Música

M i M

Matemàtiques

Núria Pous Soler

Tutors: Josep Mª Moreno
i David Manzanares

I.E.S. Antoni Pous
Manlleu, gener 2003

Índex

Índex 3
Agraïments 4
0. Introducció 5
1. Característiques musicals del so 6
2. Les qualitats del so 7
  2.1 L’altura i to 7
  2.2 La intensitat 7
  2.3 El timbre..7
  2.4 La durada..7
3. L'origen de l'escala musical 8
  3.1 La sèrie harmònica 10
4. Construcció d’escales 12
  4.1 Sistema pitagòric 12
    4.1.1 Semitons 15
    4.1.2 Comes...16
  4.2 Sistema temperat...17
    4.2.1 Progressió geomètrica 18
    4.2.2 Altres sistemes temperats 20
  4.3 Altres sistemes d’afinació 21
    4.3.1 Sistema Zarlino (1517 – 1590) 21
    4.3.2 Sistema Delezenne 21
    4.3.3 Sistema De Rameau 21
5. Successió de Fibonacci i la proporció àurea 22
  5.1 La secció àuria en l’obra de Bartok..24
  5.2 Simbologia i numerologia en J.S. Bach 37
    5.2.1 La secció àuria 37
    5.2.2 Números i lletres: BACH=14 41
    5.2.3 El tema Bach...41
6. Forma dels instruments 43
  6.1 L'ona produïda per un tub tancat 43
  6.2 L'ona produïda per una corda vibrant. 45
  6.3 El violí 47
    6.3.1 Esbós descriptiu..47
    6.3.2 Detalls tècnics i morfològics 48
    6.3.3 Nocions específiques 50
7.Conclusions 52
8. Bibliografia...53

Agraïments

Aquest treball no hagués estat possible sense la col·laboració de diferents persones, entre elles:

Josep Mª Moreno, tutor d'aquest treball, que m'ha orientat i m'ha donat tota mena de consells.

David Manzanares, tutor d'aquest treball.

Assumpta Alzina, professora de matemàtiques, per la informació que m'ha facilitat

Ramon Ferrer, professor de música, pel material de consulta que m'ha deixat i la seva ajuda en l'anàlisi de les obres musicals.

Manlleu, 17 de gener de 2003

0. Introducció

Des de l'antiguitat s'ha donat per certa l'existència d'una relació entre les matemàtiques i la música, dues matèries que hom qualificaria d'entrada d'allunyades, però que presenten uns lligams que sovint s'estenen a aquells qui les fan: els músics i els matemàtics. L' afirmació que les matemàtiques habiten a tot arreu com un virus difícil d'exterminar i que sense elles difícilment es pot avançar en qualsevol camp del coneixement, no ha estat mai tan arrelada en la opinió publica com avui dia. Es per això que també ens podem plantejar la relació d'aquestes dues disciplines: les matemàtiques i la música. Quines matemàtiques hi ha a la música? Com establir aquesta connexió? Són algunes de les qüestions que es plantegen en aquest treball, les relacions entre dues matèries que tot i que ens poden semblar tant diferents, ens poden portar al punt de no poder abastar tots els aspectes que les relacionen.

El treball, dividit en tres grans blocs, intenta analitzar els aspectes més significatius de la relació matemàtica-música. En el primer bloc, es descriuen aspectes relacionats amb el so, per després endinsar-se en el món de les escales musicals i el seu origen. En segon bloc, es tracta la utilització de fórmules matemàtiques en la composició, concretament s'estudia la proporció àuria i la successió de Fibonacci, i en el tercer bloc, - tot i que té més relació amb la física- es fa referència als instruments, ja que són els elements que fan possible la creació de la música.

Tot plegat serveix per fer una primera anàlisi de la relació que es pot establir entre música i matemàtiques.

1. Característiques musicals del so

La música es fa amb sons. Anomenem so a la sensació auditiva que produeix en nosaltres el fenomen físic originat per les vibracions dels cossos.

En el so distingim diversos elements, com la intensitat o força amb què es produeix aquest so; altura que ens fa considerar-lo com agut, mitjà o greu; el timbre, que és aquella qualitat del so gràcies a la qual sabem per quin instrument o veu està produït el so que escoltem; i la duració que ens permet apreciar el temps que el so està en la nostra oïda.

Existeix una distinció entre so i soroll. El so està produït per vibracions regulars i periòdiques, i el soroll per vibracions irregulars que donen aquesta sensació confusa, sense entonació determinada.
Tradicionalment la música es feia amb sons i no pas amb sorolls, però avui en dia això no es pot afirmar. La música fa servir qualsevol so o soroll sigui natural o artificial.

2. Les qualitats del so

2.1 L'altura i to

L'altura d'un so és la qualitat que es vol expressar quan es diu que un so és més agut o més greu que un altre. La característica subjectiva de l'altura és el que es denomina to d'un so.

L'altura d'un so depèn principalment de la freqüència del moviment vibratori que l'origina, així el sons greus són produïts per moviments vibratoris de freqüència petita i els sons aguts per freqüències elevades.

L'oïda no reacciona davant totes les freqüències possibles de moviments vibratoris, sinó que només transforma en so una petita part d'elles. La gamma de freqüències apta per ser transformada en sons per la nostra oïda, abasta aproximadament des de 16 Hz a 20.000 Hz.

2.2 La intensitat

La intensitat d'un so és la qualitat que es vol expressar quan es diu que un so és més fort o més dèbil que un altre. La seva traducció en el sentit auditiu es coneix amb el nom de sonoritat.

Depenent del vigor i la força que la pertorbació produeix en les molècules en vibració, el so serà més o menys intens. Aquest vigor es tradueix en una major o menor amplitud de l'oscil·lació en la vibració molecular. Llavors la intensitat depèn de la distància a què es troba situat el foc sonor de l'oient i la capacitat auditiva d'aquest.

2.3 El timbre

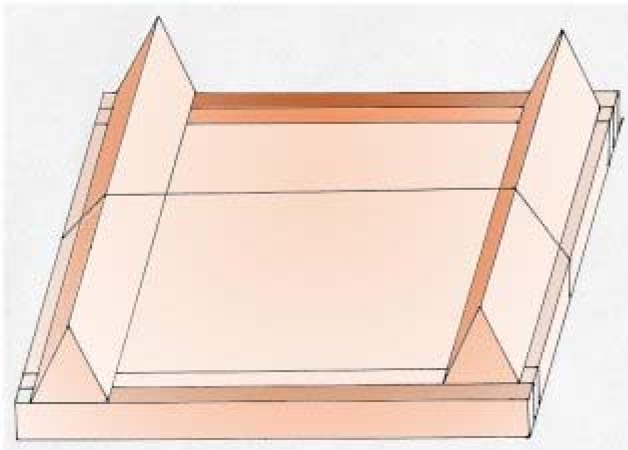
Si el to permet diferenciar uns sons d'uns altres per la seva freqüència, i la intensitat els sons forts o dèbils, el timbre completa les possibilitats de varietats de l'art musical des del punt de vista acústic, per què és la qualitat que permet distingir els sons produïts pels diferents instruments o veus. Aquesta qualitat física s'anomena forma d'ona.

2.4 La durada

La durada ens permet apreciar el temps que un so està present en la nostra oïda. Aquest temps ve definit pel ritme que ens permet fer sons llargs i curts.

3. L'origen de l'escala musical

L'escala actual (escala occidental) és el resultat d'un llarg procés d'aprenentatge de les notes. Aquest procés es remunta a la tradició pitagòrica de l’antiga Grècia. Els pitagòrics van construir un aparell anomenat monocordi que es componia d'un tauló, una corda tensa i un altre tauló més petit que s'anava movent pel tauló gran.

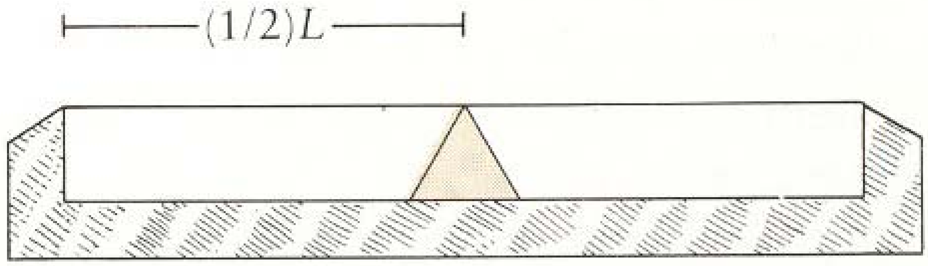


Monocordi

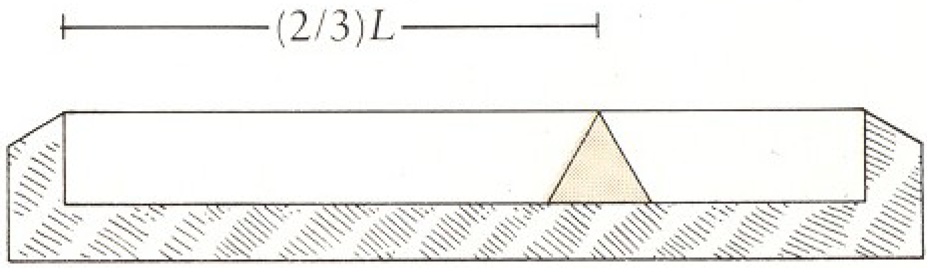
Els pitagòrics van observar que fent més o menys llarga la corda (movent la taula mòbil) es produïen sons diferents. Entre aquests sons van escollir alguns que eren harmoniosos amb el so original (corda sencera), aquests sons s’obtenien quan en escurçar la corda, el tros de corda que oscil·lava corresponia a una fracció (irreductible) n/m de la corda sencera, on el numerador **n** com el denominador **m** són enters petits. Quan més petit eren aquests enters més harmoniós es percebia el so simultani dels dos sons.

