Unitat 2. Cinemàtica en dues dimensions

Activitats

1. Comenteu com veuen el moviment d'una pinya que cau d'un pi d'un penya-segat:

***a*) Un passatger d'una barca que navega paral·lelament a la costa, suposant que aquesta és recta.**

Si el sistema de referència fix és la barca que es mou paral·lelament a la costa i que és on es troba el passatger, aquest observa un moviment en el pla, és a dir, un moviment parabòlic.

***b*) Un home des del far de la costa.**

En aquest cas, el sistema de referència fix és la costa on es troba l'arbre i el mariner; ara observem que el moviment de la pinya és rectilini, ja que el seu moviment és un moviment vertical de caiguda lliure.

2. Un observador quiet en una estació d'autobusos deixa caure una pedra a terra. Quin moviment seguirà aquesta pedra segons un observador dins un autobús que es mou a una velocitat constant $\vec{v}_0$ respecte de l'estació?

Es tracta del cas simètric al de la figura 2.2 del llibre de text. L'observador dins l'autobús veurà que la pinya segueix una trajectòria parabòlica. Això és degut a que, per a l'observador de l'autobús, la pinya té dos moviments superposats: un moviment de caiguda lliure en la direcció *Y* i un MRU en la direcció *X* amb un valor de velocitat $-\vec{v}_0$, oposat a la velocitat de l'autobús.

3. Trobeu l'equació de la trajectòria d'un mòbil la posició del qual, en unitats del SI, és:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x = 3t - 1} \\ \boldsymbol{y = 4t + 2} \end{aligned}\right\}$$

$$x = 3t - 1 \rightarrow t = \frac{x+1}{3}$$

$$y = 4\left(\frac{x+1}{3}\right) + 2 \rightarrow y = \frac{4x+4}{3} + 2 \rightarrow$$

$$y = \frac{4x+4+6}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

4. Un vaixell que desenvolupa una velocitat de 40 km/h s'utilitza per travessar un riu de 500 m d'amplada. La velocitat del riu és d'1,5 m/s i el vaixell (línia proa-popa) sempre es manté perpendicular als marges del riu.

***a*) Quina és la velocitat del vaixell respecte d'un observador situat als marges del riu?**

$$v' = 40 \text{ km/h} = 11{,}11 \text{ m/s}, \quad v_0 = 1{,}5 \text{ m/s}, \quad v' \parallel v_0$$

$$v = \sqrt{v'^2 + v_0^2} = \sqrt{11{,}11^2 + 1{,}5^2} = 11{,}21 \text{ m/s}$$

***b*) A quin punt de l'altra riba arribarà?**

$$\Delta y = \Delta y' = 500 \text{ m}; \quad \Delta y = \Delta y' = v'\Delta t \Rightarrow$$

$\Delta t = \dfrac{\Delta y}{v'} \rightarrow \Delta t = \dfrac{500}{11{,}11} = 45$ s $\rightarrow$ temps que tarda a arribar a l'altra riba.

$\Delta x = v_0 \Delta t = 1{,}5 \cdot 4{,}5 = 6{,}75$ m $\rightarrow$ coordenada *X* del punt de la riba contrària a on arriba el vaixell.

$\Delta y = 500$ m $\rightarrow$ coordenada *Y* del punt de la riba contrària a on arriba el vaixell.

***c*) Quina és l'equació de la trajectòria del vaixell respecte d'un observador situat al marge del riu?**

$$y = \frac{v'}{v_0}x \rightarrow y = \frac{11{,}11}{1{,}5}x \rightarrow y = 7{,}4x$$

5. Des d'un edifici de 10 m d'altura llancem obliquament una pedra cap amunt amb una velocitat inicial de 10 m/s i amb un angle de 30° respecte de l'horitzontal. A quina distància del punt de partida cau si el terreny és horitzontal? Amb quina velocitat arriba a terra i quina altura màxima assoleix?

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= 10 \text{ m/s} \\ a &= 30° \\ y_0 &= 10 \text{ m} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ y &= y_0 + v_{0y}\,t + \frac{1}{2}\,gt^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} + gt \end{aligned}\right\}$$

$$v_{0x} = 10 \cdot \cos 30° = 8{,}66 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 10 \cdot \sin 30° = 5 \text{ m/s}$$

$$a = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 8{,}66\,t \\ y &= 10 + 5t - 4{,}9t^2 \end{aligned}\right\}$$

Distància a què arriba a terra:

$$y = 0 \rightarrow 4{,}9t^2 - 5t - 10 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 10}}{2 \cdot 4{,}9} \rightarrow t = 2{,}02 \text{ s}$$

$$x = 8{,}66 \cdot 2{,}02 = 17{,}56 \text{ m}$$

Velocitat amb què arriba a terra:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 8{,}66 \\ v_y &= 5 - 9{,}8t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_x &= 8{,}66 \\ v_y &= 5 - 9{,}8 \cdot 2{,}02 = -14{,}8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Altura màxima:

$$v_y = 0 \rightarrow 5 - 9{,}8t = 0 \rightarrow t = \frac{5}{9{,}8} = 0{,}51 \text{ s}$$

$$y = 10 + 5 \cdot 0{,}51 - 4{,}9 \cdot 0{,}51^2 = 11{,}2 \text{ m}$$

6. Llancem un cos des del terra obliquament cap amunt amb una velocitat de 20 m/s que forma un angle de 30° respecte de l'horitzontal. A quina distància del punt de partida cau

si el terreny és horitzontal? Quina és la posició 0,5 s després d'haver-lo llançat? Quina altura màxima assoleix?

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_{0x}\,\Delta t \\ y = y_0 + v_{0y}\,\Delta t + \dfrac{1}{2}\,g\,\Delta t^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + g\,\Delta t \end{array}\right\}$$

$v_{0x} = 20 \cos 30° = 17,32$ m/s

$v_{0y} = 20 \sin 30° = 10$ m/s

$$\left.\begin{array}{l} x = 17,32\,t \\ y = 10\,t - 4,9\,t^2 \end{array}\right\}$$

Si $y = 0 \rightarrow 10\,t - 4,9\,t^2 = 0 \rightarrow t\,(10 - 4,9\,t) = 0 \rightarrow$

$$t = \frac{10}{4,9} = 2,04 \text{ s}$$

$$x = 17,32 \cdot 2,04 = 35,35 \text{ m}$$

Posició al cap de 0,5 s: $x = 17,32 \cdot 0,5 = 8,66$ m

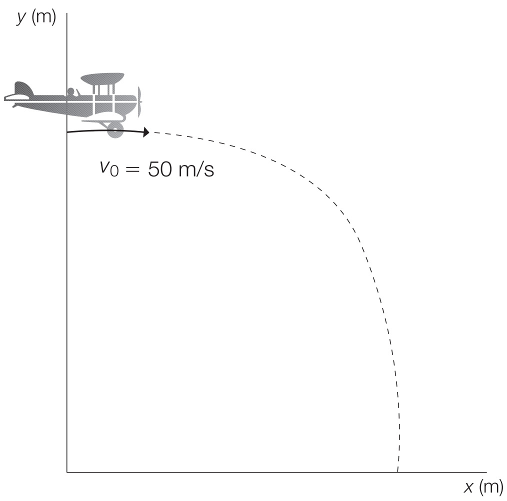
$y = 10 \cdot 0,5 - 4,9 \cdot 0,5^2 = 3,78$ m

Alçada màxima: $\left.\begin{array}{l} v_x = 17,32 \\ v_y = 10 - 9,8\,t \end{array}\right\}$

$$v_y = 0 \rightarrow 10 - 9,8\,t = 0 \rightarrow t = \frac{10}{9,8} = 1,02 \text{ s}$$

$$y = 10 \cdot 1,02 - 4,9 \cdot 1,02^2 = 5,10 \text{ m}$$

7. Una avioneta passa volant a 50 m/s i deixa anar un paquet que triga 30 s a arribar a terra. Calculeu l'altura a la qual vola l'avioneta i la distància entre el punt sobre el qual ha deixat anar el paquet i el punt on cau.



Llançament horitzontal:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0\,t \\ y = y_0 - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\}$$

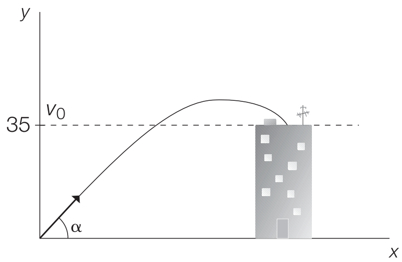
$$\begin{array}{l} g = -9,8 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 50 \text{ m/s} \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50\,t \\ y = y_0 - 4,9\,t^2 \end{array}\right\}$$

Si $t = 30$ s i $y = 0 \rightarrow 0 = y_0 - 4,9 \cdot 30^2$

$$y_0 = 4,9 \cdot 30^2 = 4\,410 \text{ m}$$

$$x = 50 \cdot 30 = 1\,500 \text{ m}$$

8. Llancem un objecte cap amunt des de terra amb una velocitat inicial $v_{0x} = 20$ m/s i $v_{0y} = 40$ m/s. Quan baixa, cau al terrat d'una casa de 35 m d'alçària. Calculeu el temps de volada de l'objecte, la distància a la qual es troba la casa i l'altura màxima a la qual ha arribat l'objecte.



$$\left.\begin{array}{l} x = v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + g\,t \end{array}\right\}$$

$a_y = g = -9,8$ m/s^2

$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = 20 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 40 \text{ m/s} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 20\,t \\ y = 40\,t - 4,9\,t^2 \end{array}\right\}$$

Temps:

Quan $y = 35$ m $\rightarrow 35 = 40\,t - 4,9\,t^2 \rightarrow$

$\rightarrow 4,9\,t^2 - 40\,t + 35 = 0$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{140^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 35}}{2 \cdot 4,9} = \frac{40 \pm 30,23}{9,8} = \begin{cases} 1 \text{ s} \\ 7,17 \text{ s} \end{cases}$$

La resposta vàlida és $t = 7,17$ s.

Distància a què es troba la casa:

$$x = 20 \cdot 7,17 = 143,33 \text{ m}$$

Alçada màxima:

$$v_y = 0 \rightarrow 0 = 40 - 9,8\,t \rightarrow t = \frac{40}{9,8} = 4,08 \text{ s}$$

$$y = 40 \cdot 4,08 - 4,9 \cdot 4,08^2 = 163,2 - 81,57 = 81,63 \text{ m}$$

9. Un helicòpter vola a 180 km/h a una altura de 500 m i veu venir un camió en sentit contrari. Calculeu a quina distància del camió ha de deixar anar un paquet per fer-lo caure dins la caixa del camió si aquest es mou amb una velocitat constant de 72 km/h.

