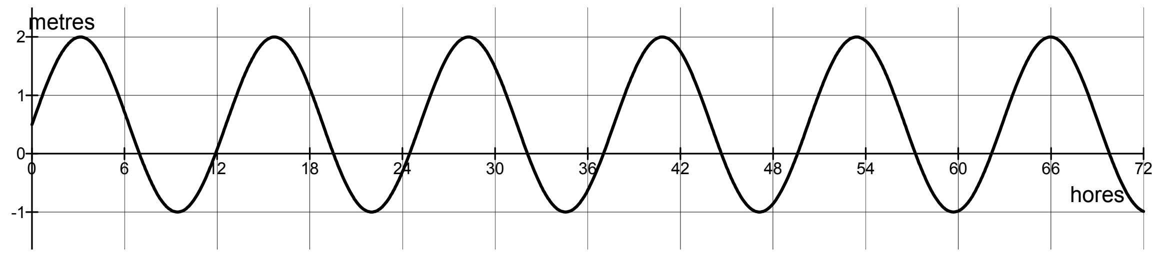
S'anomena **amplitud** de la marea a la meitat de la variació total del nivell del mar entre el moment de nivell màxim (marea alta) i el moment de nivell mínim (marea baixa). S'anomena **període** al temps transcorregut entre dues posicions idèntiques consecutives. Dues posicions idèntiques no vol dir només del mateix nivell, sinó que el fenomen està exactament en la mateixa fase.

E.1

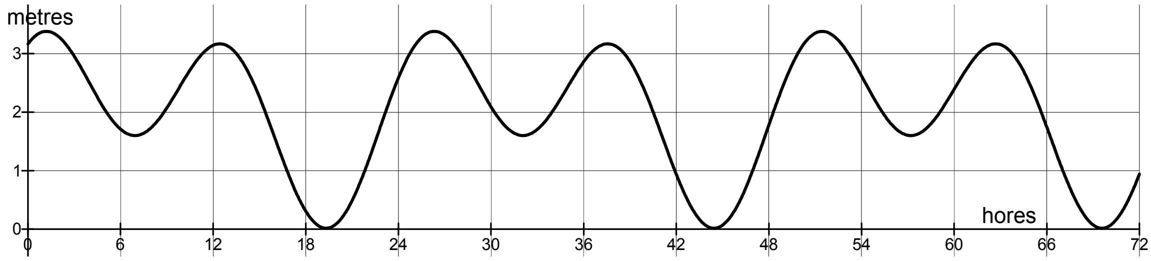
El gràfic següent ens indica el nivell del mar al llarg de tres dies a una localitat costera en dues èpoques de l'any

.

GRÀFIC A:



GRÀFIC B:



a) Quina és l'amplitud aproximada de les marees dels dos gràfics?

b) Quina és el període aproximat en cada cas?

c) Descriu un parell de fenòmens que puguin ser representats per mitjà d'una funció periòdica. Indica per a cadascun d'ells quines són les dues variables, quina és l'amplitud del fenomen i quin és el període. Fes-ne un croquis del gràfic.

LA FUNCIÓ SINUS

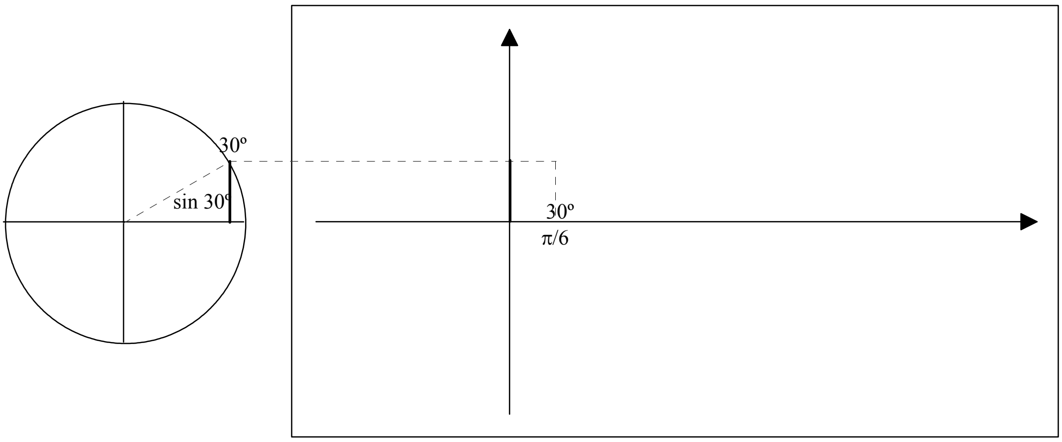
Hem definit les raons trigonomètriques per a un angle qualsevol. Per això podem ara considerar la funció sinus: y = sin (x):