Els més importants, per la seva simplicitat i la seva importància a l'hora de construir l'escala musical, són:

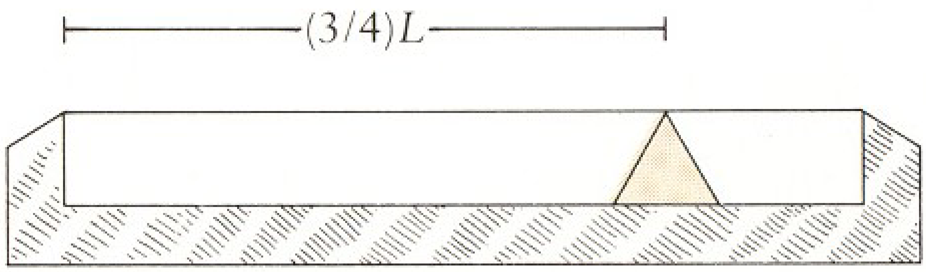
L'octava. Quan la corda feia un mig de la total, el so es repetia, però més agut. L'octava és el que correspondria a un salt de vuit tecles blanques del piano; o més ben dit, una octava és la repetició d'un so amb una corda amb la meitat de llargària, per tant, una altra nota harmoniosa. La seva freqüència és doble.



La quinta és un altre interval entre notes que s'obté amb una corda de llargària dos terços de la inicial. La seva freqüència és tres mitjos del so inicial. Correspon a un salt de cinc tecles blanques en un piano.



La quarta és, com les anteriors, un altre interval entre notes que s'obté amb una corda de llargària tres quarts de la inicial. La seva freqüència és quatre terços de la nota inicial.



Així, a partir d'un so original obtenim diferents notes harmonioses. Fent un petit esquema ens aclarirem més:

Nota	Freqüència	Long. corda
Original	f	L
Octava	2f	$\frac{1}{2}L$
Quinta	$\frac{3}{2}f$	$\frac{2}{3}L$
Quarta	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{4}L$

Si suposem que la nota inicial és el do, llavors l'octava, quinta i quarta són les notes:

Nota base	Quarta	Quinta	Octava
Do	Fa	Sol	Do (1 octava mes alta)

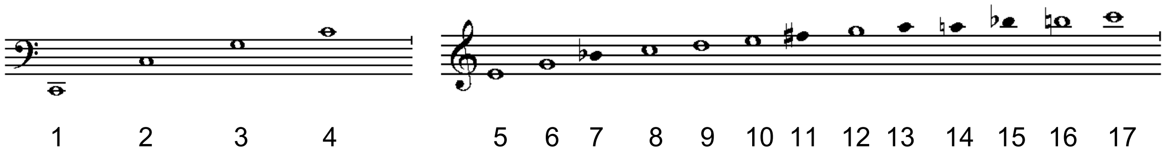
Aquestes notes corresponen, respectivament, a la quarta, quinta i vuitena notes de l'escala diatònica (les tecles blanques del piano).

Tot aquest procés es basa en el que actualment s'anomena la "sèrie harmònica", és a dir, els sons que degut a la relació entre les seves freqüències són harmoniosos amb un so fonamental. A continuació ho expliquem.

3.1 La sèrie harmònica

El to d'un so pot identificar-se amb la freqüència de la vibració que el produeix (número de oscil·lacions per segon). Com a conseqüència de la teoria de les series de Fourier (matemàtic francès dels segles XVIII i XIX), cada so de freqüència f pot considerar-se com la superposició de infinites ones sinoidals de freqüència f, 2f, 3f,.. i d'amplituds cada vegada més petita. L'ona sinoidal de freqüència f es diu so fonamental, i les de freqüència 2f, 3f, 4f,... que l'acompanyen s'anomenen harmònics. Per exemple, el quart harmònic de LA4 de freqüència 440 Hz serà igual a 440 x 4 =1.760 Hz. De la mateixa forma, si es coneix la freqüència fonamental i la de l'harmònic qualsevol, es pot saber el lloc que ocupa. En l'exemple anterior és clar que 1.760 : 440= 4. Per tant, 1760 Hz és la freqüència del quart harmònic de LA4.

A continuació tenim la sèrie harmònica de Do



Podem observar el següent:

- Els intervals (relació o distància entre dues notes) entre cada parell d'harmònics successius van sent més petits.
- Els sons de doble número d'ordre estan a distància d'octava i per tant són designades amb el mateix nom.

Una vegada formada l'escala dels harmònics, podem deduir els intervals que cada so forma amb els seus anteriors. Per fer-ho es compara cada harmònic amb tots els anteriors (nota aguda / nota més greu) dintre dels límits de la octava, és a dir, deduirem els intervals simples.

Exemple:
- Entre els sons 2 i 1; interval 2/1 = Octava
- Entre els sons 3 i 2; interval 3/2 = Quinta
- Entre els sons 4 i 3; interval 4/3 = Quarta
- etc. ..

Com podrem observar aquestes relacions coincideixen amb les estudiades pels pitagòrics.

4. Construcció d'escales

Una escala musical consisteix en seleccionar unes freqüències (entre totes les possibles, és a dir, entre tots els números reals positius). Els sons corresponents a les freqüències seleccionades s'anomenaran notes de l'escala i seran designades per noms concrets.

Hi ha diferents sistemes per construir escales, en el nostre treball ens centrarem en el sistema Pitagòric i el sistema temperat perquè són en els que hi trobem una relació matemàtica més interessant.

4.1 Sistema pitagòric

Pitàgores, segle VI a C. Va ser un filòsof grec, conegut avui com un gran matemàtic, tot i que per als antics va ser sobretot moralista i profeta. Va néixer a l'illa de Samos, es traslladà cap a l'any 532 a.C. a la Magna Grècia i fundà a Cretona el que avui s'anomena " Ordre pitagòric". Els pitagòrics van descobrir que la música es pot reduir a relacions mètriques i van estendre aquest descobriment a la seva imatge del cel i a tota classe de camps, fins a aconseguir els seus simbolismes nivells cabalístics en el neopitagorisme.

L'escala Pitagòrica té com a base la Quinta que resulta de l'exacta relació de la freqüència que representa la fracció 3/2 (sons 3 i 2 de la sèrie Harmònica).
En aquest sistema tots els sons s'obtenen per un encadenament de quintes, exactament ajustades a la fracció 3/2.

Per fer-ho agafarem d'exemple l'escala de do major, en la qual donarem valor "f" a la freqüència de do (fonamental de l'escala).

Escala de do major

Do re. S'obté encadenant dues quintes (do - sol – re). El problema és que la freqüència de " re" és més gran que 2f, i el que fem és trobar la mateixa nota una octava més avall, és a dir reduïm una octava l'interval que consisteix en dividir entre dos la freqüència, partint del concepte que una Octava correspon a la relació de freqüència 2/1.

dues quintes

$$f\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}f \;\rightarrow\; \begin{matrix}\text{reduir}\\ \text{una octava}\end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{9}{4\cdot 2}f=\frac{9}{8}f$$

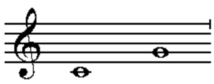
Do mi. S'obté encadenant quatre quintes (do – sol – re – la – mi) i reduint dues octaves.

quatre quintes

$$f\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{16}f \;\rightarrow\; \begin{matrix}\text{reduir}\\ \text{dues octaves}\end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{81}{16\cdot 4}f=\frac{81}{64}f$$

Do fa. S'obté invertint la quinta. Fa – do és una quinta però si l'invertim obtenim do – fa que és una quarta. Per tant si la quinta és 3/2 la quarta serà 2· 2 /3. Multipliquem per dos perquè en invertir el fa puja una octava.

$$f\cdot\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \begin{matrix}\text{invertir pujant}\\ \text{una octava}\end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{2\cdot 2}{3}f=\frac{4}{3}f$$



Do sol. Correspon a la quinta 3/2, per tant $\frac{3}{2}f$

Do la. S'obté encadenant tres quintes (do – sol – re – la) i reduint una octava.

tres quintes

$$f\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8}f \;\rightarrow\; \begin{matrix}\text{reduir}\\ \text{una octava}\end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{27}{8\cdot 2}f=\frac{27}{16}f$$

Do si. S'obté encadenant cinc quintes (do – sol – re – la – mi – si) i reduint dues octaves.

cinc quintes

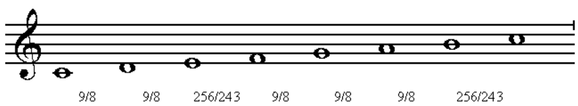
$$f\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{243}{32}f \;\rightarrow\; \begin{array}{c}\text{reduir}\\ \text{dues octaves}\end{array} \;\rightarrow\; \frac{243}{32\cdot 4}f=\frac{243}{128}f$$

Do do. són els sons 1 i 2 de la sèrie harmònica correspon a l'octava 2/1 f.

D'aquesta forma hem aconseguit les vuit notes de l'escala incluïda l'octava, que correspon a l'escala diatònica, amb les següents relacions de freqüència entre una nota hi l'anterior:

	Raó amb la nota anterior
Do – re	(9/8):1=9/8
Re – mi	(81/64):(9/8)=9/8
Mi – fa	(4/3):(81/ 64)= 256/243
Fa – sol	(3/2):(4/3)= 9/8
Sol – la	(27/16):(3/2)=9/8
La – si	(243/128):(27/16)=9/8
Si – do	2:(243/128)=256/243

Aquesta escala és l'escala iatònica que correspon a les notes blanques del piano. Podem veure que hi ha dues relacions diferents: el to 9/8 i el semitò 256/243. Podem veure que dos semitons fan gairebé un to, però que no són exactament el mateix.