Helicòpter

$$\left.\begin{array}{l} x = v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 50\,t \\ y = 500 - 4,9\,t^2 \end{array}\right\}$$

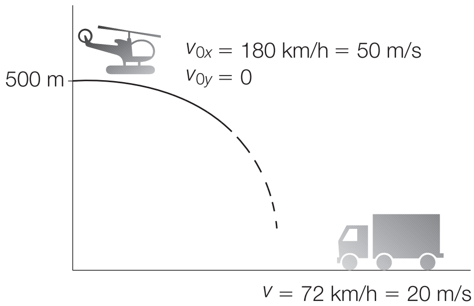
Si $y = 0 \rightarrow 0 = 500 - 4{,}9\,t^2 \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{500}{4{,}9}} = 10{,}1$ s

$x = 50 \cdot 10{,}1 = 505$ m

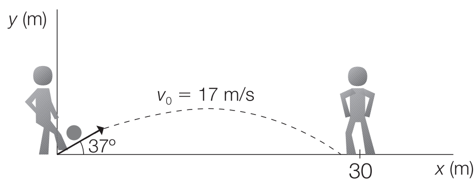
Camió

$x = x_0 + v\,\Delta t$

$$\left.\begin{array}{l} x = 505 \text{ m} \\ v = -20 \text{ m/s} \\ t = 10{,}1 \text{ s} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_0 = x - v\,\Delta t \\ x_0 = 505 - (-20) \cdot 10{,}1 = 707 \text{ m} \end{array}$$



10. Un futbolista xuta una pilota amb un angle de 37° amb l'horitzontal i una velocitat inicial de 17 m/s. Un segon futbolista situat a 30 m del primer comença a córrer cap a la pilota amb acceleració constant en el mateix moment en què el primer xuta. Quina velocitat porta el segon jugador quan arriba a la pilota, si ho fa just abans que aquesta toqui el terra?



$$\left.\begin{array}{l} x = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = 17 \cos 37° = 13{,}58 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 17 \sin 37° = 10{,}23 \text{ m/s} \end{array}\right\}$$

$a = g = -9{,}8$ m/s^2

$$\left.\begin{array}{l} x = 13{,}58\,t \\ y = 10{,}23\,t - 4{,}9\,t^2 \end{array}\right\}$$

Si $y = 0 \rightarrow 0 = 10{,}23\,t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow t\,(10{,}23 - 4{,}9\,t) = 0$

$\rightarrow t = \dfrac{10{,}23}{4{,}9} = 2{,}09$ s

$x = 13{,}58 \cdot 2{,}09 = 28{,}35$ m

El jugador situat a 30 m es mou amb MRUA.

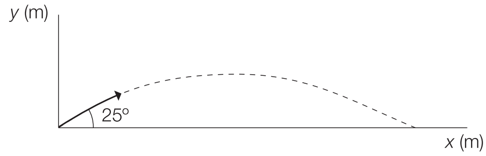
$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_0\,t + \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 \\ v = v_0 + a\,t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} v_0 = 0 \\ x_0 = 30 \text{ m} \\ x = 28{,}35 \text{ m} \\ t = 2{,}09 \text{ s} \end{array}\right\}$$

$$28{,}35 = 30 + \frac{1}{2}\,a \cdot 2{,}09^2 \rightarrow$$

$$a = \frac{(28{,}35 - 30) \cdot 2}{2{,}09^2} = -0{,}75 \text{ m/s}^2$$

$$v = -0{,}75 \cdot 2{,}09 = -1{,}58 \text{ m/s}$$

11. Una saltadora de longitud arriba a una velocitat de 10 m/s en l'instant en què inicia el salt. Si la inclinació amb què el fa és de 25° respecte de l'horitzontal, i si negligim els efectes del vent i el fregament, determineu:



$$\left.\begin{array}{l} x = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = 10 \cos 25° = 9{,}06 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 10 \sin 25° = 4{,}23 \text{ m/s} \\ g = -9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 9{,}06\,t \\ y = 4{,}23\,t - 4{,}9\,t^2 \end{array}\right\}$$

***a*) El temps total que és a l'aire.**

Si $y = 0 \rightarrow 0 = 4{,}23\,t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow$

$\rightarrow 0 = t\,(4{,}23 - 4{,}9\,t) \rightarrow t = \dfrac{4{,}23}{4{,}9} = 0{,}86$ s

***b*) L'altura màxima a la qual arriba mentre és a l'aire.**

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + g\,t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} v_x = 9{,}06 \\ v_y = 4{,}23 - 9{,}8\,t \end{array}\right\}$$

Si $v_y = 0 \rightarrow 4{,}23 - 9{,}8\,t = 0 \rightarrow t = \dfrac{4{,}23}{9{,}8} = 0{,}43$ s

$$y = 4{,}23 \cdot 0{,}43 - 4{,}9 \cdot 0{,}43^2 = 0{,}91 \text{ m}$$

***c*) La longitud mínima que ha de tenir el clot de sorra si comença el salt a 27 cm d'aquest clot.**

$$x = 9{,}06 \cdot 0{,}86 = 7{,}82 \text{ m}$$

La longitud mínima que ha de tenir el clot de sorra és:

$$7{,}82 - 0{,}27 = 7{,}55 \text{ m}$$

12. Tenim dos rellotges amb un diàmetre d'1 cm i 2 cm, respectivament. Trobeu la relació de les velocitats lineals de les tres agulles del rellotge. Raoneu si és la mateixa per a cadascuna de les tres agulles.

	Rellotge 1	Rellotge 2
Diàmetre	$d_1 = 1$ cm	$d_2 = 2$ cm
Radi	$r_1 = \dfrac{d_1}{2} = 0{,}005$ m	$r_2 = \dfrac{d_2}{2} = 0{,}01$ m

Les mateixes agulles dels dos rellotges giren a la mateixa velocitat angular. És a dir, les agulles horàries giren amb igual ω en els dos rellotges, les agulles minuteres dels dos rellotges giren amb la mateixa velocitat angular tot i que diferent de la de les agulles horàries (vegeu l'activitat 14). El mateix succeix per a les agulles dels segons. De la relació entre la velocitat lineal i l'angular tenim: $v = \omega \cdot r$, que per cada rellotge val:

$$v_1 = \omega r_1 = \omega \cdot 0{,}005$$

$$v_2 = \omega r_2 = \omega \cdot 0{,}01$$

Si relacionem les dues velocitats: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{0{,}005}{0{,}01} = 0{,}5;$

$$2\,v_1 = v_2$$

La velocitat lineal del rellotge amb l'esfera més gran és el doble de la del rellotge amb l'esfera més petita.

13. PAU **[Curs 03-04] Són les dotze en punt. Tant l'agulla horària com l'agulla minutera del rellotge apunten cap amunt.**

En quin instant tornaran a coincidir, per primer cop, les dues agulles del rellotge?

Primer de tot determinarem les velocitats angulars de les agulles horària i minutera:

$$\omega_h = \frac{1 \text{ volta}}{12 \text{ hores}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 4{,}63 \cdot \pi \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\omega_m = \frac{1 \text{ volta}}{1 \text{ hora}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 5{,}56 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

Les equacions de moviment seran:

$$\varphi_h = \omega_h \cdot t = 4{,}63\ \pi \cdot 10^{-5} \cdot t$$

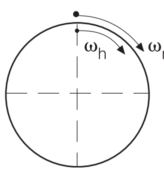
$$\varphi_m = \omega_m \cdot t = 5{,}56\ \pi \cdot 10^{-4} \cdot t$$

Les agulles es tornaran a trobar quan l'angle girat per la minutera sigui el mateix que l'angle girat per l'agulla horària més una volta, o sigui, més 2π radiants.

$$\varphi_m = \varphi_h + 2\pi \rightarrow \omega_m \cdot t = \omega_h \cdot t + 2\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_m \cdot t - \omega_h \cdot t = 2\pi \rightarrow (\omega_m - \omega_h) \cdot t = 2\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_m - \omega_h} = 3\,927 \text{ s} = 1 \text{ h } 5 \text{ min } 27 \text{ s}$$



14. Trobeu la velocitat angular de les tres agulles que donen voltes en un rellotge.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Secundària: $\omega = \dfrac{2\pi}{60} = 0{,}105$ rad/s

Minutera: $\omega = \dfrac{2\pi}{3\,600} = 1{,}74 \cdot 10^{-3}$ rad/s

Horària: $\omega = \dfrac{2\pi}{12 \cdot 3\,600} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s

15. PAU **[Curs 04-05] Una roda de 3 m de radi realitza un moviment circular uniformement accelerat amb una acceleració angular de 2 rad/s^2, partint del repòs.**

A. En un mateix instant, tots els punts de la roda tenen la mateixa:

***a*) Velocitat lineal.**

***b*) Velocitat angular.**

***c*) Acceleració normal.**

La resposta correcta és la *b*). Tots els punts de la roda giren amb la mateixa velocitat angular.

B. L'acceleració tangencial:

***a*) Augmenta amb el temps.**

***b*) Augmenta amb la distància al centre.**

***c*) És la mateixa per a tots els punts de la roda.**

L'acceleració tangencial és igual al producte de l'acceleració angular pel radi. Per tant, la resposta correcta és la *b*).

C. L'acceleració normal:

***a*) No depèn del temps.**

***b*) És la mateixa per a tots els punts de la roda.**

***c*) Va dirigida cap al centre.**

L'única resposta correcta és la *c*), ja que l'acceleració normal és igual al producte de la velocitat tangencial al quadrat dividida pel radi.

D. Passats 2 s, els punts de la perifèria tenen una velocitat lineal de:

***a*) 12 rad/s.**

***b*) 12 m/s.**

***c*) 4 m/s.**

$v = v_0 + a_t t = 0 + r\alpha t = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ m/s. Per tant, la resposta correcta és la *b*).

E. En aquests 2 s, la roda ha girat:

***a*) Menys d'una volta.**

***b*) Més d'una volta.**

***c*) Exactament una volta.**

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 4 \text{ rad}$$

Aquest valor és menor que 2π, per tant, l'opció correcta és la *a*).