$$\begin{array}{rccc} \sin: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & \sin(x) \end{array}$$

E.2 Construcció del gràfic de la funció sinus.

Fes el gràfic de la funció sinus en un sistema de referència seguint les indicacions següents:

- fes el gràfic per a angles entre -180º i 360º , o sigui entre $-\pi$ i 2π radians.
- en paper mil·limetrat A4 apaïsat.
- a l'eix d'abscisses agafa 0,5 cm per a 10º. Indica els valors dels angles en graus cada 20º i en radians per als angles de $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ i 2π radians. (Pots posar els graus sobre de l'eix i els radians a sota)
- a l'eix d'ordenades agafa 5 cm per a la unitat.
- fes una taula de valors de 10 en 10º, o bé
- construeix un cercle trigonomètric de radi 5 cm, indica-hi els angles de 10 en 10º i posa'l davant del sistema de referència, tal com s'indica a a figura següent, de manera que podràs trobar els punts del gràfic directament.

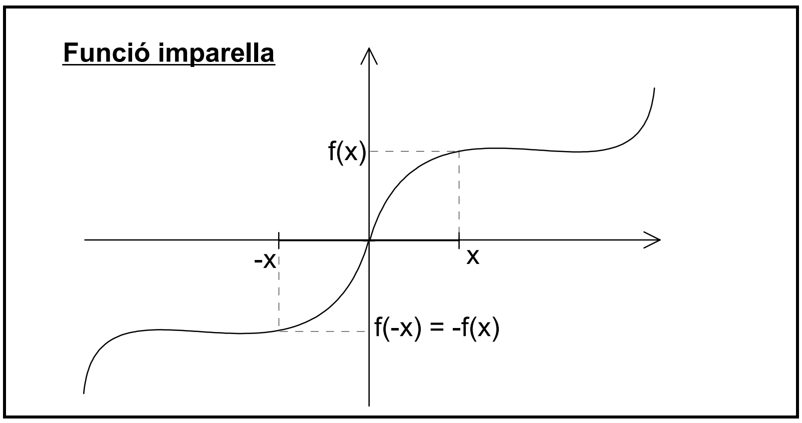


E.3 Propietats i característiques de la funció sinus i el seu gràfic.

Indica les característiques de la funció sinus. Pots regir-te pel guió següent:

- Domini i conjunt de les imatges.
- Període
- Zeros de la funció (punts de tall a l'eix d'abscisses).
- Signe de la funció.
- Comportament: creixement i extrems.
- Amplitud.
- Simetries del gràfic.

Les funcions que tenen un tipus de simetria com la funció sinus, es a dir que són **simètriques respecte de l'origen de coordenades**, se'n diuen funcions **imparelles.**
Compleixen que $\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per a tots els valors del domini.



LA FUNCIÓ COSINUS

Considerem ara la funció cosinus y = cos (x)

$$\cos:\quad D \to \mathbb{R}$$
$$x \to \cos(x)$$

E.4 Construcció del gràfic de la funció cosinus.