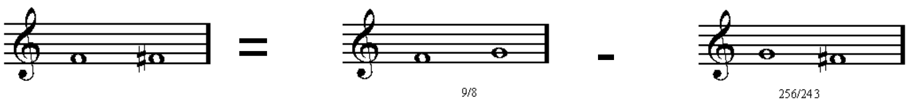
4.1.1 Semitons

Si repetíssim el procés a partir de les quartes obtenim els sostinguts i bemolls de l'escala, és a dir les tecles negres del piano. Per tant, cada to de l'escala ens queda dividit en dues parts però com hem pogut veure, dos semitons fan gairebé un to, però no exactament el mateix per tant el to ens quedarà format per dos semitons diferents: un semitò diatònic (el que obtenim a l'escala diatònica) i una semitò cromàtic, que s'obté restant un semitò cromàtic d'un to i que correspon al valor del sostingut # i el bemoll b.

Semitò diatònic: sempre és 256/243

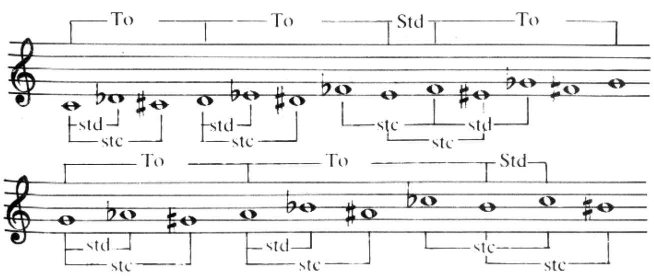
Semitò cromàtic:  $\frac{2187}{2048}$

Com podem veure el semitò cromàtic és més gran que el semitò diatònic:



Per tant: un to = s. Diatònic +s. cromàtic

Així doncs, el semitò cromàtic és més gran que el diatònic. Com a resultat d'això, dos notes anharmòniques, per exemple DO# i REb que es considera que són la mateix nota, tindran diferent so. La més baixa per col·locació en el pentagrama és més aguda que la escrita en el lloc més alt. Començant per DO després vindrà el Reb i després el DO# per ser major el semitò cromàtic que el diatònic. El mateix succeirà entre el RE i el MI. El Fab està a un semitò cromàtic descendent del FA, que en ser més gran que el diatònic, aquest FAb serà més greu que el MI. De la mateixa manera el MI# serà més agut que el FA. El mateix succeeix amb el Dob i el SI#.



std: semitò diatònic
stc:semitò cromàtic

4.1.2 Comes

Les comes en el sistema pitagòric, és a dir, diferencies que hi ha entre notes que segons el procediment del sistema haurien de ser iguales i en canvi no ho són. S'obtenen de la manera següent:

a) Per l'encadenament de 12 quintes i reducció de l'interval.

$$12 \text{ quintes : } \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}} \rightarrow \text{reduccio} \rightarrow \frac{\frac{3^{12}}{2^{7}}}{2^{12}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$$

b) Per la resta d'un semitò cromàtic i un semitò diatònic:

$$\text{Coma = s. Cromàtic – s. diatònic} \quad = \quad \frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{531441}{524288}$$

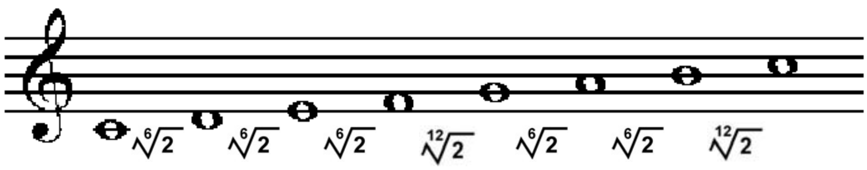
Per tant el valor de la coma pitagòrica és: 531441/524288

4.2 Sistema temperat

L'escala temperada sorgeix per resoldre els inconvenients d'ordre pràctic que els altres sistemes, com el pitagòric, donaven en aplicar-los als instruments amb intervals fixes com el piano i la guitarra. L'escala temperada ens permet passar d'una escala a una altra sense canviar l'afinació. Consisteix en dividir l'octava en intervals iguals. Aquests intervals no poden ésser expressats per una fracció, sinó per una arrel de 2, i la seva superposició s'expressa per una potencia. El temperament usual (Werckmeister 1691) divideix l'octava en 12 semitons.

Comencem agafant l'octava, si considerem que cada semitò de la octava és a/b i que una octava està formada per 12 semitons, com que l'octava és 2/1 tindrem:

$$\frac{a}{b}\cdots(10)\cdots\frac{a}{b}=\frac{2}{1}=2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{12}=2 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b}=\sqrt[12]{2}$$



Per tant les freqüències de les notes de l'escala temperada formen una progressió geomètrica amb raó 2 arrel 12.

4.2.1 Progressió geomètrica

Successions de nombres

Definició

Uns nombres molt utilitzats són els nombres naturals:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7, ...

Per exemple, quan es compten els alumnes d'una classe és com si poséssim a cadascun una "etiqueta virtual" que els ordena.

Es defineix una successió de nombres reals com un conjunt de nombres ordenats.

Termes. Terme general

Cadascun dels elements d'una successió s'anomena terme. Per exemple, en la successió dels múltiples de 5:

5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35, ...

el terme 5 es el primer terme; 10, el segon; 15, el tercer i així successivament.

Els termes d'una successió es designen amb una lletra minúscula i un nombre com a subíndex, de la manera següent:

$a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $a_3 = 15$; $a_4 = 20$; $a_n = ?$

que es llegeixen

" a sub - un , a sub - dos , a sub - tres , a sub - quatre , . . . , a sub - ena "

Els subíndexs són com l'etiqueta que ordena els termes de la successió.

El terme a_n s'anomena terme general o terme enèsim.

Moltes successions estan determinades pel terme general segons el subíndex o el lloc que ocupa.

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6
$a_n = n^2$	1	4	9	16	25	36
$a_n = n^3$	1	8	27	64	125	216

Podem resumir dient que donada la successió a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , ..., a_n , ...els nombres reals a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , ..., a_n , . . .s'anomenen termes i es llegeixen:

" a sub - un , a sub - dos , a sub - tres , a sub - quatre , . . . , a sub - ena "

El terme a_n és el terme general o terme enèsim.

Una successió que té tots els termes iguals rep el nom de successió constant

Progressions geomètriques: Definició i Terme General

Observant les successions

$(a_n) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$

$(b_n) = 243, 81, 27, 9, 3, 1, 1/3, ...$

$(c_n) = 1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625, ...$

$(d_n) = 40, 20, 10, 5, 5/2, 5/4, 5/8, ...$

es pot deduir que compleixen la condició que el salt d'un terme al següent s'obté multiplicant-lo pel mateix nombre. Aquest nombre s'anomena raó i s'anota com a r

En la successió (a_n) tenim que la raó és 2

En la successió (b_n) tenim que la raó és 1/3

En la successió (c_n) tenim que la raó és 5

En la successió (d_n) tenim que la raó és 1/2

En general es pot escriure

a_1

$a_2 = a_1 r$

$a_3 = a_2 r = a_1 r r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 r = a_1 r^3$

. . . . .

$a_n = a_1 r^{n-1}$

Podem resumir dient que una progressió geomètrica és una successió en la qual cada terme, excepte el primer, s'obté de l'anterior multiplicant-lo pel mateix nombre que s'anomena raó de la progressió.

Terme general $a_n = a_1 r^{n-1}$ $n = 1, 2, 3, ...$

Progressions geomètriques: Suma de termes

Una idea és utilitzar la successió rS, és a dir, el producte de la successió per r. En general com que $r a_1 = a_2$; $r a_2 = a_3$; . . . . .

$$rS_n = \quad a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + ra_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Per tant i restant les dues expressions

$$rS_n - S_n = ra_n - a_1 \quad \rightarrow \quad S_n(r-1) = ra_n - a_1 \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1}$$

Tenim present que $a_n = a_1 \ r^{n-1}$ es pot utilitzar també l'expressió

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{ra_1 r^{n-1} - a_1}{r-1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

Progressions geomètriques: Suma d'infinits termes si $|r| < 1$ *e termes*

En aquest cas podem calcular la suma dels termes infinits de la progressió, ja que a mesura que n es va fent molt gran, el terme a_n es fa cada cop més petit en valor absolut, de manera que si el nombre de termes n es infinit, llavors a_n r és zero

$$S_\infty = \frac{ra_\infty - a_1}{r-1} = \frac{r0 - a_1}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

4.2.2 Altres sistemes temperats

- Sistema de holder (1694): divideix l'octava en 53 parts.
- Sistema Huygnes (1691): divideix l'octava en 31 parts.
- Sistema Haba (1925): divideix l'octava en 24 parts.
- Escala de tons de Debussy: divideix l'octava en 6 tons.

4.3 Altres sistemes d'afinació

4.3.1 Sistema Zarlino (1517 – 1590)

S'anomena també sistema dels físics, dels geòmetres, d'Aristògens, o d'Aristògens – Zarlino.
Està completament basat en la sèrie harmònica, com a conseqüència no tots els intervals constituïts pel mateix nombre de tons i que musicalment es designen amb un mateix qualificatiu, són igualment considerats.

4.3.2 Sistema Delezenne

És igual que el sistema de Zarlino, només hi ha una petita variació en la consideració del semitò cromàtic i el diatònic.