16. [Curs 00-01] **Un mòbil que surt del repòs segueix una trajectòria circular de 3 m de radi amb una acceleració angular constant $\alpha = \pi$ rad/s^2.**

PAU

a) **Quant temps triga a fer una volta completa? Quina és la longitud de l'arc recorregut durant la meitat d'aquest temps?**

$$\Delta\theta = \omega_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\alpha\Delta t^2 \;\rightarrow\; 2\pi = \frac{\pi t^2}{2} \;\rightarrow\; 2\text{ s}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\,\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; s = \theta\cdot r = \frac{\pi}{2}\cdot 3 = 4{,}7\text{ m}$$

b) **Quina és la velocitat angular del mòbil a l'instant $t = 50{,}5$ s? I l'acceleració normal al mateix instant?**

$$\omega = \alpha t \;\rightarrow\; \omega = 0{,}5\cdot\pi = 1{,}57\text{ rad/s}$$

$$a_n = \omega^2\cdot r = 1{,}57^2\cdot 3 = 7{,}4\text{ m/s}^2$$

c) **Quant val l'acceleració tangencial del mòbil a l'instant $t = 0{,}5$ s? Quin angle formen l'acceleració tangencial i l'acceleració total en aquest instant?**

$$a_t = \alpha\cdot r = \pi\cdot 3 = 9{,}4\text{ m/s}^2$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{a_n}{a_t} = 0{,}787 \;\rightarrow\; \beta = 38{,}2°$$

Activitats finals

Qüestions

1. **Un nen dins un tren llança una pilota cap al sostre quan aquest passa davant d'una estació. Descriviu quina és la trajectòria de la pilota observada per:**

a) **Un passatger que està assegut dins del tren.**

Estudiem el moviment des d'un sistema de referència interior i fix al tren; la trajectòria de la pilota és rectilínia, ja que el seu moviment és un moviment de llançament vertical.

b) **Una persona que està asseguda a l'andana de l'estació.**

En aquest cas, el sistema de referència fix és l'andana de l'estació, i ara el moviment de la pilota és un moviment en el pla, és a dir, un moviment parabòlic, ja que durant el temps que ha durat el vol de la pilota, el tren i la pilota s'han desplaçat horitzontalment respecte de l'andana.

c) **Un passatger assegut dins d'un tren que es mou en sentit contrari al primer tren.**

Des del punt de vista d'un observador situat dins un segon tren que es mou, respecte l'andana, amb una velocitat en sentit contrari a la del primer tren, la pilota té un moviment en el pla. El sistema de referència ara és fixe en aquest observador, per tant, la pilota es desplaça verticalment i també horitzontalment. La trajectòria serà una paràbola més «aplanada» que l'observada en l'apartat *b*), ja que ara la velocitat de la pilota en la direcció *X* és més gran (és la suma dels valors absoluts de les velocitats dels dos trens respecte de l'andana).

2. **El corrent d'un riu té una certa velocitat en la direcció paral·lela a la riba. Si aquesta velocitat augmenta, un nedador que vulgui creuar el riu nedant perpendicularment al corrent, trigarà més o menys temps a fer-ho? Trieu la resposta correcta:**

a) **Tardarà més perquè la velocitat del riu és més gran i el desplaça a més distància abans d'arribar a l'altra riba. Com que augmenta la distància, també augmenta el temps.**

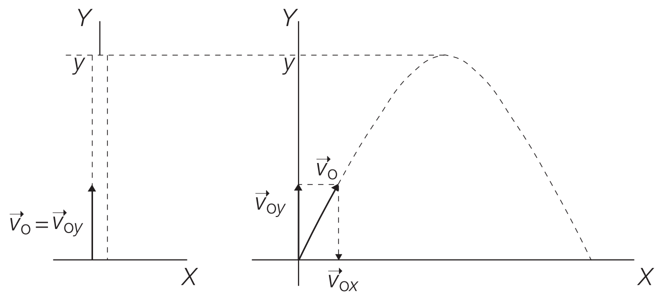
b) **Tardarà menys perquè la velocitat del riu és més gran i ell no ha de fer tant esforç per creuar-lo. Com que augmenta la velocitat, disminueix el temps.**

c) **Tardarà el mateix perquè la velocitat del corrent i la del nedador estan en direccions perpendiculars entre si. Es desplaça més distància en la direcció de la riba, però la mateixa (amplada del riu) en la direcció perpendicular.**

La resposta correcta és la *c*). Si el nedador manté la mateixa velocitat en la direcció perpendicular a la riba (direcció *Y*), el temps que triga en creuar el riu ve donat únicament pel quocient entre l'amplada del riu i la velocitat del nedador en la direcció *Y*. El fet que la velocitat del corrent del riu variï en mòdul no afecta al moviment en la direcció *Y*, perquè el moviment de l'aigua té lloc en la direcció *X*. El que passa és que la velocitat del nedador en la direcció *X* sí que varia i això provoca que quan arriba a l'altra riba, el corrent l'hagi desplaçat una distància més gran en la direcció *X*, però el temps de la travessia no es modifica.

3. **Compareu el moviment sota l'acció de la gravetat en caiguda lliure amb el llançament parabòlic.**

El moviment sota l'acció de la gravetat en caiguda lliure té lloc en la direcció de l'eix *Y*, i la seva equació del moviment és $y = y_0 + v_0\Delta t - \frac{1}{2}\,g\Delta t^2$. El llançament parabòlic és un moviment amb acceleració constant, en el qual l'acceleració és la de la gravetat i la velocitat inicial forma un cert angle amb l'acceleració. L'equació del moviment és $x = x_0 + v_0x\Delta t$ i $y = y_0 + v_0x\Delta t - \frac{1}{2}\,g\Delta t^2$.



Per tant, observem que el component *y* del llançament parabòlic té un comportament anàleg al moviment sota l'acció de la gravetat en caiguda lliure. Podem comparar els dos moviments a partir de la figura.

Suposem que llancem un cos verticalment cap amunt i, simultàniament, un altre cos amb certa velocitat que forma un cert angle amb l'eix *X*; si la velocitat inicial amb què llancem el primer cos és igual al component *y* de la velocitat inicial del segon cos, podem observar que els dos cossos arriben a la mateixa altura en el mateix instant de temps, i tornen a arribar a terra amb la mateixa velocitat inicial en el mateix moment.

4. Si llancem horitzontalment des d'una certa alçada un objecte amb una certa velocitat inicial:

A) El moviment en la direcció *X* és:

***a*) Rectilini**

***b*) Rectilini uniformement accelerat**

***c*) Parabòlic**

En un llançament horitzontal, es parteix d'una velocitat inicial en la direcció *X*. Com que no hi ha acceleració en aquesta direcció, el moviment serà rectilini uniforme. L'opció correcta és la *a*).

B) El moviment en la direcció *Y* és:

***a*) Rectilini**

***b*) Rectilini uniformement accelerat**

***c*) Parabòlic**

En un llançament horitzontal, el mòbil està sotmès a l'acceleració de la gravetat en la direcció *Y*. Per tant, en aquesta direcció es produeix una caiguda lliure i el mòbil seguirà un MRUA. L'opció correcta és la *b*).

5. Trobeu la velocitat d'un cos i el temps que triga a arribar a terra, si el llancem des del mateix lloc, en els dos casos següents i comenteu els resultats obtinguts en tots dos casos.

***a*) El llancem a una velocitat inicial horitzontal.**

Es tracta d'un llançament horitzontal. Si mirem la taula 2.2 del llibre, on hi ha les condicions inicials per aquest moviment, l'equació del moviment i i l'equació de la trajectòria, trobem:

Equació del moviment: $\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \\ y = y_0 + \dfrac{1}{2}\, g t^2 \end{array}\right\}$

Equació de la velocitat: $\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = g t \end{array}\right\}$

Quan arriba a terra,

$$y = 0 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}\, g t^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2 y_0}{g}}$$

Substituint aquest valor en l'equació de la velocitat, trobem que:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = g\sqrt{-\dfrac{2 y_0}{g}} \end{array}\right\}$$

***b*) El deixem caure lliurement.**

Es tracta d'un moviment rectilini uniformement accelerat en l'eix vertical. L'equació del moviment i l'equació de la velocitat són: $\left.\begin{array}{l} y = y_0 + \dfrac{1}{2}\, g t^2 \\ v = g t \end{array}\right\}$

Quan arriba a terra,

$$y = 0 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}\, g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{-2 y_0}{g}}$$

Substituint aquest valor en l'equació de la velocitat, trobem que: $v = g\sqrt{-\dfrac{2 y_0}{g}}$

D'aqui s'observa que el temps i el component *y* de la velocitat coincideixen en els dos casos.

6. *a*) Què vol dir que el moviment circular és un moviment en 2 dimensions? Expliqueu-ho amb un dibuix.

En un moviment circular la trajectòria és una circumferència i cal donar dues coordenades per especificar la posició.

***b*) Poseu cinc exemples de moviments circulars.**

Roda que gira, pèndol cònic, cavallets de fira, moviment de la Lluna al voltant del Sol, agulles del rellotge.

7. Un punt material fa un moviment circular de radi 20 cm, descrit per l'equació del moviment

$$\varphi = 15 + 270\, t$$

on φ és l'angle descrit en graus.

A) L'angle descrit inicial és:

***a*) 15°**

***b*) 15 rad**

***c*) 200 rad**

L'equació del moviment circular uniforme és:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\,(t - t_0)$$

Si comparem amb l'expressió donada a l'enunciat:

$$\varphi = 15 + 270\, t$$

on es diu que l'angle està expressat en graus, l'angle inicial val: $\varphi_0 = 15°$

Per tant, l'opció correcta és la *a*).

B) La velocitat angular és:

***a*) 270 m/s**

***b*) 4,71 rad/s**

***c*) 270 rad/s**

Comparant les dues expressions anteriors, s'obté:

$$\omega = 270 \text{ graus/s} = 270 \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180}\, \text{s}^{-1} = 4{,}71 \text{ rad/s}$$

Per tant, l'opció correcta és la *b*).

C) El període del moviment val:

***a*) 1,33 s**

***b*) 0,75 s**

***c*) 10 s**

De la relació entre la velocitat angular i el període obtenim el valor d'aquest últim:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 180}{270\pi} = 1{,}33\ \text{s}$$

Per tant, l'opció correcta és la *a*).

D) La freqüència del moviment val:

***a*) 1,33 Hz**

***b*) 0,75 Hz**

***c*) 10 Hz**

La freqüència és la inversa del període. Així:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}33\ \text{s}} = 0{,}75\ \text{Hz}$$

Per tant, l'opció correcta és la *b*).

8. Una politja de 20 cm de diàmetre gira amb moviment circular uniforme fent 10 voltes en 15 s.

A) El període del moviment d'aquesta politja és:

***a*) 15 s** ***b*) 10 s** ***c*) 1,5 s**

Si la politja fa 10 voltes en 15 segons, per a fer una volta tardarà un temps (període) igual a 15/10 = 1,5 segons. Per tant, l'opció correcta és la *c*).

B) La velocitat lineal en què gira és:

***a*) 4,19 rad/s** ***b*) 0,42 m/s** ***c*) 4,19 m/s**

La velocitat lineal ve donada pel quocient entre el desplaçament i el temps. En un període, la roda recorre un espai igual a la longitud del seu perímetre. Així:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{\pi d}{1{,}5\ \text{s}} = \frac{\pi\ 0{,}2\ \text{m}}{1{,}5\ \text{s}} = 0{,}42\ \text{m/s}$$

on d és el diàmetre de la roda. Per tant, l'opció correcta és la *b*).

9. El diàmetre de les rodes del darrere d'un tractor és tres vegades més gran que el diàmetre de les rodes del davant. Quina relació hi ha entre les velocitats angulars de les dues rodes.

Les quatre rodes del tractor s'han de moure amb la mateixa velocitat lineal. Per tant, s'ha de plantejar la seva relació amb la velocitat angular.