Fes el gràfic de la funció cosinus en un sistema de referència seguint les mateixes indicacions que per a la funció sinus. En aquest cas hauràs de fer-ho amb una taula de valors perquè no pots usar directament el cercle de 5 cm de radi (si vols usar el cercle hauràs de pensar-te algun truc).

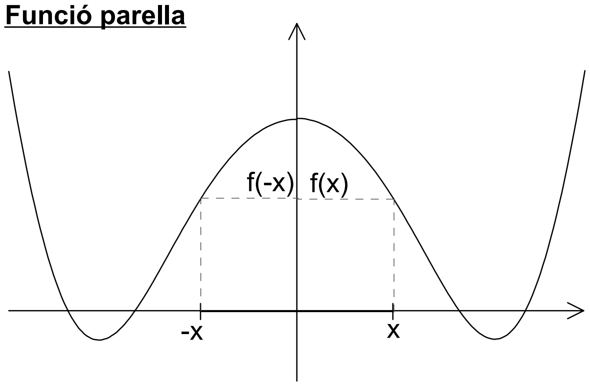
E.5 Propietats i característiques de la funció cosinus i el seu gràfic.

Indica les característiques de la funció cosinus. Pots regir-te pel guió següent:

- Domini i conjunt de les imatges.
- Període
- Zeros de la funció (punts de tall a l'eix d'abscisses).
- Signe de la funció.
- Comportament: creixement i extrems
- Amplitud.
- Simetries del gràfic.
- Relació amb la funció sinus.

Les funcions que tenen un tipus de simetria com la funció cosinus, es a dir que són **simètriques respecte de l'eix d'ordenades**, se'n diuen funcions **parelles.** Compleixen que $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ per a tots els valors del domini.

Funció parella



LA FUNCIÓ TANGENT

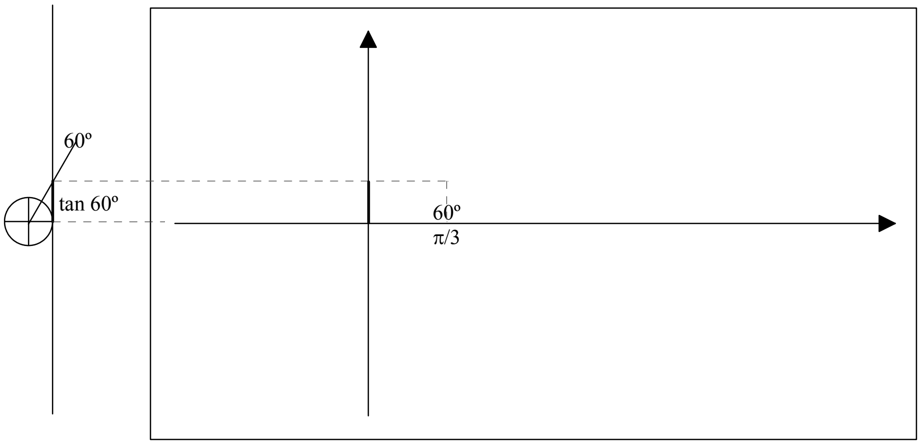
Considerem ara la funció tangent y = tan(x)

$$\begin{array}{llll} tg: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & \tan(x) \end{array}$$

E.6 Construcció del gràfic de la funció tangent.

Fes el gràfic de la funció tangent en un sistema de referència seguint les mateixes indicacions que per a la funció sinus i cosinus excepte en la unitat de l'eix d'ordenades:

- a l'eix d'ordenades agafa 1 cm per unitat.
- En aquest cas pots fer una taula de valors, però també pots utilitzar un petit cercle trigonomètric de 1 cm de radi tal com s'indica a la figura.



E.7 Propietats i característiques de la funció tangent i el seu gràfic.

Indica les característiques de la funció tangent. Pots regir-te pel guió següent:

- Domini (atenció amb els angles que no tenen tangent) i conjunt de les imatges.
- Període
- Zeros de la funció (punts de tall a l'eix d'abscisses).
- Signe de la funció.
- Comportament: creixement i extrems
- Amplitud.
- Simetries del gràfic.
- Quina relació hi ha entre el gràfic de la funció i les rectes paral·leles a l'eix d'ordenades corresponents als angles que no tenen tangent? Traça aquestes rectes en el teu gràfic.