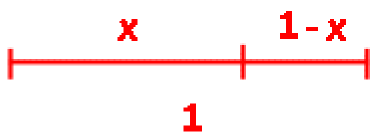
4.3.3 Sistema De Rameau

Rameau obté els principals intervals del sistema de Zarlino posant només els cinc primers harmònics, després els cinc primers harmònics de cadascun d'entre ells, i així successivament.
Aquest mètode Rameau l'anomena Generació harmònica. Té l'avantatge d'eliminar els intervals basats en els harmònics falsos (7, 11, 13, etc.)

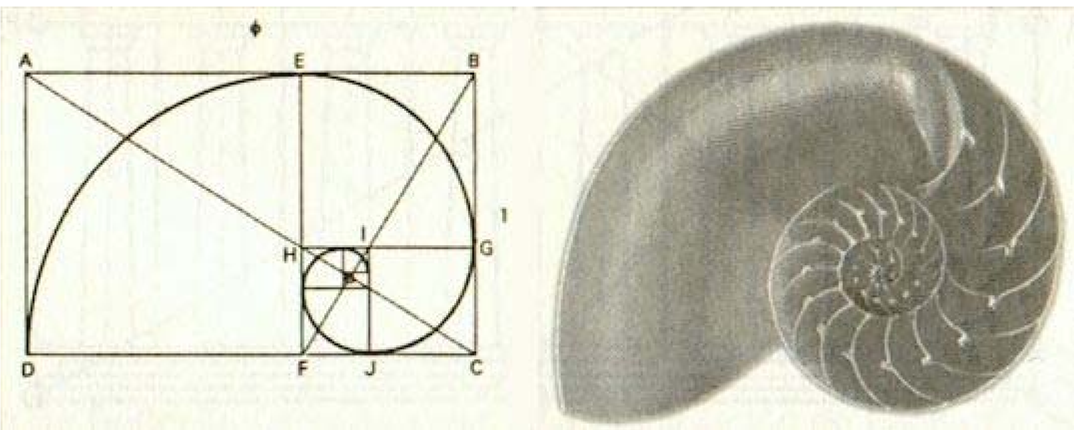
5. Successió de Fibonacci i la proporció àurea

Els nombres de l'anomenada sèrie de Fibonacci, són elements d'una sèrie infinita. El primer número d'aquesta sèrie es l'1, i cada número subseqüent, és la suma dels dos anteriors. Com que el primer és 1 i abans no hi ha re, el segon és 1, el tercer 1+1, el quart 1+2, i així successivament
1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8, 13, 21, 34.........

La raó entre dos elements subjacents de la sèrie porta a convergir al decimal 0,618..., i els recíproques al decimal 1,618... La proporció d'aquesta raó, sigui en fracció o en decimal, és considerada per molts com atractiva a la vista, balancejada i bella, i és anomenada secció àuria. La secció àuria és la divisió harmònica d'un segment de manera que el segment més petit a l'altre com aqueix és al tot, d'aquest manera s'estableix una relació de mides amb la mateixa proporcionalitat entre el tot dividit en major i menor.



Per la seva atractiva estètica la secció àuria s'utilitza àmpliament en l'art i en l'arquitectura. Molts elements de la naturalesa es desenvolupen amb aquesta proporció, com ara les closques de cargol, la forma en que neixen les fulles i les branques de certes plantes etc.



Observan el dibuix del cargol veurem que si agafem un rectangle àurea ABCD i li substraiem el quadrat AEFD el costat del qual és el costat menor del rectangle, resulta que el rectangle EBCF és àuria. Si després li traiem el quadrat EBGH, el rectangle resultant HGCF també és àuria. Aquest procés és repeteix indefinidament, obtenint una successió de rectangles àuries encaixats que convergeixen al vèrtex O d'una espiral logarítmica.

Els nombres de la sèrie s'utilitzen perquè és una manera fàcil d'aconseguir la secció àuria. Però no només és agradable a la vista sinó a l'oïda.

En música, particularment on el compositor ha adoptat un enfocament més racional, sembla que alguna mena de secció àuria ha estat el fonament del pensament creatiu. Potser, subconscientment, l'home necessita treballar amb estructures o proporcions ordenades, i potser en el so com en la visió aquestes proporcions són factors determinats en la creació de la bellesa perfecta.

De quina manera són traslladables a la composició musical aquestes proporcions numèriques?

Tot el món sap que la relació entre música i matemàtiques és una correspondència coneguda ja des de l'Edat Mitjana. En les obres de Johannes Ockheghem i Josquin des Prez les últimes investigacions han demostrat l'existència de numeroses lleis matemàtiques i entre aquestes apareixen igualment les proporcions de la secció àuria. És cert que, en l'època clàssica-romántica aquest tipus de reflexió queda relegat a un segon pla, però en la nova música del segle XX, i més especialment en la dels últims cinquanta anys, l'hi ha estat assignat de nou un important paper a la matematicalització de la música. Potser és suficient referir-se a intents de racionalització tals com la tècnica dodecafònica de Schonberg, els mètodes severament establerts del serialisme, les creacions aleatòries de John Cage o els pensaments incorporats de les bases estocástiques a la composició musical de Iannis Xenakis.

5.1 La secció àuria en l'obra de Bartok

Música per a cordes, percussió i celesta

Hi ha nombrosos estudis que posen de manifest la utilització de la secció àuria i de la successió de Fibonacci per part de Bartok en diferents paràmetres de la seva obra.

Una de les més manifestes i clares, però, la trobem en l'estructura general de l'obra *Música per a Cordes, Percussió i Celesta*.

En el seu moviment inicial, una fuga de 89 compassos, Bartok aconsegueix bastir una estructura a partir de la successió de Fibonacci d'una manera bastant exacta:

Successió de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

La longitud total del moviment és de 89 compassos (la primera anacrusa es compta com a compàs, tot i que en la partitura no ho fan). La divisió d'aquests en funció de la proporció àuria assenyala el punt culminant de l'obra en el compàs 55. Fins aquí, la peça és un crescendo progressiu i constant en el qual s'hi van sumant els instruments a partir de les diferents entrades del tema, i en el qual hi ha també un *creixement* d'intensitat que comença amb un pp i acaba en un ostentós fff. Un cop arribats aquí, es dóna un ràpid *replegament* i es torna a l'estat inicial ppp.

A banda d'això, els esdeveniments més importants del moviment coincideixen també amb la successió:

Creixement

Compàs 1:	exposició del TEMA en solitari
Compàs 5:	entrada de la segona veu
Compàs 8:	entrada de la tercera veu
Compàs 13:	entrada de la quarta veu
Compàs 21:	primer "pedal" (notes estàtiques) i aparició del primer episodi
Compàs 34:	primera entrada percussió (timbals) + indicació "sense sordina"

Compàs 55 - 57 : *Punt culminant del moviment fff*

(en el compàs 55 hi trobem un petit desfasament de compassos, no sabem si fortuït o bé per alguna raó que el compositor no va fer manifesta. Si considerem el compàs 55 com a 57, tot torna a adaptar-se a la successió)

Replegament

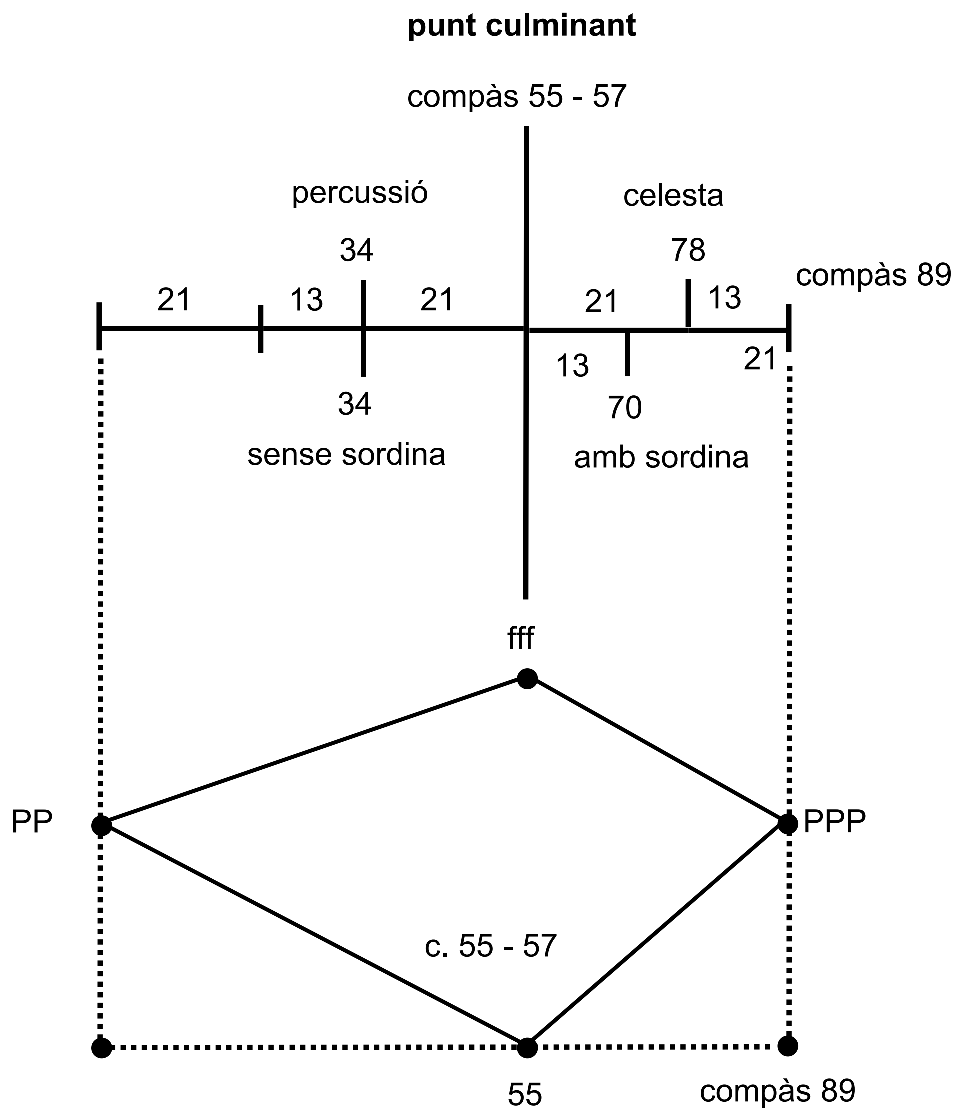
Compàs 70 (57 + 13): indicació “con sordina”

Compàs 78 (57 + 21): entra per primera vegada la CELESTA

Compàs 89 : *Final*

Així mateix, constatem que si un cop arribats al punt culminant de l’obra, compàs 55, prenem els compassos que falten per acabar (89 – 55 = 34) i apliquem a aquesta part de nou la secció àuria (34 x 0,618 = 21) aquesta operació ens situa de nou al compàs 78, on entra per primera vegada la celesta.