	Rodes darrere	Rodes davant
Diàmetre	$d_1 = 3\,d_2$	d_2
Radi	$r_1 = \frac{d_1}{2} = 3\,\frac{d_2}{2}$	$r_2 = \frac{d_2}{2}$

$v = \omega\, r$. Per cada roda val: $v = \omega_1 r_1 = \omega_1 \cdot 3\,\frac{d_2}{2}$

$$v = \omega_2 r_2 = \omega_2\,\frac{d_2}{2}$$

Igualant les velocitats: $\omega_1 \cdot 3\,\frac{d_2}{2} = \omega_2\,\frac{d_2}{2}$

Simplificant: $\omega_2 = 3\,\omega_1$

Quan les rodes de darrere han donat una volta, les de davant n'han donat tres.

10. [Curs 99-00] Un cotxe es mou per una carretera seguint una corba i l'agulla del seu velocímetre marca constantment 60 km/h. Té acceleració el cotxe? Raoneu la resposta. PAU

Sí, ja que varia la direcció de la velocitat, per tant, té acceleració normal o centrípeta.

11. Com són l'acceleració angular, l'acceleració normal i l'acceleració tangencial:

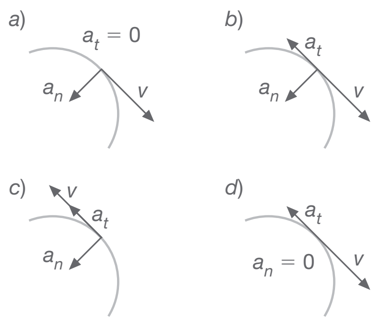
***a*) En el moviment rectilini uniformement accelerat?**

En el MRU, com que la trajectòria és una recta, l'acceleració correspon a l'acceleració tangencial.

***b*) I en el moviment circular uniforme?**

En el MCU, la velocitat angular és constant. Per tant, l'acceleració angular és nul·la. La velocitat lineal també és constant i, així, el component tangencial de l'acceleració també és constant. Ara bé, en el MCU hi ha variació en la direcció de la velocitat i, per tant, el component normal de l'acceleració val $a_n = \frac{v^2}{R}$.

12. [Curs 03-04] Considereu una partícula que descriu un moviment circular uniformement retardat, amb acceleració angular no nul·la. Quin dels diagrames de la figura 2.40 li correspon? PAU



***a*) Trieu la resposta que considereu correcta.**

La resposta correcta és la *b*).

***b*) Justifiqueu la resposta.**

Circular implica que l'acceleració normal és diferent de zero. Retardat implica que l'acceleració tangencial és diferent de zero i en sentit oposat a la velocitat.

13. Com estan relacionats els temps que tarden a girar dues partícules si una té una velocitat angular doble de la de l'altra i descriu la meitat de l'angle?

Si suposem que t_1 és el temps que la partícula triga a girar un angle φ_1 quan va a velocitat ω_1 i t_2 és el temps que triga la partícula a girar un angle φ_2 quan va a velocitat angular ω_2.

Segons l'enunciat, tenim que $\omega_2 = 2\,\omega_1$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\,\varphi_1$. Considerem que la partícula gira amb acceleració angular constant partint del repòs. Si tenim en compte l'equació del moviment i l'equació de la velocitat del MCUA, trobem que:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha\,\Delta t \rightarrow \omega = \alpha\, t\end{array}\right\}$$

Aïllem α i la substituïm en l'equació del moviment:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{t}\,t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\,\omega t \rightarrow t = \frac{2\varphi}{\omega}$$

Apliquem aquesta última expressió a les dues situacions de l'enunciat, i relacionem els temps:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{2\varphi_1}{\omega_1} \\ t_2 = \dfrac{2\varphi_2}{\omega_2}\end{array}\right\} \frac{t_1}{t_2} = \frac{\dfrac{2\varphi_1}{\omega_1}}{\dfrac{2\varphi_2}{\omega_2}} \rightarrow$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi_1\,\omega_2}{\varphi_2\,\omega_1} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi_1\, 2\,\omega_1}{\frac{1}{2}\,\varphi_1\,\omega_1} = 4 \rightarrow t_1 = 4t_2$$

Arribem al mateix resultat si considerem que el moviment és un MCU.

Problemes

1. Les escales mecàniques d'uns grans magatzems pugen i baixen els clients a una velocitat de 2,5 m/s. Per a una persona que camina a un ritme constant de 4 km/h sobre les escales, determineu la velocitat amb què la veiem caminar des de fora de les escales, en els casos següents:

$$|v_0| = 2{,}5 \text{ m/s}$$

$$|v'| = 4\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1\,000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3\,600 \text{ s}} = 1{,}11 \text{ m/s}$$

a) **La persona puja per les escales que van en sentit ascendent.**

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 2{,}5 \text{ m/s} \\ v' = 1{,}11 \text{ m/s}\end{array}\right\} v = v' + v_0 = 1{,}11 + 2{,}5 = 3{,}61 \text{ m/s}$$

b) **La persona baixa per les escales que van en sentit ascendent.**

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 2{,}5 \text{ m/s} \\ v' = -1{,}11 \text{ m/s}\end{array}\right\} v = v' + v_0 = -1{,}11 + 2{,}5 = 1{,}39 \text{ m/s}$$

c) **La persona puja per les escales que van en sentit descendent.**

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = -2{,}5 \text{ m/s} \\ v' = 1{,}11 \text{ m/s}\end{array}\right\} v = v' + v_0 = 1{,}11 - 2{,}5 = -1{,}39 \text{ m/s}$$

d) **La persona baixa per les escales que van en sentit descendent.**

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = -2{,}5 \text{ m/s} \\ v' = -1{,}11 \text{ m/s}\end{array}\right\} v = v' + v_0 = -1{,}11 - 2{,}5 = -3{,}61 \text{ m/s}$$

2. Considereu una cinta transportadora en moviment d'una cadena de muntatge, i una joguina mecànica que es mou damunt la cinta. Amb quina velocitat es mou la cinta, si una persona veu moure's la joguina a una velocitat de 5 m/s, quan la joguina es mou en la mateixa direcció i el mateix sentit que la cinta, i a una velocitat de 2 m/s quan la veu moure's en la mateixa direcció, però en sentit contrari? Quina velocitat desenvolupa la joguina? I la cinta?

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 5 \text{ m/s} \Rightarrow 5 = v' + v_0 \\ v_2 = -2 \text{ m/s} \Rightarrow -2 = -v' + v_0\end{array}\right\}$$

Resolem el sistema per reducció:

$$\left.\begin{array}{l} (5 = v' + v_0)\cdot 1 \\ (-2 = -v' + v_0)\cdot 1\end{array}\right\} 3 = 2v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} (5 = v' + v_0)\cdot 1 \\ (-2 = -v' + v_0)\cdot(-1)\end{array}\right\} 7 = 2v' \Rightarrow v' = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ m/s}$$

3. Un nedador pot desenvolupar una velocitat d'1,2 m/s nedant a ritme constant. Si neda en un riu en què el corrent d'aigua porta una velocitat d'1,6 m/s, calculeu la velocitat amb què el veu nedar una persona en repòs, en els casos següents:

$$|v'| = 1{,}2 \text{ m/s},\ v_0 = 1{,}6 \text{ m/s}$$

a) **Quan neda a favor del corrent del riu, paral·lelament a la seva riba.**

$$v' = 1{,}2 \text{ m/s} \Rightarrow v = v' + v_0 = 1{,}2 + 1{,}6 = 2{,}8 \text{ m/s}$$

b) **Quan neda en contra del corrent del riu, paral·lelament a la seva riba.**

$$v' = -1{,}2 \text{ m/s} \Rightarrow v = v' + v_0 = -1{,}2 + 1{,}6 = 0{,}4 \text{ m/s}$$

c) **Quan neda perpendicularment al corrent en un riu cap a la riba contrària.**

$$|v'| \perp |v_0| \Rightarrow v = \sqrt{-v'^2 + v_0^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2} = 2 \text{ m/s}$$

d) **Determineu el punt de la riba contrària al qual arriba el nedador en el cas *c*).**

Anomenen L l'amplada del riu, i tenim:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \Delta t \rightarrow x = 1{,}6\,\Delta t \\ y = L\end{array}\right\}$$

$$y = L = 1{,}2\,\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{L}{1{,}2}$$

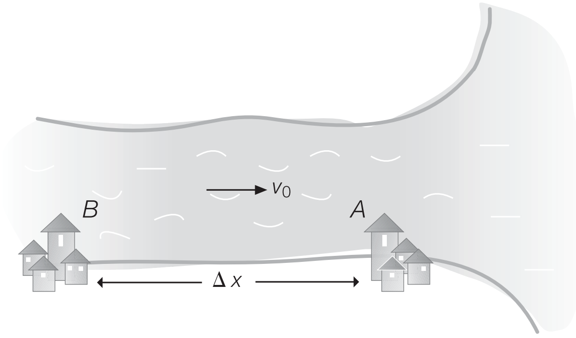
Per tant, la coordenada x del punt on arriba el nedador ve donada per:

$$x = 1{,}6\,\Delta t = 1{,}6\,\frac{L}{1{,}2} = 1{,}33\,L$$

És a dir, el nedador arriba a la riba contrària al punt P (1,33 L, L).

4. Un vaixell turístic que circula a 36 km/h fa un recorregut per un riu entre la població *A*, que es troba gairebé a la desembocadura del riu, i la població *B*, que es troba a 24 km aigües amunt de la població *A*. Si a l'estiu les aigües del riu van a una velocitat mitjana de 18 km/h, calculeu:

$$|v'| = 36 \text{ km/h}, \ v_0 = 18 \text{ km/h}$$



$$\Delta x_{AB} = \overline{AB} = -24 \text{ km}$$

a) **El temps que tarda a anar de la població *A* a la població *B*.**

$$v' = -36 \text{ km/h} \Rightarrow$$

$$v = v' + v_0 = -36 + 18 = -18 \text{ km/h}$$

$$v = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{-24}{-18} = 1{,}33 \ \cancel{h} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \ \cancel{h}} =$$

$$= 80 \text{ min}$$

b) **El temps que tarda a anar de la població *B* a la població *A*.**

$$v' = 36 \text{ km/h} \Rightarrow v = v' + v_0 = 36 + 18 = 54 \text{ km/h}$$

$$\Delta x_{BA} = \overline{BA} = -\overline{AB} = 24 \text{ km}$$

$$v = \frac{\Delta x_{BA}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_{BA}}{v} = \frac{24}{54} = 0{,}44 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} =$$

$$= 26{,}67 \text{ min}$$

5. Trobeu l'equació de la trajectòria d'un mòbil la posició del qual, en unitats del SI, és:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x = 3t + 2} \\ \boldsymbol{y = 3t + 9t^2} \end{aligned}\right\}$$

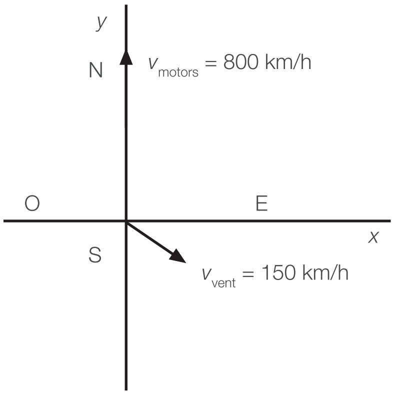
$$x = 3t + 2 \rightarrow t = \frac{x - 2}{3}$$

$$y = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 9\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 \rightarrow y = x - 2 + (x-2)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = x - 2 + x^2 + 4 - 4x \rightarrow y = x^2 - 3x + 2$$

6. Un avió és impulsat pels seus motors a 800 km/h en direcció nord, a l'alçada a què vola bufa un vent en direcció sud-est que l'empeny amb una velocitat de tracció de 150 km/h. Calculeu, la velocitat i la direcció en què es mou l'avió respecte del terra.