Les rectes com les que has dibuixat a l'apartat anterior com ara la $x=\frac{\pi}{2}$ paral·lela a l'eix d'ordenades a les quals tendeix el gràfic de la funció cada vegada més quan considerem angles més propers a $\frac{\pi}{2}$, s'anomenen **asímptotes** del gràfic. En llenguatge simbòlic això s'indica:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} \tan x = +\infty \quad \text{i}$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}} \tan x = -\infty$$

Aquestes expressions es llegeixen:

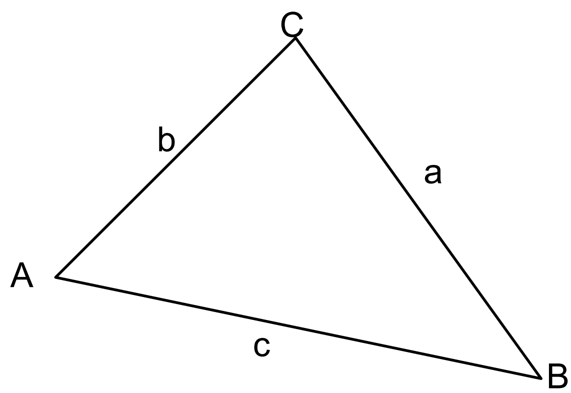
"**límit quan x tendeix a $\frac{\pi}{2}$ per l'esquerra** (per això es posa un signe menys a sobre de $\frac{\pi}{2}$) **de tangent de x, és més infinit**" i

"**límit quan x tendeix a $\frac{\pi}{2}$ per la dreta** (per això es posa un signe més a sobre de $\frac{\pi}{2}$) **de tangent de x, és menys infinit**"

F resolució de triangles

Recordeu que resoldre un triangle vol dir trobar el valor dels seus tres costats i dels seus tres angles. Per poder resoldre un triangle són necessàries tres dades, una de les quals ha de ser un costat. Així ens trobarem amb quatre casos:

1) Ens donen un costat i els dos angles adjacents
2) Ens donen dos costats i l'angle comprès
3) Ens donen dos costats i l'angle oposat a un d'ells.
4) Ens donen tres costats.



Recordeu també que en un triangle els angles els anomenem amb una lletra majúscula i els costats oposats amb la mateixa lletra però minúscula.
Un triangle el podem resoldre gràficament: dibuixant-lo a partir de les dades i mesurant els costats i angles que falten. Però també podem resoldre'l analíticament mitjançant càlculs a partir de les dades.
El curs passat vau resoldre triangles gràficament però analíticament només vau resoldre triangles a partir de les raons trigonomètriques d'un angle agut i el teorema de Pitàgores.

F.1
Resol el triangle rectangle que té per catets 3 i 7 cm.

Per poder resoldre analíticament qualsevol triangle necessitarem dos teoremes:

TEOREMA DEL SINUS:

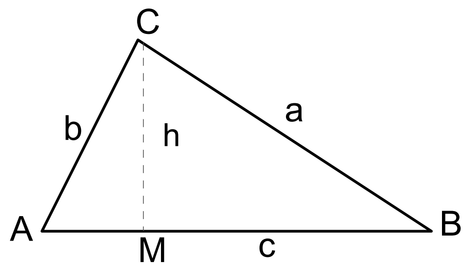
"Els costats d'un triangle són proporcionals als sinus dels angles oposats".

Es a dir:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Per demostrar-lo, considerem un triangle qualsevol ABC, tracem l'altura des del vèrtex C (perpendicular al costat oposat).