Observem tot això en gràfics:



$$89 \cdot 0{,}816 = 55$$

89 número total de compassos

55 número de compàs on es troba el punt culminant fff

0,618 fórmula de la secció àuria

A continuació es presenten les partitures de l'obra "*Música per a Cordes, Percussió i Celesta* " de Bela Bartok, que han servit per fer aquesta anàlisi.


Musik für Saiteninstrumente,
Schlagzeug und Celesta (in 4 Sätzen)
Musique pour instruments à cordes,
percussion et célesta (en 4 parties)
Aufführungsrecht vorbehalten
Droits d'exécution réservés
I.
Béla Bartók
Andante tranquillo, ♪ ca 116-112
con sord.
1. 2. Viole
pp
5
con sord.
3.4.Vl.
pp
1 2.Vle.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
con sord.
1.2.Vlc.
pp
10
con sord.
2. Vl.
pp
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
15
2.Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.


2
2. Vl.
3.4. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
oon sord.
pp
20


3
25
con sord.
1. Vl.
2. Vl.
3.4. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
30
Timp.
tr
pp
senza sord.
(p)
senza sord.
senza sord.
(p)
(p)

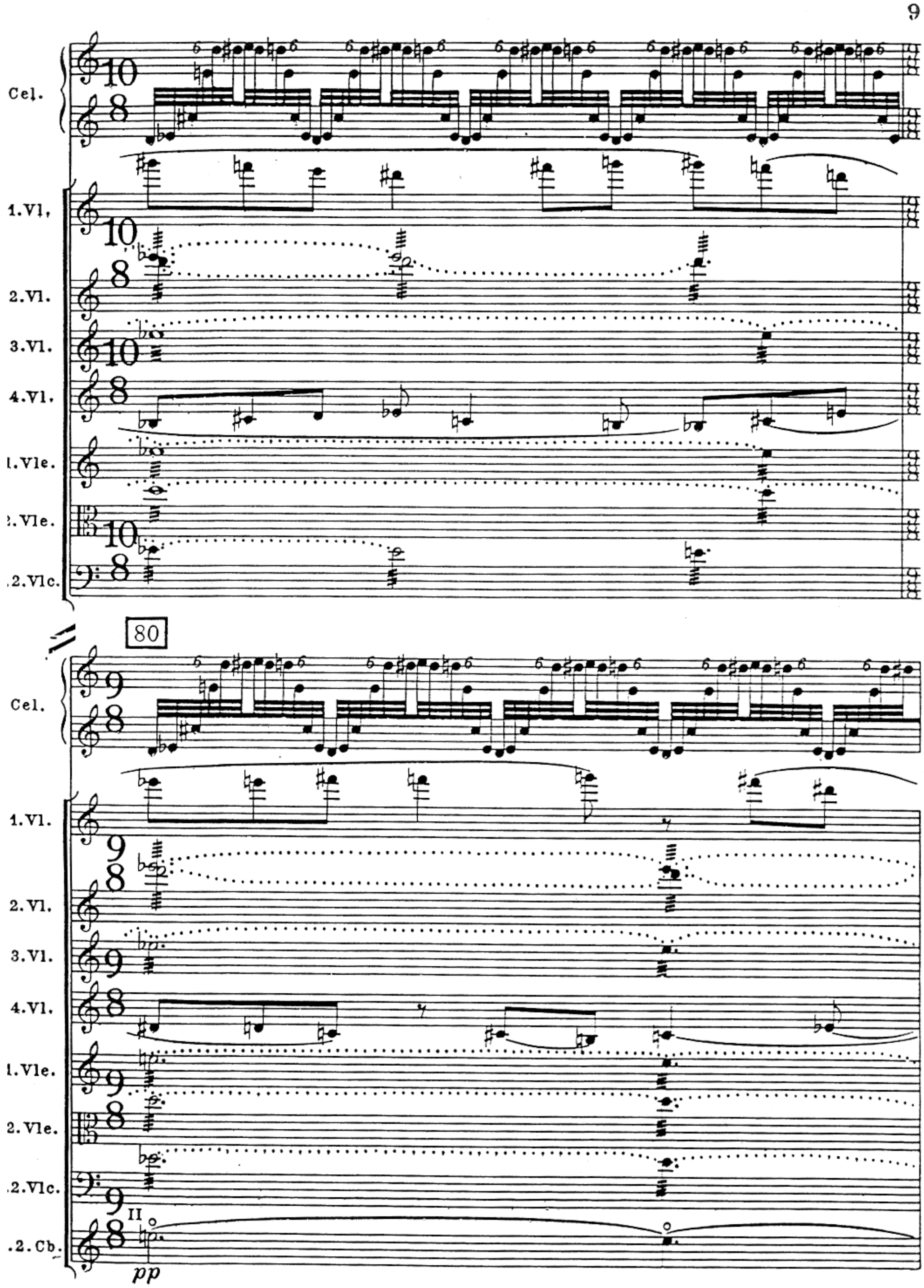

4
35
tr
Timp.
senza sord.
1.Vl.
(p)
2.Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
senza sord.
1.2.Vlc.
(p)
mp,espr.
senza sord.
1.2.Cb.
mp,espr.
ca 120 - 126
40
Timp.
2.Vl.
mp,espr.
cresc.
3.4.Vl.
mp,espr.
cresc.
1.2.Vle.
mp,espr.
cresc.
1.2.Vlc.
cresc.
1.2.Cb.
cresc.
2. Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.

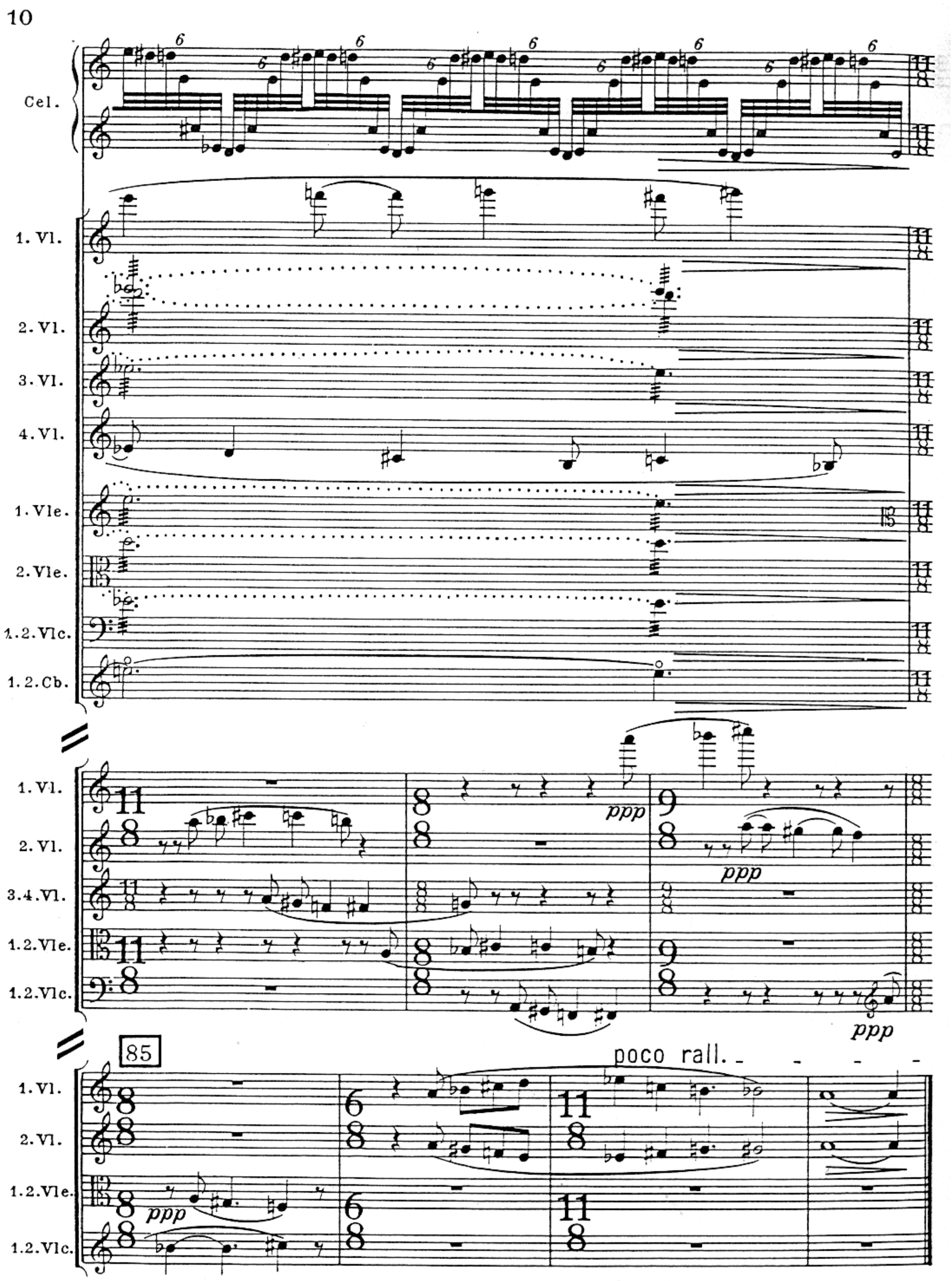

45
5
1.Vl.
2.Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.
sempre cresc.
50
Piatti
Timp.
a 2
ca 120 - 116
(non div.)
cresc.