Prenem com a sistema de referència el terra. Aleshores, la velocitat total de l'avió es deu a la velocitat proporcionada pels seus motors i la velocitat de tracció del vent. A la figura següent representem aquestes dues velocitats. Si les descomponem en les direccions *X* i *Y*, podrem trobar, aplicant el teorema de Pitàgores, la velocitat total:



Com que la velocitat del vent forma un angle de 45° amb els eixos de coordenades, els seus components v'_x i v'_y venen donats per:

$$v'_x = v_{vent} \cos (45°) = 106 \text{ km/h}$$

$$v'_y = v_{vent} \sin (-45°) = -106 \text{ km/h}$$

En la direcció *X*, l'avió té una velocitat total igual a:

$$v_x + v'_x = 106 \text{ km/h}$$

En la direcció *Y*, l'avió té una velocitat total igual a:

$$v_y = v_{motors} + v'_y = 800 - 106 = 694 \text{ km/h}$$

La velocitat total és:

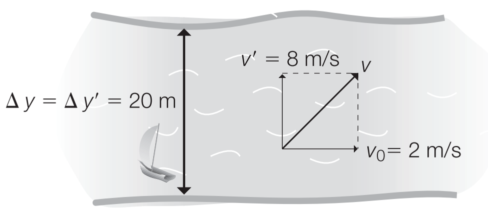
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{106^2 + 694^2} = 702 \text{ km/h}$$

I la direcció d'aquesta velocitat ve donada per l'angle que forma amb el semieix positiu d'*X*:

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{v_y}{v_x} = \text{arc tg } \frac{694}{106} = 81{,}31°$$

Tenint en compte les xifres significatives, és $\varphi = 81{,}3°$.

7. Una barca de pesca, que considerem puntual, vol travessar perpendicularment un riu de 20 m d'ample, i desenvolupa una velocitat de 8 m/s. Si la velocitat del corrent del riu és de 2 m/s, calculeu:



a) **El temps que la barca triga a arribar a l'altre marge del riu.**

$$\Delta y = \Delta y' = v'\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta y}{v'} = \frac{20}{8} = 2{,}5 \text{ s}$$

b) El desplaçament en la direcció del riu de l'altre marge al qual arriba.

$$\Delta x = v_0 \Delta t = 2 \cdot 2{,}5 = 5 \text{ m}$$

c) L'espai recorregut i la velocitat de la barca.

$$v = \sqrt{v'^2 + v_0^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}25 \text{ m/s}$$

$$\Delta r = v \Delta t = 8{,}25 \cdot 2{,}5 = 20{,}6 \text{ m}$$

d) L'espai recorregut per la barca en el temps calculat en l'apartat *a*), si navegués en el sentit del corrent del riu.

$$v' \parallel v_0 \Rightarrow v = v' + v_0 = 8 + 2 = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = v \Delta t = 10 \cdot 2{,}5 = 25 \text{ m}$$

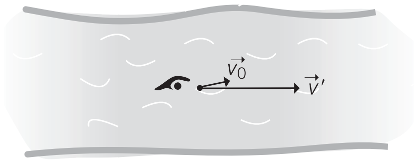
e) L'espai recorregut per la barca en el temps calculat en l'apartat *a*), si navegués en sentit contrari al corrent del riu.

$$v' \parallel v_0,\ v' = -8 \text{ m/s} \Rightarrow v = v' + v_0 = -8 + 2 = -6 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = v \Delta t = -6 \cdot 2{,}5 = -15 \text{ m, en mòdul, 15 m.}$$

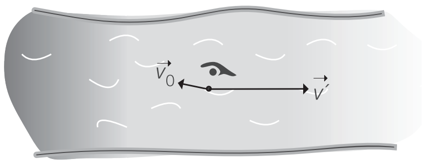
8. Un noi sap que si neda a favor del corrent del riu és capaç de recórrer, paral·lelament a la riba i en el mateix temps, el doble de la distància que nedant contra corrent. Si vol travessar un riu i arribar a l'altra riba en el punt directament oposat al de sortida, en quina direcció ha de nedar?

■ Quan neda a favor del corrent:



$$v_1 = v' + v_0 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_1}{v_1} = \frac{\Delta x_1}{v' + v_0} \quad [1]$$

■ Quan neda contracorrent:



$$v_2 = v' - v_0 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_2}{v_2} = \frac{\Delta x_2}{v' - v_0} \quad [2]$$

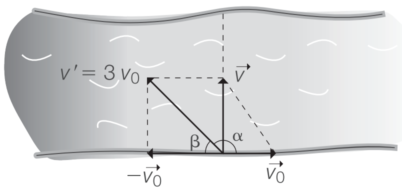
Quan neda a favor del corrent recorre, en el mateix temps Δt, el doble de distància que quan neda contracorrent, $\Delta x_1 = 2\Delta x_2$ i per tant:

$$[1] = [2] \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{v' + v_0} = \frac{\Delta x_2}{v' - v_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cancel{\Delta x_2}}{v' + v_0} = \frac{\cancel{\Delta x_2}}{v' - v_0} \Rightarrow 2\,(v' - v_0) = v' + v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v' - 2v_0 = v' + v_0 \Rightarrow 2v' - v' = v_0 + 2v_0 \Rightarrow v' = 3v_0$$

Representem la situació quan travessa el riu perpendicularment, i calculem l'angle:

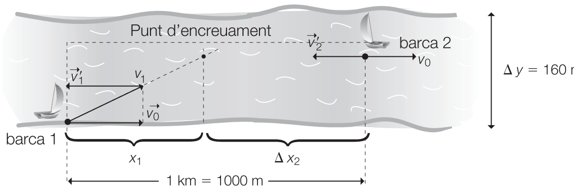


$$\cos \beta = \frac{v_0}{v'} = \frac{v_0}{3v_0} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}53° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 180 - \beta = 180 - 70{,}53° = 109{,}47°$$

9. L'aigua d'un riu de 160 m d'amplada es mou a 10 m/s. Una barca surt d'un dels seus marges en direcció perpendicular al riu amb una velocitat de 4 m/s. Simultàniament, surt una altra barca navegant contra corrent seguint el centre del riu i des d'un punt situat a 1 km del primer aigües avall. Les dues barques es creuen en el punt mitjà del riu. Calculeu:



a) El temps que tarden a creuar-se.

Les barques es creuen quan la coordenada y de la primera barca és: $\dfrac{\Delta y}{2} = \dfrac{160}{2} = 80$ m.

Per tant:

$$y_1 = v_1' \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{y_1}{v_1'} = \frac{80}{4} = 20 \text{ s}$$

b) La distància recorreguda per la segona barca fins que es creua amb la primera.

Quan les barques es creuen, la coordenada x de la primera barca és: $x_1 = v_0 \Delta t = 10 \cdot 20 = 200$ m. Per tant, la distància Δx_2 que recorre la segona barca és:

$$\Delta x_2 = 1\,000 - 200 = 800 \text{ m}$$

c) La velocitat de la segona barca respecte de l'aigua.

La segona barca recorre un espai negatiu, ja que es mou cap a l'esquerra. Per tant, la velocitat v_2 amb que es mou respecte de la riba del riu és:

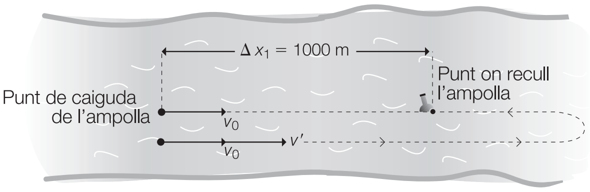
$$v_2 = \frac{-\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{-800}{20} = -40 \text{ m/s}$$

Per tant, la velocitat v_2' de la segona barca respecte de l'aigua és:

$$v_2 = v_2' + v_0 \Rightarrow v_2' = v_2 - v_0 = -40 - 10 = -50 \text{ m/s}$$

En mòdul, aquesta velocitat és de 50 m/s.

10. Un home navega per un riu i porta una ampolla d'aigua a la popa del vaixell. Quan el vaixell passa per sota un pont, una ona reflectida en els pilars del pont xoca contra l'embarcació i l'ampolla cau a l'aigua. L'home navega durant 20 min sense adonar-se que l'ampolla no hi és. Quan se n'adona, gira el vaixell i, amb la mateixa velocitat que portava, va a buscar l'ampolla i la recull 1 000 m més avall del pont. Calculeu la velocitat del riu. Negligiu el temps que el vaixell tarda a fer la maniobra de gir.



$\Delta x_1 = v_0\, \Delta t_T$ on v_0 és la velocitat de l'aigua del riu.

Aquest problema es resol d'una manera molt senzilla si ho mirem des del punt de vista del sistema de referència S', és a dir, del sistema de referència definit per l'aigua del riu. Imaginem el que percep un observador solidari amb el sistema S'; per aquest observador, l'aigua del riu està quieta, i són els marges del riu, el pont, els arbres, etc., els que es mouen amb velocitat $-v_0$. Per tant, quan aquest hipotètic observador veu caure l'ampolla, observa com aquesta resta en repòs en el sistema S' (aigua del riu); també observa com el vaixell se n'allunya amb velocitat v' durant 20 minuts, passats els quals el vaixell gira i s'apropa ara amb velocitat $-v'$ cap al punt on havia caigut l'ampolla. Com que aquesta velocitat és la mateixa, en mòdul, que la velocitat v', i l'ampolla ha restat immòbil en el sistema S', el vaixell ha de trigar el mateix temps (20 minuts) a arribar al punt on cau l'ampolla.

Així doncs:

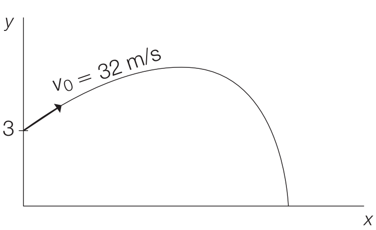
$$\Delta t_T = t_1 + t_2 = 20 + 20 = 40 \text{ minuts} = 2\,400 \text{ s}$$

$$\Delta x_1 = v_0\, \Delta t_T$$

$$v_0 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_T} = \frac{1\,000}{2\,400} = 0{,}42 \text{ m/s} = 1{,}5 \text{ km/h}$$

Evidentment, aquest exercici també es pot resoldre mirant-ho des del punt de vista del sistema S' (marges del riu), però cal plantejar un sistema d'equacions la resolució del qual és bastant farragosa.