Amb això, el triangle ABC ens queda dividit en dos triangles rectangles : AMC i BMC, als que podem aplicar la definició de raó trigonomètrica d'un angle agut en un triangle rectangle. Tindrem per tant,



considerant el triangle AMC:

sin A = $\frac{CM}{b}$; **CM** = b·sinA

considerant ara el triangle BCM:

sin B = $\frac{CM}{a}$; **CM** = a·sinB

Igualant aquestes dues expressions que hem obtingut per **CM :**

b·sinA = a·sinB igualtat que podem expressar en la forma: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Si repetíssim el procés per l'altura traçada des del vèrtex A demostraríem :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

i si ho féssim per la tercera altura trobaríem:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

lo que ens permet formular l'anomenat **teorema del sinus:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Si un dels angles A o C fos obtús l'atlura h seria exterior. La demostració aleshores tot i que canvia una mica és molt similar (Cal considerar triangles rectangles exteriors). Pots intentar de fer-la.

TEOREMA DEL COSINUS:

" **En tot triangle, el quadrat d'un costat és igual a la suma dels quadrats dels altres dos menys el doble del producte d'aquests dos costats pel cosinus de l'angle que formen**."

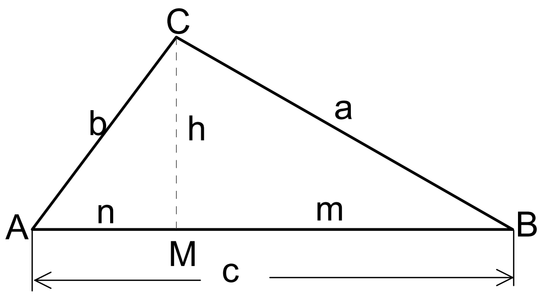
Es a dir:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Per demostrar-lo, considerem un triangle qualsevol ABC, tracem l'altura des del vèrtex C (perpendicular al costat oposat).



Amb això, el triangle ABC ens queda dividit en dos triangles rectangles : AMC i BMC.

Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle BMC rectangle a M:

$a^2 = h^2 + m^2$

però com el costat $c = m + n$ tenim que $m = c - n$. Substituint aquesta expressió que hem obtingut per m en la que tenim d'aplicar el teorema de Pitàgores, resulta:

$a^2 = h^2 + (c - n)^2 = h^2 + c^2 - 2cn + n^2$

aplicant el teorema de Pitàgores ara al triangle CMA, rectangle a M tenim que:

$b^2 = h^2 + n^2$, podem per tant substituir a l'expressió anterior $h^2 + n^2$ per b^2 i ens queda en la forma:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$

al mateix triangle CMA $\cos A = \frac{n}{b}$ i , aïllant l'n $n = b \cdot \cos A$ expressió d'n que podem substituir a la igualtat anterior:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos A$

Fent el mateix en el cas de les altures traçades des d'els altres dos vèrtexs demostraríem les altres dues igualtats.

Si l'altura és exterior, o sigui B o C són obtusos, caldrà variar una mica la demostració. (Cal considerar triangles rectangles exteriors). Pots intentar de fer- la.

F.2

Resol **analíticament i gràfica** els següents triangles:

a) a = 11 cm B = 110º C = 40º

b) b = 10 cm c = 7 cm A = 30º

c) **1)** b = 11 cm c = 8 cm B = 40º
2) a = 9 cm b = 12 cm A = 70º
3) a = 14 cm c = 10 cm C = 25º

d) a = 10 cm b = 15 cm c = 12 cm

F.3

Fes un esquema dels diversos casos que es poden donar al resoldre un triangle si coneixem dos costats i un angle que no és el determinat pels dos costats coneguts (les dades són **a** , **b** i **A**)
Indicació: Considera per separat el cas que A sigui agut i el cas que sigui obtús. Analitza la situació segons la relació de les longituds dels costats a i b.