6
55
gr. Tr.
Timp.
(non div.)
1. Vl.
2. Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.
Punt culminant
60
1.2.Vl.
gliss.
poco rall.
a


65
7
tempo ca 116 - 112
1. Vl.
2. Vl.
3. 4. Vl.
1. 2. Vle.
1. 2. Vlc.
1. 2. Cb.
con sord.
(p)
70
3. 4. Vl.
1. 2. Vle.
1. 2. Vlc.
con sord.
(p)
II
con sord.
(p)
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1. 2. Vlc.
con sord.
più p
più p
più p
più p


8
75
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1.2. Vlc.
ca 108
Cel.
con sord.
1. Vl.
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1 2. Vlc.


9
Cel.
1.Vl.
2.Vl.
3.Vl.
4.Vl.
1.Vle.
2.Vle.
2.Vlc.
80
Cel.
1.Vl.
2.Vl.
3.Vl.
4.Vl.
1.Vle.
2.Vle.
2.Vlc.
2.Cb.
pp


10
Cel.
1. Vl.
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
1. Vl.
2. Vl.
3.4. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
ppp
85
poco rall.
1. Vl.
2. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.

5.2 Simbologia i numerologia en J.S. Bach

Assaig per a una anàlisi, de Ramon Ferrer

L'extensa obra de J.S. Bach està plena de referències simbòliques i numerològiques tot i que ell no es va mostrar mai ben predisposat a admetre-ho obertament. Tot i així, hi ha nombrosos estudis que posen de manifest un bon nombre de motius simbòlics, de jocs i combinacions de números, d'aplicacions de fòrmules matemàtiques i d'altres elements aliens a la música per si mateixos, però que Bach utilitzava en les estructures i els plantejaments temàtics de les seves creacions, seguint probablement les tradicions medievals.

5.2.1 La secció àuria

Tot i que no consta en cap document que Bach demostrés conèixer la secció àuria, si apliquem a l'obra de Bach aquesta antiga fórmula de proporció i de la successió que se'n desprèn, coneguda com la SUCCESSIÓ DE FIBONACCI, veiem que es donen coincidències sorprenents. Això fa pensar que, o bé Bach coneixia i aplicava la secció àuria, o bé que el músic tenia molt assumit per tradició i assimilació de coneixements, aquest sistema de proporcions.
Per a escoltar i veure sobre partitura un exemple d'això que exposem, agafarem la coneguda FUGA n. 2 de do menor del primer volum del *Clave ben temperat*.

Fuga n.2 en do menor. El Clave Ben Temperat, vol.I
Per començar, constatem que la fuga té un total de 31 compassos. Si sobre aquest número hi apliquem la fórmula de la secció àuria, 0'618 x 31, el resultat ens dóna 19,158. Si arrodonim aquest resultat a 19 i observem què passa en el compàs que porta aquest número, observem que s'hi troba el punt d'inflexió de l'obra, allà on s'acaba el desenvolupament i comença la REEXPOSICIÓ. Formalment, la reexposició és un moment clau en l'estructura d'una obra ja que és on es tanquen els desenvolupament que ha generat el tema i es torna a escoltar el tema en el seu estat original, de cara a preparar la part final.

31 compassos x 0'618 = 19,158
Compàs 19: tancament del *Desenvolupament* i principi de l'*exposició*

A banda d'això, destacarem algunes coincidències que es donen de l'aplicació de la successió de Fibonacci, que com sabem, es desprèn de la secció àuria.

Successió de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Compàs 1 i 2:	Exposició del *Subjecte* o Tema principal en solitari
Compàs 3:	Apareix el *Subjecte - Resposta* a la segona veu
Compàs 5:	Acaba el Subjecte a la segona veu i comença *Episodi 1*
Compàs 8:	Acaba el Subjecte a la tercera veu i comença *Episodi 2*
Compàs 13:	Acaba el Subjecte en el to del relatiu principal i comença *Episodi 3*
Compàs 21:	Acaba el Subjecte de la Reexposició i comença *Episodi 4* (últim)

Es poden donar petites imprecisions en el sentit que en algunes ocasions els fets que destaquem es poden trobar a principi del compàs i en d'altres al final, però, no obstant això, no deixa de ser sorprenent veure com l'estructura general de la fuga de Bach s'adapta fidelment al sistema de proporcions que genera la secció àuria.

A continuació es presenten les partitures d'aquesta fuga.


Fuga à 3
4
7
10
13


16
19
22
25
28

5.2.2 Números i lletres: BACH=14

Un dels artificis o dels recursos més coneguts de J.S. Bach és la freqüent aparició dels números 14 i 41 en la seva obra, utilitzats de diverses maneres. El número 14 es desprèn del seu nom aplicat a les lletres de l'alfabet llatí (Bach utilitzava aquest alfabet en el qual, recordem, "i" i "j" són una mateixa lletra). La suma dels números corresponents a aquestes lletres segons l'aparició alfabètica (2 + 1 + 3 + 8) és efectivament el 14. D'altra banda, el número 41 s'obté pel mateix procediment, afegint al seu cognom les inicials del seu nom: J.S. Bach. A més, si ens hi fixem, les xifres de 41 vénen a ser la inversió de les xifres de 14. I com sabem, la inversió és un dels recursos fonamentals de la tècnica del contrapunt musical.

A= 1	H= 8	P= 15	X= 22
B= 2	IJ= 9	Q= 16	Y= 23
C= 3	K= 10	R= 17	Z= 24
D= 4	L= 11	S= 18	
E= 5	M= 12	T= 19	
F= 6	N= 13	UV= 20	
G= 7	O= 14	W= 21	

BACH = 2 + 1+ 3 + 8 = **14**
J. S. BACH = 9 + 18 + 14 = **41**

5.2.3 El tema Bach

Un altre dels recursos més divulgats i més originals de Bach és la utilització del seu nom com a tema musical. En el món anglosaxó, les notes no s'anomenen com aquí, sinó que es representen amb una lletra, seguint l'ordre alfabètic, de la manera següent:

A= LA	C= Do	E= MI	G= SOL
B= Sib *	D= RE	F= FA	H= SI *

(Per qüestions de tradició en la notació musical, a Alemanya el Sib ocupa la plaça del Si natural, i aquest passa a ocupar el darrer lloc)

A partir d'aquesta correspondència Bach crea un tema amb les lletres del seu nom, aprofitant la coincidència que totes hi són representades.

Aquest tema, SIb - LA – DO – SI, apareix força vegades en l'obra de Bach però es fa evident sobretot en la famosa obra L*'art de la fuga*, una de les darreres que va escriure i la culminació del contrapunt tradicional portat a les seves últimes conseqüències. En aquesta obra inacabada, Bach ostenta el seu gran domini tècnic en tota mena de recursos abstractes i d'artificis formals, tant musicals com extramusicals. Aquí, el tema apareix sovint durant tota l'estona, però ho fa de forma evident al final de la partitura en forma d'un autògraf que segella la seva obra i la seva vida.

6. Forma dels instruments

La forma característica de cadascun dels instruments musicals no és fruit de la casualitat o conseqüència de criteris estètics.

- La llargada i gruix d'una flauta produeix una nota determinada, amb el seu to, timbre i la intensitat concrets.

· - Hi ha una raó per la qual els trasts d'una guitarra es troben cada vegada més a prop entre ells, quan ens aproximem a la caixa de ressonància.

· - La forma d'un orgue i d'una flauta de Pan, ens recorda molt a la gràfica de la funció exponencial.

Per altra banda, l'oïda pot distingir dues notes amb el mateix to i la mateixa intensitat que provinguin d'instruments diferents. Els sons produïts per aquests instruments, no seran exactament iguals.

Això és degut a què una nota és la suma de moltes ones sonores de freqüències diferents. Una nota no és, llavors, un so pur. L'ona de freqüència més baixa s'anomena so fonamental o primer harmònic. Les altres, són una sèrie d'ones secundàries, amb freqüència múltiple de la primera. A totes aquestes ones les anomenem harmònics.

Depenent de l'instrument que emeti l'ona sonora, els harmònics seran diferents. Aquest fet és el que produeix que el Do d'un saxofon no soni igual al Do d'una guitarra. Aquesta qualitat sonora rep el nom de timbre.