11. Una noia tira un objecte amb una certa inclinació cap amunt des d'una altura de 3 m. Si el component de la velocitat v_{0x} és de 20 m/s i el mòdul de la velocitat és $v_0 = 32$ m/s:



$v_{0x} = 20$ m/s

$a = g = -9{,}8$ m/s^2

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \rightarrow v_{0y} = \sqrt{v_0^2 - v_0 x^2}$$

$$\sqrt{32^2 - 20^2} = \sqrt{624} = 24{,}98 \text{ m/s}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y}\, g\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} + g\, t \end{aligned}\right\}$$

a) **Escriviu l'equació del moviment de l'objecte.**

$$x = 20\, t$$

$$y = 3 + 24{,}98\, t - 4{,}9\, t^2$$

b) **Calculeu el moment en què l'objecte arriba a terra i on ho fa.**

Si $y = 0 \rightarrow 0 = 3 + 24{,}98\, t - 4{,}9\, t^2 \rightarrow$

$\rightarrow 4{,}9\, t^2 - 24{,}98\, t - 3 = 0$

$$t = \frac{24{,}98 \pm \sqrt{24{,}98^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 3}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{24{,}98 \pm 26{,}13}{9{,}8}$$

$$t = 5{,}2 \text{ s}$$

Amb aquest valor de temps podem trobar la coordenada x del punt on l'objecte arriba a terra:

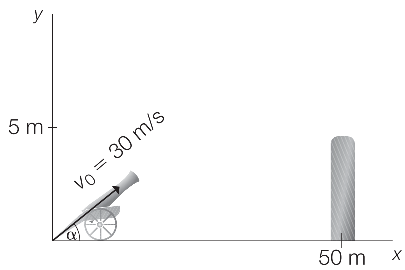
$$x = v_{0x} t = 20 \cdot 5{,}2153 = 104{,}31 \text{ m} \simeq 104 \text{ m}$$

c) **L'objecte entrarà en un forat que és a 100 m mesurats horitzontalment?**

$$x = 20 \cdot 5{,}21 = 104{,}3 \text{ m}$$

No entrarà al forat.

12. Un canó llança un projectil des de terra, obliquament cap amunt amb un angle α tal que $\sin \alpha = 0{,}6$ i $\cos \alpha = 0{,}8$ i una velocitat de 30 m/s. A 50 m de distància hi ha una tanca de 5 m d'altura.



$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} + g\, t \end{aligned}\right\}$$

$g = -9{,}8$ m/s^2

$\sin \alpha = 0{,}6$

$\cos \alpha = 0{,}8$

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} &= 30 \cdot 0{,}8 = 24 \text{ m/s} \\ v_{0y} &= 30 \cdot 0{,}6 = 18 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 24\, t \\ y &= 18\, t - 4{,}9\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

***a*) El projectil passa la tanca?**

Si $x = 50$ m $\rightarrow$ $50 = 24 \cdot t \rightarrow t = \dfrac{50}{24} = 2{,}08$ s

$$y = 18 \cdot 2{,}08 - 4{,}9 \cdot 2{,}08^2 = 16{,}24 \text{ m}$$

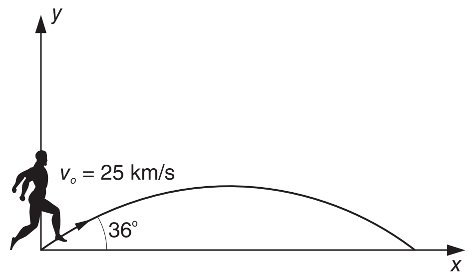
Sí que passa la tanca, ja que 16,24 m $>$ 5 m.

***b*) Calculeu la velocitat quan passa per damunt de la tanca.**

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 24 \text{ m/s} \\ v_y = 18 - 9{,}8\,t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} v_x = 24 \text{ m/s} \\ v_y = 18 - 9{,}8 \cdot 2{,}08 = -2{,}42 \text{ m/s} \end{array}\right\}$$

13. En una classe d'educació física es fa una prova de salts de longitud, un alumne comença el salt amb una velocitat de 25 km/h i un angle de 36° amb l'horitzontal. Suposem que el fregament amb l'aire és negligible.

Prèviament, representem el moviment i veiem que es tracta d'un moviment parabòlic.



Les condicions inicials són:

$v_0 = 25$ km/h $= 6{,}94$ m/s

$x_0 = 0$

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 6{,}94 \cos 36° = 5{,}62$ m/s

$a_x = 0$

$y_0 = 0$

$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 6{,}94 \sin 36° = 4{,}08$ m/s

$a_x = g = -9{,}8$ m/s^2

***a*) Determineu el valor de la marca que ha aconseguit.**

Per determinar la marca que ha aconseguit l'alumne, substituïm les dades en l'equació del moviment.

$$x = v_{0x}\,t \rightarrow x = 5{,}62\,t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}\,gt^2 \rightarrow y = 4{,}08t - 4{,}9\,t^2$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = 4{,}08t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow t(4{,}08 - 4{,}9\,t) = 0 \rightarrow$$

$$t = \frac{4{,}08}{4{,}9} = 0{,}83 \text{ s}$$

$$x = 5{,}62 \cdot 0{,}83 = 4{,}68 \text{ m}$$

***b*) Sense canviar la velocitat amb què ha iniciat el salt, de quina manera podríem millorar la marca? Quina marca seria?**

L'angle de llançament que dóna l'abast horitzontal màxim és de 45°; per tant, la marca que pot aconseguir és:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 6{,}94 \cos 45° = 4{,}91 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 6{,}94 \sin 45° = 4{,}91 \text{ m/s}$$

Substituïm les dades en l'equació del moviment.

$$x = 4{,}91\,t$$

$$y = 4{,}91\,t - 4{,}9\,t^2$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = 4{,}91t - 4{,}9t^2 \rightarrow t(4{,}91 - 4{,}9\,t) = 0$$

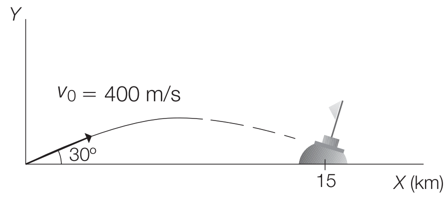
$$t = \frac{4{,}91}{4{,}9} = 1 \text{ s}$$

Observem que

$$x = 4{,}91 \cdot 1 = 4{,}91 \text{ m}$$

hem millorat la marca en 0,23 m.

14. Una boia està situada a 15 km d'un vaixell. Si disparen un objecte des del vaixell a 400 m/s amb un angle de 30°, arribarà a la boia? A quina alçada màxima arriba l'objecte?



$x = v_{0x}t$

$y = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$

$v_{0x} = 400 \cdot \cos 30 = 346{,}4$ m/s

$v_{0y} = 400 \cdot \sin 30 = 200$ m/s

$a = g = -9{,}8$ m/s^2

$$\left.\begin{array}{l} x = 346{,}4\,t \\ y = 200\,t - 4{,}9\,t^2 \end{array}\right\}$$

Si $y = 0 \rightarrow 0 = 200\,t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow t\,(200 - 4{,}9\,t) = 0$

$\rightarrow t = \dfrac{200}{4{,}9} = 40{,}82$ s

$$x = 346{,}4 \cdot 40{,}82 = 14\,140 \text{ m}$$

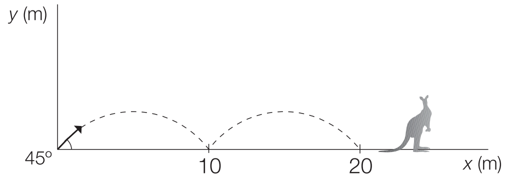
No arribarà a la boia, ja que aquesta es troba a 15 km.

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + g\,t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} v_x = 346{,}4 \text{ m/s} \\ v_y = 200 - 9{,}8\,t \end{array}\right\}$$

Si $v_y = 0 \rightarrow 0 = 200 - 9{,}8\,t \rightarrow t = \dfrac{200}{9{,}8} = 20{,}41$ s

$$x = 200 \cdot 20{,}41 - 4{,}9 \cdot 20{,}41^2 = 2\,040{,}82 \text{ m}$$

15. Un cangur, quan salta, avança 10 m en cada salt. Si ho fa amb una velocitat inicial v_0 i un angle de 45° respecte de l'horitzontal, calculeu la velocitat inicial i el temps que tarda entre salt i salt.



$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} + g\, t \end{aligned}\right\}\ a = g = -9{,}8\ \text{m/s}^2$$

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos 45° = 0{,}707\, v_0 \\ v_{0y} &= v_0 \sin 45° = 0{,}707\, v_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}707\, v_0 t \\ y &= 0{,}707\, v_0 t - 4{,}9\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

Quan $x = 10$ m $\rightarrow$ $y = 0$

$$\left.\begin{aligned} 10 &= 0{,}707\, v_0 t \\ 0 &= 0{,}707\, v_0 t - 4{,}9\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{rl} & 10 = 0{,}707\, v_0 t \\ + & \ \ 0 = -0{,}707\, v_0 t + 4{,}9\, t^2 \\ \hline & 10 = 4{,}9\, t^2 \end{array}$$

$$t = \sqrt{\frac{10}{4{,}9}} = 1{,}43\ \text{s}$$

$$v_0 = \frac{10}{0{,}707\, t} = \frac{10}{0{,}707 \cdot 1{,}43} = 9{,}90\ \text{m/s}$$

16. Disparem un projectil amb una velocitat de 150 m/s amb un angle de 60°. Determineu-ne l'altura i l'abast màxim.

Altura màxima: $y_{\text{màx}} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\, g}$

Abast màxim: $x_{\text{màx}} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\, \alpha}{g}$

$$y_{\text{màx}} = \frac{150^2 \cdot \sin^2 60°}{2 \cdot 9{,}8} = 860{,}97\ \text{m}$$

$$x_{\text{màx}} = \frac{150^2 \cdot \sin 2 \cdot 60°}{9{,}8} = 1\,988{,}32\ \text{m}$$

17. Un avió que vola a 270 km/h a una altura de 3 km, ha de tirar una paquet a un edifici de 20 m d'altura. Calculeu la distància amb què ha de tirar el paquet perquè caigui al terrat de l'edifici i la velocitat amb què arribarà.