F.4

Resol analíticament els triangles:

a) a = 9 cm b = 15 cm A = 30º

b) a = 13 cm b = 11 cm c = 9 cm

c) b = 12 cm c = 7 cm B = 50º

d) a = 12 cm b = 6 cm C = 115º

e) a = 5 cm b = 4 cm c = 11 cm

f) a = 8 cm b = 7 cm B = 95º

F.5

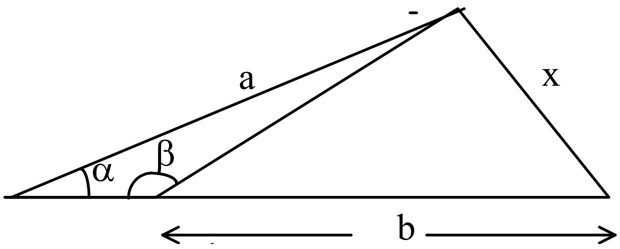
Un vaixell surt d'un port navegant a 45 Km/h. A 15 Km en direcció nord del port hi ha un far. Si el vaixell navega en direcció nord-oest, troba la seva distància al far al cap d'una hora i mitja d'haver sortit del port.

F.6

Un riu té les dues riberes paral·leles. Des de dos punts d'una d'elles distants 30 m., s'observa un punt situat a l'altre costat. Les visuals formen amb la direcció de l'aigua del riu uns angles respectius de 28º i 54º. Calcula l'amplada del riu.

F.7

Troba una fórmula que expressi **x** en funció d'**a, b,** α**,** β.



F.8

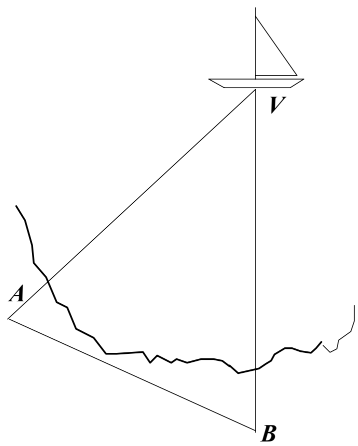
Des de dos punts **A** i **B** distants 20 m. , observem dos altres punts **C** i **D** inaccessibles. Si coneixem els angles:

$D\hat{A}B = 72^{\circ}$ $C\hat{B}A = 38^{\circ}$ $D\hat{A}C = 28^{\circ}$ $C\hat{B}D = 20^{\circ}$

i des d'A veiem el punt D entre C i B, troba gràficament i analítica la distància entre **C** i **D**.

F.9

Des d'una platja, observem un vaixell ancorat en el mar. Per a saber a quina distància es troba fem dues observacions des dels punts A i B separats per una distància de 100m. Mesurem els angles VAB i ABV : 88º 12' i 89º 35' respectivament.



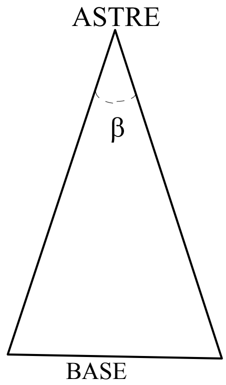
a) Calcula les distàncies AV i BV.

b) Si la precisió dels angles és de ± 1' d'arc. Calcula quin és l'error màxim que s'ha pogut cometre als càlculs de l'apartat anterior.

c) Troba el mateix error si l'error en els angles hagués estat de ± 15'.

F.10

El procés seguit per calcular la distància a l'exercici anterior està basat en l'efecte de paral·laxi. És el mateix procediment que s'ha fet servir en astronomia per a saber amb precisió les distàncies a que es troben els astres.



a) Així per a saber la distància de la Terra a la Lluna es fan observacions agafant com a base una distància igual al radi de la Terra (6 370 km). L'angle β (angle de paral·laxi) té un valor de 0,95º. Calcula amb aquestes dades la distància de la Terra a la Lluna.

b) L'estel més proper a la Terra és Alpha Centauri. Utilitzant com a base d'observació el diàmetre de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol (la distància de la Terra al Sol és de 150 milions de km) i sabent que l'angle de paral·laxi és de 1,52 segons d'arc, calcula la distància a que ens trobem d'aquest estel.