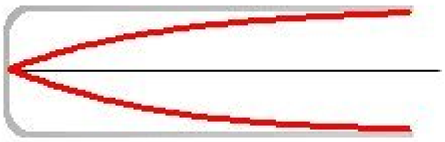
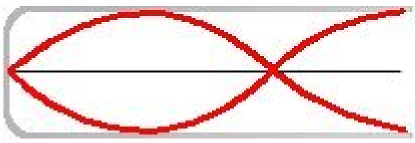
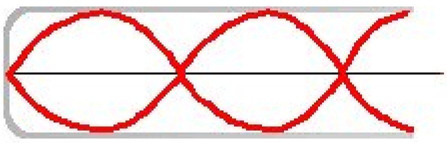
6.1 L'ona produïda per un tub tancat

La allargada d'un tub és el que determina quina nota escoltarem. Com més llarg és el tub en qüestió, més greu serà la nota i com més curt, més aguda.

El que farem aquí és explicar quines són les raons perquè això passi, i de pas estudiar quina serà la composició harmònica del so produït.

Un tub tancat amb una llargada determinada només pot produir una nota, la qual estarà formada per una ona fonamental i unes múltiples d'aquesta, anomenades harmònics. Aquestes ones han de ser de tal forma que a la zona de màxima compressió de l'aire del tub (la part tancada) hi hagi un node i a la de mínima (la part oberta), un ventre.

D'acord amb aquest principi podem saber quines ones produirà un tub tancat amb una llargada determinada. Suposarem que tenim un tub de llargada "L". Anomenarem "l" a la longitud d'ona, "f" a la freqüència i "v" a la velocitat del so a l'aire. Anem a les diferents ones que es poden produir dintre d'aquest tub:

	Aquesta seria l'ona fonamental o **primer harmònic**. La longitud de l'ona és 4 vegades la del tub La freqüència és ***f=l/v***	$l = 4\,L$ $f_1 = l/v$
	La longitud d'ona és 4/3 la del tub La seva freqüència és 3 vegades més gran que l'anterior. Aquesta ona correspondria al **segon harmònic**.	$l_2 = 4/3\,L$ $f_2 = 3 \cdot f_1$
	La longitud d'ona és 4/5 la del tub . La seva freqüència és 5 vegades més gran que la primera. Aquesta ona correspondria al **tercer harmònic**.	$l_3 = 4/5\,L$ $f_3 = 5 \cdot f_1$

Si repetíssim aquest procés indefinidament, obtindríem tots els harmònics del so. La seva freqüència s'obté multiplicant la freqüència fonamental pels nombres imparells.

Si sumem tots els harmònics obtindrem l'ona composta que arribarà a la nostra oïda.

La alçada o to d'aquesta nota ve donada per la freqüència del primer harmònic.

Així mateix, la longitud d'ona és inversament proporcional a la freqüència i directament proporcional a la velocitat, d'on deduirem que v = l x f. Llavors, si coneixem la v, que és la velocitat del so (340 m/s) i coneixem la longitud del tub, podem determinar quina freqüència tindrà el so que determinarà.

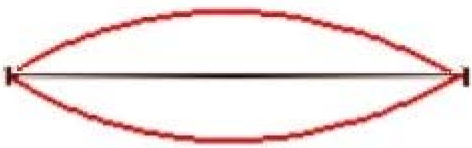
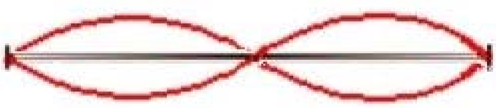
$$f = \frac{340}{4 \cdot L} \quad \text{Hz}$$

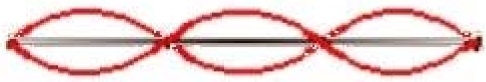
6.2 L'ona produïda per una corda vibrant.

De la mateixa forma que la llargada d'un tub és allò que determina la nota obtinguda per aquest, en una corda vibrant influeixen altres factors.
La nota produïda per una corda vindrà determinada per la longitud (L), la tensió (T), la densitat (d) i la secció (S). Així, si disposem d'una corda molt tensa i prima, obtindrem una nota aguda; i pel contrari, si la corda és poc tensada i gruixuda, la notà serà greu.

De fet, la freqüència es pot trobar a partir de la fórmula: $f = \frac{1}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{T}{d \cdot S}}$

Vegem ara la relació gràfica entre la longitud d'una corda (L), la freqüència (f) i longitud d'oscil·lació d'una ona (l) produïda en fer vibrar la corda.
Anem a veure també quins són els diferents sons (harmònics), que obtindrem en fer vibrar la corda. Per això hem de tenir en compte que sempre ha d'haver un node als extrems de la corda.

	Aquesta seria l'ona fonamental o **primer harmònic**. La longitud de l'ona és 2 vegades la de la corda La freqüència és ***f***	***l = 2L*** $\boldsymbol{f_1}$
	Si dividim la corda en dos parts, la longitud d'ona serà igual a la longitud de la corda. La seva freqüència és 2 vegades més gran que l'anterior. Aquesta ona correspondria al **segon harmònic** El so seria una octava més altra que el fonamental.	$\boldsymbol{l_2 = L}$ $\boldsymbol{f_2 = 2 \cdot f_1}$

	La longitud d'ona és 2/3 de la longitud de la corda. La seva freqüència és 3 vegades més gran que la primera. Aquesta ona correspondria al **tercer harmònic**. I és la quinta del segon harmònic.	l_3 = 2/3 L $f_3=3 \cdot f_1$
	La longitud d'ona és 1/2 de la longitud de la corda. La seva freqüència és 4 vegades més gran que la primera. Aquesta ona correspondria al **quart harmònic**. El so seria dues octaves més amunt que el fonamental i la quarta del tercer harmònic.	l_4 = 1/2 L $f_4=4 \cdot f_1$

Si repetíssim aquest procés indefinidament, obtindríem tots els harmònics del so. La seva freqüència s'obté multiplicant la freqüència fonamental per tots els nombres naturals.

Aquestes relacions entre les freqüències van donar peu als pitagòrics a construir una escala musical que es basava en la relació harmoniosa entre les notes.

Dividint les freqüències d'un harmònic amb l'anterior s'obtenen els intervals que s'utilitzen per a construir l'escala musical.

- 2n / 1r = 2/1 (l'octava)
- 3r /2n =3/2 (la quinta)
- 4rt/3r =4/3 (la quarta)
- i així successivament

Tots aquests sons són els que denominen l'escala dels harmònics.

6.3 El violí

L'actual família dels violins deriva de la família de les violes da braccio. Va començar-se a desenvolupar com a grup diferenciat a partir del s. XVI, a l'Alta Itàlia (Brescia – Gapare da Salo, +1609 i Giovanni Paolo Maggini, +1628-). A partir d'aquesta època hi ha testimonis de l'existència del violí – violino, diminutiu de viola-, del violí petit- anomenat violino piccolo-, de la mateixa viola- l'instrument contralt de la colla i que serveix el nom, l'estil i la morfologia bàsica a tots els individus-, del contrabaix que s'anomenava violone, augmentatiu de viola perquè era el de so més greu de tots, i del violoncel, cioloncello o violoncino, diminutiu de violone.
El protagonisme de la construcció i perfeccionament d'aquests instruments va passar de Brescia a Cremona (s. XVII i XVIII). Aquí, sota el mestratge de constructors –lutiers o violers- com Andrea Amati (+1611), Nicolo Amati net de l'anterior, Antonio Stradivarius, deixeble de Nicolo Amati, la nissaga dels Guarneri, Francesco Ruggiero, aquests instruments, especialment els violins, van aconseguir una perfecció encara no superada, tot i que la majoria dels violins construïts per aquests lutiers van perdre la sonoritat original i genuïna durant el s. XIX per causa de la manipulació a què els van sotmetre, en ser reconstruïts, per aconseguir una sonoritat més potent (s'hi van incorporar cordes més gruixudes i més tenses, el pontet més alt, el batedor més llarg, etc.). Al costat d'aquests lutiers de Cremona hem de citar el tirolès Jakob Steiner (+1683).

6.3.1 Esbós descriptiu

El cos d'aquest instrument està integrat principalment per:

- Una caixa de ressonància de tirat oblong, formada per una tapa, un fons i uns riscles o costats. Aquesta caixa incorpora, a la part superior, un mànec on hi ha el batedor o diapasó
- Quatre cordes tensades, des de les clavilles fins al cordal. Aquestes cordes són disposades longitudinalment damunt de l'instrument, distribuïdes per la celleta a la sortida del claviller i recalcades per mitjà del pont damunt de la tapa de la caixa. La longitud útil de les cordes és la que va des de la celleta fins al pont.