Busquem primer el temps que el paquet tarda a arribar al terrat. És a dir, el temps que tarda a recórrer en la direcció *Y* un desplaçament: $\Delta y = y - y_0 = 20 - 3\,000 = -2\,980$ m. Prenem l'origen de temps a l'instant que el paquet es deixa caure. En aquest cas, la velocitat inicial en la direcció *Y* és zero:

$$y = y_0 + v_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, g\, (\Delta t)^2 \rightarrow -2\,980 = -\frac{1}{2}\, 9{,}8\, t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 24{,}661\ \text{s}$$

Busquem ara la distància que el paquet haurà recorregut en la direcció *X* en aquest temps i sabrem des de quina distància s'ha de llançar:

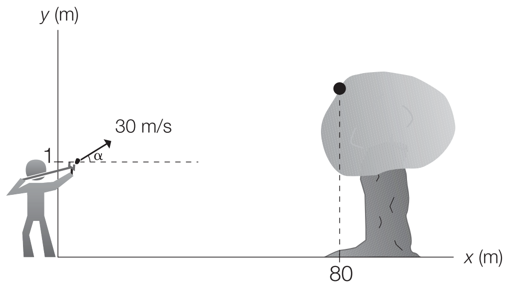
$$270\ \text{km/h} = 75\ \text{m/s}$$

$$x = x_0 + v_0\, \Delta t \rightarrow x = 75 \cdot 24{,}661 = 1\,849{,}6\ \text{m}$$

El paquet arriba a terra amb un component de velocitat en la direcció *X* igual a $v_x = 75$ m/s. El component de la velocitat en la direcció *Y* val:

$$v_y = v_0 + g\, t \rightarrow v_y = -9{,}8 \cdot 24{,}661 = -241{,}7\ \text{m/s}$$

18. Una noia vol menjar-se una poma situada a la part més alta d'un arbre. Per poder-ho fer, llança una pedra amb el tirador amb una velocitat inicial de 30 m/s, la qual forma un angle α amb l'horitzontal tal que sin α = 0,8 i cos α = 0,6. Si l'arbre és a 80 m de la noia i la noia llança la pedra a 1 m del terra:



$v_0 = 30$ m/s

$\sin \alpha = 0{,}8$

$\cos \alpha = 0{,}6$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

$v_{0x} = 30 \cos \alpha = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ m/s

$v_{0y} = 30 \sin \alpha = 30 \cdot 0{,}8 = 24$ m/s

$g = -9{,}8$ m/s^2

Per tant, $\left.\begin{aligned} x &= 18\, t \\ y &= 1 + 24\, t - 4{,}9\, t^2 \end{aligned}\right\}$

***a*) Calculeu l'alçària de l'arbre.**

Si $x = 80$ m $\rightarrow 80 = 18\, t \rightarrow t = \dfrac{80}{18} = 4{,}44$ s

$$y = 1 + 24 \cdot 4{,}44 - 4{,}9 \cdot 4{,}44^2 = 10{,}88\ \text{m}$$

***b*) Calculeu la velocitat de la pedra quan toca la poma.**

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} - g\, t \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} v_x &= 18 \\ v_y &= 24 - 9{,}8\, t \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 18\ \text{m/s} \\ v_y &= 24 - 9{,}8 \cdot 4{,}44 = -19{,}56\ \text{m/s} \end{aligned}\right\}$$

En mòdul:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{18^2 + (-19{,}56)^2} = 26{,}58\ \text{m/s}$$

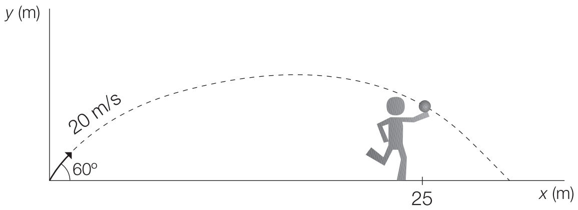
Direcció:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-19{,}56}{18} = -1{,}09 \rightarrow \alpha = 312{,}62°$$

c) **Indiqueu si la pedra pujava o baixava en el moment de la col·lisió.**

La pedra baixava.

19. El porter d'handbol d'un equip inicia un contraatac llançant una pilota amb una velocitat de 20 m/s i una inclinació de 60° sobre un company que es troba 25 m més endavant. Si aquest jugador corre amb una velocitat constant i agafa la pilota a la mateixa altura a la qual ha estat llançada, amb quina velocitat corre aquest jugador?



$$\left.\begin{array}{l} x = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y}\, t + \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = 20 \cos 60° = 10 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 20 \sin 60° = 17{,}32 \text{ m/s} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 10\,t \\ y = 17{,}32\,t - 4{,}9\,t^2 \end{array}\right\}$$

$g = -9{,}8$ m/s^2

Si $y = 0 \rightarrow 0 = 17{,}32\,t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow t(17{,}32 - 4{,}9\,t) = 0$

$$\rightarrow t = \frac{17{,}32}{4{,}9} = 3{,}53 \text{ s}$$

$x = 10 \cdot 3{,}53 = 35{,}3$ m. Deduïm que es mou en sentit positiu, ja que 35,3 m $>$ 25 m.

L'altre jugador:

$$x = x_0 + v\,\Delta t \rightarrow v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{35{,}3 - 25}{3{,}53} = 2{,}93 \text{ m/s}$$

20. Un objecte puntual està sotmès a un moviment circular uniforme de radi 7 m i gira a 150 rpm. Calculeu-ne el període, la freqüència, l'acceleració normal i l'angle descrit en 10 s.

Coneixem la velocitat angular i el radi.

$$\omega = 150 \text{ rpm} = 150\ \frac{\text{voltes}}{\text{min}} \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 15{,}71 \text{ rad/s}$$

Si coneixem la velocitat angular, trobem el període amb l'expressió:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{15{,}71} = 0{,}4 \text{ s}$$

I la freqüencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

Amb l'expressió de l'acceleració normal trobem que:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 15{,}71^2 \cdot 7 = 1\,725{,}43 \text{ m/s}^2$$

A partir de l'equació del moviment circular uniforme, trobem l'angle descrit.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \rightarrow \varphi = 15{,}71 \cdot 10 = 157{,}1 \text{ rad}$$

21. Calculeu la velocitat angular dels punts de la roda d'un cotxe que circula a una velocitat constant de 100 km/h si el diàmetre de la roda fa 80 cm. Quantes voltes fa quan el cotxe ha recorregut 1 km?

100 km/h = 27,78 m/s

$r = 40$ cm

$s = 1000$ m

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{27{,}78}{0{,}4} = 69{,}44 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{1000}{0{,}4} = 2\,500\ \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\,\pi\ \cancel{\text{rad}}} = 397{,}89 \text{ voltes}$$

22. Un disc dels tocadiscs d'abans gira a 33 rpm i té un radi de 15 cm.

a) **Calculeu-ne la velocitat angular i lineal.**

$$33 \text{ rpm} = 33\ \frac{\text{voltes}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{1\ \cancel{\text{volta}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 3{,}46 \text{ rad/s}$$

$$v = \omega \cdot r = 3{,}46 \cdot 0{,}15 = 0{,}52 \text{ m/s}$$

b) **Calculeu-ne el període i la freqüència.**

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{3{,}46} = 1{,}82 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}82} = 0{,}55 \text{ Hz}$$

c) **Si una cançó dura 5 min, quantes voltes fa en el tocadiscos? Expresseu-ne el resultat en radiants.**

$$\varphi = \omega\, t = 3{,}46 \cdot 5 \cdot 60 = 1036{,}72 \text{ rad}$$

23. Un cotxe tarda 15 s a fer una volta a una rotonda. Calculeu la velocitat angular amb què es mou. Si s'ha desplaçat amb una velocitat mitjana de 60 km/h, quin és el perímetre de la rotonda i l'acceleració normal?

Calculem la velocitat angular amb l'expressió:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{15} = 0{,}42 \text{ rad/s}$$

Passem la velocitat lineal a unitat del SI: 60 km/h = 16,67 m/s

Per trobar el perímetre de la rotonda hem de trobar el radi de la rotonda, amb l'expressió, $v = \omega \cdot r$

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{16{,}67}{0{,}42} = 39{,}79 \text{ m}$$

El perímetre el trobem amb l'expressió:

$$s = \varphi \cdot r = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 39{,}79 = 250 \text{ m}$$

L'acceleració normal la trobem amb l'expressió:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{16{,}67^2}{39{,}79} = 7 \text{ m/s}^2$$

24. Si una bicicleta circula amb una velocitat de 12 km/h i les rodes tenen un radi de 30 cm, calculeu:

***a*) La velocitat angular de la roda.**

Primer expressem la velocitat lineal en unitats del SI:

$$v = 12 \text{ km/h} = 3{,}33 \text{ m/s}$$

La velocitat angular ve donada per:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3{,}33}{0{,}3} = 11{,}1 \text{ rad/s}$$

***b*) La distància recorreguda en 10 min.**

$$10 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{3{,}33 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1998 \text{ m}$$

***c*) El nombre de voltes que ha efectuat la roda en aquest temps.**

En aquest temps el nombre de voltes que han efectuat les rodes és:

$$10 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{11{,}11 \text{ rad}}{\text{s}} = 1061 \text{ voltes}$$

25. Quina és l'acceleració centrípeta d'un pilot del Gran Premi de Catalunya que traça una corba de 50 m de radi a una velocitat de 180 km/h?

$$180 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow a_n = \frac{50^2}{50} = 50 \text{ m/s}^2$$

26. Un ciclista s'entrena donant voltes amb la bicicleta en una pista circular de 50 m de radi a un ritme de 5 voltes cada 2 min i 37 s. Calculeu:

***a*) La velocitat angular.**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$2 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 120 \text{ s} + 37 \text{ s} = 157 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{5 \text{ voltes}}{157 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = 0{,}20 \text{ rad/s}$$

***b*) La velocitat lineal.**

$$v = \omega \cdot r = 0{,}20 \cdot 50 = 10 \text{ m/s}$$

***c*) L'acceleració centrípeta.**

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{50} = 2 \text{ m/s}^2$$

27. Un aprenent d'astronauta gira amb una velocitat angular ω i experimenta una acceleració centrípeta de 2*g*. Calculeu la velocitat angular i la freqüència de gir si el radi del dispositiu giratori és de 2 m i *g* val 9,8 m/s².

$a_n = 2\,g$

$r = 2$ m

$$a_n = \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_n}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8}{2}} = \sqrt{9{,}8} = 3{,}13 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}13}{2\pi} = 0{,}5 \text{ s}^{-1}$$

28. Quina velocitat angular s'ha de comunicar a una estació espacial de forma anular de 60 m de diàmetre per tal de crear una gravetat artificial a la perifèria igual a la gravetat a la superfície terrestre?

$r = 30$ m

$$a_n = g \rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{30}} = 0{,}57 \text{ rad/s}$$

29. Un mòbil descriu una circumferència de 20 cm de radi. Partint del repòs, es mou amb una acceleració angular constant i, quan han passat 5 s, la seva velocitat angular és de 300 rpm. Calculeu, per a aquest temps, la velocitat lineal, l'acceleració angular, l'acceleració tangencial, l'acceleració normal, l'acceleració total, l'espai recorregut i l'angle girat.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t \\ \omega &= \omega_0 + \alpha \Delta t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega &= \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} s &= \varphi r \\ v &= \omega r \\ a_t &= \alpha r \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{r} \qquad & s &= \frac{1}{2} a_t t^2 \\ a_T &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \qquad & v &= a_t t \end{aligned}\right\}$$

$$300 \text{ rpm} = 300 \cdot \frac{\text{voltes}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 31{,}42 \text{ rad/s}$$

$$v = \omega r = 31{,}42 \cdot 0{,}2 = 6{,}28 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{31{,}42}{5} = 6{,}28 \text{ rad/s}^2$$

$$a_t = \alpha r \rightarrow a_t = 6{,}28 \cdot 0{,}2 = 1{,}26 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{6{,}28^2}{0{,}2^2} = 197{,}19 \text{ m/s}^2$$

$$a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{197{,}19^2 + 1{,}26^2} = 197{,}20 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2 \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot 1{,}26 \cdot 5^2 = 15{,}75 \text{ m}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \cdot 6{,}28 \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ rad}$$

30. La velocitat angular d'una roda disminueix uniformement de 1 000 a 750 voltes per minut en 10 s. Calculeu per aquest temps.