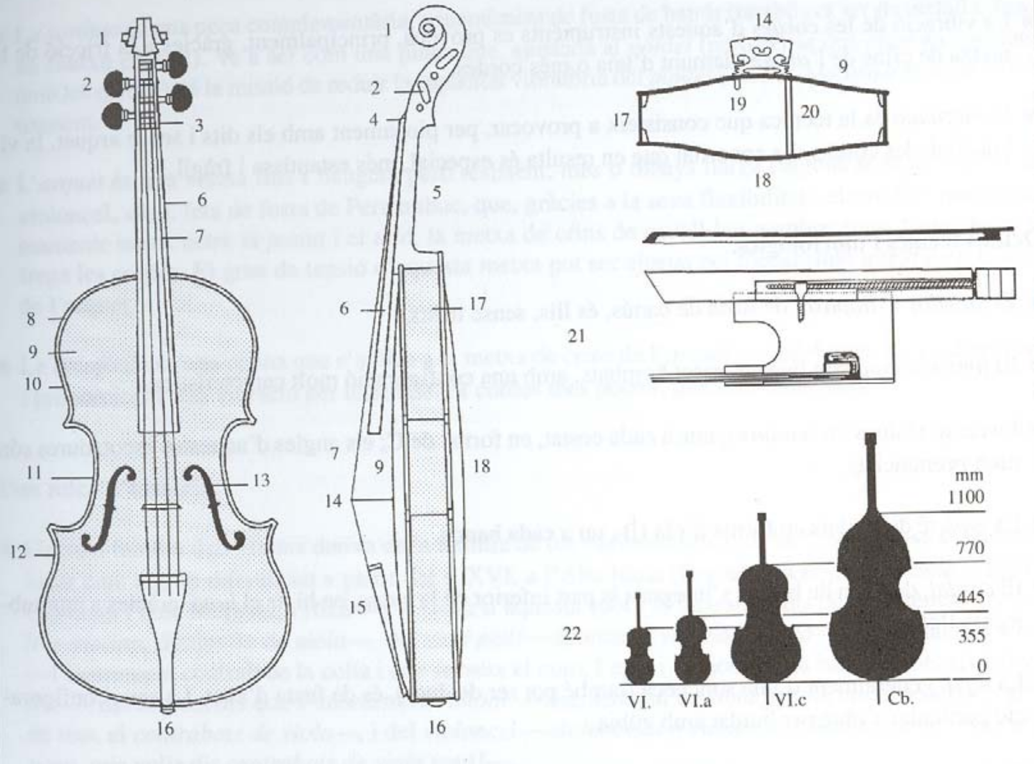
- Un pont o pontet que, tot mantenint les cordes en una disposició d'accés idònia i en un grau d'elevació adequat al batedor i a la tapa, s'encarrega de transmetre les vibracions a l'esmentada tapa.
- L'ànima, vareta cilíndrica de fusta que posa en contacte, per l'interior, la tapa amb el fons de la caixa.

La vibració de les cordes d'aquest instrument es provoca, principalment, gràcies a la fricció de la metxa de crins de l'arquet damunt d'una o més cordes.
El pizzicato és la tècnica que consisteix a provocar, per pinçament amb les dits i sense arquet, la vibració de les cordes. La sonoritat que en resulta és especial, més estantissa i fràgil.

6.3.2 Detalls tècnics i morfològics

- El batedor o diapasó, de fusta de banús, és llis, sense trasts.
- El fons i la tapa són lleugerament bombats, amb una configuració molt característica
- La caixa té dues escotadures, una a cada costat, en forma de C; els angles d'aquestes escotadures són molt pronunciats.
- La tapa té dos calats en forma d'efa , un a cada banda.
- El cordal, de fusta de banús, s'integra a la part inferior de la caixa, on hi ha el botó, gràcies a una subjecció flotant.
- La tapa, generalment d' una sola peça (també pot ser de dues), és de fusta d'avet. La seva configuració particular s'obté per buidat amb gúbia.
- El fons és de fusta d'erable. Té una o dues peces.
- Els riscles (costats de la caixa) són de fusta d'erable; la seva curvatura característica s'obté en calent. Els reforçaments interiors d'aquests costats o riscles s'anomena contrariscles, i són de fusta d'avet.
- L'ànima, de fusta d'avet, és una vareta cilíndrica posada sense encolar entre el fons i la tapa, que contribueix definitivament al abona qualitat del so segons l'indret precís on s l'hagi situada (gairebé sota el peu dret del pontet – a la banda de la corda del mi), alhora que permet a la tapa de resistir les pressió de la tensió de les cordes que suporta el pontet.

- La barra harmònica o cadena, de fusta d'avet, és un llistó o una tija llarga encolada sota la tapa en la direcció de les cordes, i té unes funcions similars a les de l'ànima.
- El mànec és de fusta d'erable. Damunt d'ell hi està íntimament encolat el batedor o diapasó
- Les quatre clavilles, una per corda, són de fusta de banús.
- El pontet és de fusta d'erable. Té dos peus que han de recolzar totalment vers el centre de la tapa, sense, però, ser-hi encolats. Més o menys sota el peu dret del pontet es situa l'ànima; sota el seu peu esquerre (a la banda de la corda del sol) hi ha la barra harmònica.
- Actualment les cordes solen ser o de metall (acer) o amb trenats interiors de fibra artificial entorxats de metall (en algunes cordes, argent). Abans algunes eren de tripa de moltó, entorxada o no.
- La sordina és una peça complementària, generalment de fusta de banús (també pot ser de metall i , fins, de cautxú endurit). Ve a ser com una pinça que, ajustada al pontet(però sense que entri en contacte amb les cordes), té la missió de reduir la capacitat vibratòria del pontet i, doncs, assuaujar el so de l'instrument.
- L'arquet és una vareta fina i lleugera però resistent, més o menys llarga (segons si és de violí o de violoncel, etc.), feta de fusta de Pernambuc, que, gràcies a la seva flexibilitat i elasticitat, permet de mantenir tensa, entre la punta i el taló, la metxa de crins de cavall (en nombre entre 150-250) que frega les cordes. El grau de tensió d'aquesta metxa pot ser ajustat pel mecanisme integrat en el taló de l'arquet.
- La colofònia és una resina que s'aplica a la metxa de crins de l'arquet per tal d'afavorir l'adherència i proporcionar una vibració per torsió de les cordes més potent, precisa i manejable.



Llegenda: 1. Voluta.– 2. Clavilla.– 3. Claviller.– 4. Celleta.– 5. Mànec.– 6. Batedor o diapasó.– 7. Corda.– 8. Filets.– 9. Tapa.– 10. Arc o escot superior.– 11. Arc o escot mitjà.– 12. Arc o escot inferior.– 13.– Efa: obertura de ressonància.– 14. Pont o pontet.– 15. Cordal.– 16. Botó del cordal.– 17. Riscles.– 18. Fons.– 19. Barra harmònica.– 20. Ànima. - 21. Silueta d'un arquet i mecanisme de tensió de la metxa de crins, situat al taló d'un arquet. - 22. Relació de mides i proporcionalitat dels individus de la família dels *violins*.

6.3.3 Nocions específiques

- Violino (italià), Geige (alemany), violin (anglès), violon (francès).
- A més de les nocions que hem exposat fins ara, podem afegir que al violí s'hi sol adaptar una barbeta, peça de fusta de banús – que s'acobla a la banda dreta de la base de la caixa- amb una configuració especial per adaptar-se a la barba de l'instrumentista i així facilitar alhora la subjecció i la integració de l'instrument a l'instrumentista.

- Un altre complement: l'espatllera, coixinet allargat i amb una conformació peculiar, que es subjecta a la caixa i que serveix per aconseguir una adaptació idònia del violí entre l'espatlla esquerra i la barba de l'instrumentista, i així contribuir a una major llibertat a la relació de la mà esquerra amb la mànec de l'instrument.
- El pes d'un violí ha de girar entorn dels 400 grams. La caixa fa uns 36cm d'alçada.
- La longitud útil de les cordes és de 325 mil·límetres.
- L'arquet té una longitud d'uns 72 cm.
- El so, agut brillant, polit, lleuger i dúctil, pot ser sensiblement modificat i afaiçonat amb la tècnica del vibrato. Però la dinàmica, el ritme, l'articulació i el fraseig són més que res atribuïdes al maneig de l'arquet (pressió, velocitat de fregament, punt d'atac – punta, taló, etc.).
- És matèria de controvèrsia entre les entesos la importància del vernís protector – en porta diverses capes – per a la qualitat sonora del violí.

7.Conclusions

El treball música i matemàtiques serveix per fer una primera anàlisi d'alguns aspectes amb què es poden relacionar aquestes dues matèries. Dic una primera anàlisis pel fet que hi ha altres aspectes que en el treball no he exposat perquè resultaria impossible abastar-los tots.
Als inicis tenia la sensació que no trobaria prou matèria per realitzar el treball, però no va ser així, i vaig arribar a descobrir tot un món al darrera, del qual una petita part l'he intentat reflectir en aquest treball. Així ens podem adonar que realment existeix una relació entre matemàtiques i música descoberta ja en l'antiguitat. Una relació que podem trobar en l'origen de les escales i en els processos que es realitzen en la seva construcció o en la composició musical, que en alguns casos s'hi observa un fonament matemàtic etc.

Espero que aquest treball serveixi per despertar el vostre interès i que us desperti les ganes d'aprofundir en el tema.

8. Bibliografia

- CALVO – MANZANO, A; *Acústica físico-musica*l; Ed. Real Musical; Madrid.
- JOHN R. PIERCE; *Los sonidos de la música*; Prensa Científic, Ed: Labor.
- MAIDEU I PUIG, J.; *Instruments musicals*; Ed: Eumo; 1995
- LEON TELLO,F.J.; *Teoria y estética de la música*; Ed: Taurus; 1988
- DOUGLAS R. HOFSTADTER; *Gödel, Escher, Bach un eterno y gràcil bucle*; Ed: Tusquets editores.
- IAN STEWAR*; Matemàtiques de la escala musical*; Revista: Investigación y Ciencia, núm 167, agost de 1990
- SMITH – BRINDLE,R; La nova música. Ed: Antoni Bosch Editor. Barcelona 1979
- LENDVAI, E: Béla Bartók: an analysis of his music. Kahn and Averill. Londres 1991.
- GIRBAU,J; Las matemáticas y las escalas musicales; Ciencia, la Vanguardia; 9 octubre 1988.
- Apunts d'acústica d'Assumpte alzina
- Apunts d'acústica de Ramon Ferrer
- J.M. ARIAS – I.MAZA; Matemàtiques 1r batxillerat; Ed: Casals
- J.M. ARIAS – I.MAZA; Matemàtiques 2n batxillerat; Ed: Casals

Pàgines web:

- www.xtec.es/centres/a8019411/caixa
- www.musicaperuana.com

Música:

- Béla Bartók; Música per a cordes, percussió i celesta.
- J.S. Bach; Fuga n.2 en do menor. El Clave Ben Temperat, vol. I