***a*) L'acceleració angular.**

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t} = \frac{750 - 1000}{10} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = $$
$$= -2{,}62 \text{ rad/s}^2$$

***b*) El nombre de voltes que fa.**

Calculem el nombre de voltes a partir de l'angle girat:

$$\text{nre. voltes} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\left(\varphi_0 + \omega_0\, t + \dfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2\right)}{2\pi} =$$
$$= 0 + 1000 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{10}{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}62) \cdot \frac{10^2}{2\pi} =$$
$$= 145{,}8 \text{ voltes}$$

31. Una partícula descriu una circumferència de 10 cm de radi. Si parteix del repòs i es mou amb una acceleració angular de 0,2 rad/s², calculeu, al cap de 20 s:

***a*) L'acceleració normal.**

$$\omega = \alpha\, t = 0{,}2 \cdot 20 = 4 \text{ rad/s}$$
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2\, r \rightarrow a_n = 4^2 \cdot 0{,}1 = 16 \text{ m/s}^2$$

***b*) L'acceleració tangencial.**

$$a_t = \alpha\, r = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02 \text{ m/s}^2$$

***c*) L'acceleració total.**

$$a_T = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}02^2} = 1{,}60 \text{ m/s}^2$$

***d*) La longitud d'arc recorreguda.**

$$s = \frac{1}{2}\, a_t\, t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 \cdot 20^2 = 4 \text{ m}$$

32. Un automòbil circula a 80 km/h, frena i s'atura en 10 s. Calculeu:

$$80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22{,}22 \text{ m/s}$$
$$v = 0;\ t = 10 \text{ s};\ r = 25 \text{ cm} = 0{,}25 \text{ m}$$

***a*) Les voltes que han donat les rodes si tenen un diàmetre de 50 cm.**

$$a_t = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 22{,}22}{10} = -2{,}22 \text{ m/s}^2$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}\, a_t\, t^2 \rightarrow s = 22{,}22 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}22) \cdot 10^2 =$$
$$= 111{,}2 \text{ m}$$
$$s = \varphi\, r \rightarrow \varphi = \frac{s}{r} = \frac{111{,}2}{0{,}25} = 444{,}8 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} =$$
$$= 70{,}79 \text{ voltes}$$

***b*) L'acceleració angular de les rodes.**

$$a_t = \alpha\, r \rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{-2{,}22}{0{,}25} = -8{,}88 \text{ rad/s}^2$$

33. Un mòbil descriu una corba amb acceleració tangencial constant de 2 m/s². Si el radi de la corba és de 40 m i la velocitat del mòbil és de 80 km/h, a quina acceleració total està sotmès?

$$80 \text{ km/h} = 22{,}22 \text{ m/s}$$
$$a_t = 2 \text{ m/s}^2$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{22{,}22^2}{40} = 12{,}34 \text{ m/s}^2$$
$$a_T = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{12{,}34^2 + 2^2} = 12{,}51 \text{ m/s}^2$$

34. Una roda gira a 60 rpm i en 5 s té una velocitat angular de 40 rad/s. Calculeu quantes voltes ha donat si suposem que l'acceleració angular és constant.

$$60 \text{ rpm} = 60 \frac{\text{voltes}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 6{,}28 \text{ rad}$$
$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{40 - 6{,}28}{5} = 6{,}74 \text{ rad/s}^2$$
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2 = 6{,}28 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6{,}74 \cdot 5^2 =$$
$$= 115{,}65 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 18{,}41 \text{ voltes}$$

35. [Curs 98-99] Una centrifugadora de 12 cm de radi que està inicialment en repòs accelera uniformement durant 20 s. En aquest interval de temps, α = 100 π rad/s². Després manté constant la velocitat adquirida.

PAU

***a*) Amb quina velocitat gira la centrifugadora quan fa 20 s que funciona? Expresseu el resultat en rpm.**

$$\omega = \alpha\, t \rightarrow \omega = 100\pi \cdot 20 =$$
$$= 2000 \frac{\text{rad}}{s} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 60\,000 \text{ rpm}$$

***b*) Quantes voltes ha de fer la centrifugadora després de funcionar durant 20 s? I després de funcionar 50 s?**

$$\theta = \frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta t^2 = \frac{1}{2}\, 100\pi \cdot 20^2 = 20\,000\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} =$$
$$= 10\,000 \text{ voltes}$$
$$\theta = \theta_o + \omega\,\Delta t \rightarrow \theta = 20\,000\pi + 2\,000\pi\,(50 - 20) =$$
$$= 80\,000\pi \text{ rad} \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 40\,000 \text{ voltes}$$

***c*) Calculeu les acceleracions tangencial i normal que com a màxim tenen els objectes a l'interior de la centrifugadora quan aquesta fa 1 min que gira.**

$a_t = \alpha \cdot r \rightarrow a_t = 0$, ja que 1 min MCU

$$a_n = \omega^2 \cdot r = (2\,000\pi)^2 \cdot 0{,}12 = 4\,737\,410{,}11 \text{ m/s}^2$$

36. Una partícula que parteix del repòs descriu un moviment circular uniformement accelerat. Calculeu l'angle que ha girat en el moment en què el mòdul de l'acceleració tangencial és el doble que el mòdul de l'acceleració normal.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \dfrac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \\ \omega = \alpha\,t\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}a_t = \alpha\,r \\ a_n = \omega^2 r\end{array}\right\}$$

$$a_t = 2\,a_n$$

$$a_t = 2\,\omega^2 r = \alpha\,r \rightarrow \alpha = 2\,\omega^2$$

$$\omega = \alpha\,t \rightarrow \omega = 2\,\omega^2 t \rightarrow 1 = 2\,\omega\,t \rightarrow \omega\,t = \frac{1}{2}$$

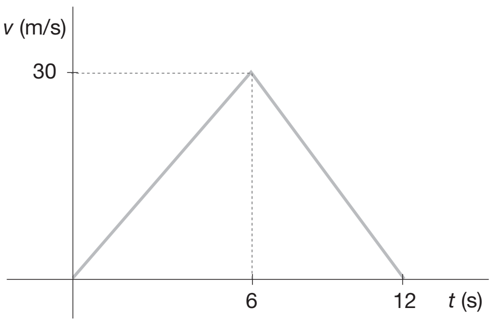
$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\,\omega^2\,t^2 \rightarrow \varphi = \omega^2\,t^2$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \varphi = 0{,}25 \text{ rad}$$

Avaluació del bloc 1

Q1. [Curs 01-02] La figura representa el gràfic velocitat-temps per a un cos que es mou sobre una recta i que surt del repòs. Raoneu si l'espai recorregut pel mòbil en l'interval de temps en què augmenta la velocitat és més gran, més petit o igual que l'espai recorregut durant la frenada.

PAU

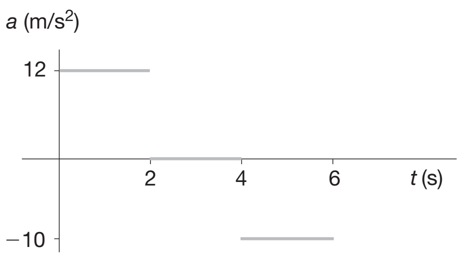


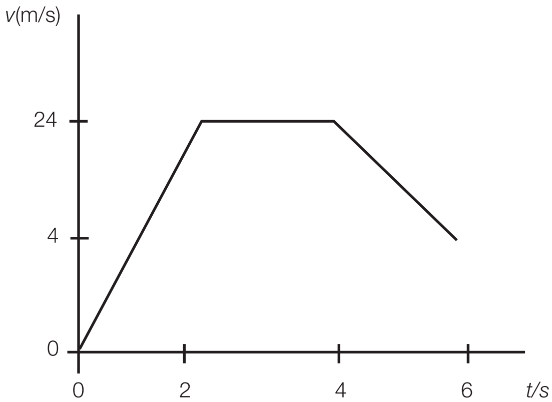
Els espais són iguals, ja que el desplaçament és igual a l'àrea sota la gràfica *v-t*. També es pot fer calculant:

$$\Delta x_1 = \frac{a\,t^2}{2} = 90 \text{ m};\ \Delta x_2 = v_0 t - \frac{a\,t^2}{2} = 90 \text{ m}$$

Q2. [Curs 00-01] Una partícula surt del repòs i es mou sobre una recta. Al gràfic es representa l'acceleració de la partícula durant els 6 primers segons. Representeu el gràfic *v* (*t*) del moviment.

PAU





Q3. Un automòbil que circula a 80 km/h avança una motocicleta que circula a 60 km/h. En un instant donat, es llança un objecte des de l'automòbil en la direcció perpendicular a la del moviment de l'automòbil i a una velocitat de 20 km/h respecte d'ell. Calculeu el valor de la velocitat de l'objecte en l'instant del llançament i descriviu la trajectòria que seguirà prenent els sistemes de referència següents:

***a*) L'observador és dins de l'automòbil.**

Un observador des de dins de l'automòbil observarà que l'objecte segueix la trajectòria corresponent a la d'un llançament horitzontal amb velocitat inicial de 20 km/h. La trajectòria és una paràbola en un pla perpendicular en tot moment al cotxe.

***b*) L'observador és a la motocicleta.**

L'observador de la motocicleta veurà que l'objecte segueix la trajectòria d'un llançament horitzontal amb velocitat inicial igual a:

$$v = \sqrt{(80 - 60)^2 + 20^2} = 28{,}3 \text{ km/h}$$

La trajectòria és una paràbola en un pla que forma un angle de 45° amb la direcció del cotxe i de la moto, ja que els components de la velocitat perpendiculars entre si i a la direcció *Y* tenen el mateix valor (20).

***c*) L'observador és en repòs a terra.**

L'observador en repòs al terra veurà que l'objecte segueix la trajectòria d'un llançament horitzontal amb velocitat inicial igual a:

$$v = \sqrt{80^2 + 20^2} = 82{,}5 \text{ km/h}$$

La trajectòria és una paràbola en un pla que forma un angle φ amb la direcció del cotxe donat per:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{20}{80} = 14°$$

Q4. Un ventilador de 30 cm de diàmetre està en funcionament i durant un cert interval de temps podem considerar que es mou descrivint un moviment circular uniforme seguint l'equació del moviment següent $\varphi = \pi\,t$. Calculeu:

***a*) La velocitat lineal i l'angular del ventilador.**

L'equació del moviment circular uniforme és:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\,(t - t_0)$$

Si comparem amb l'expressió donada a l'enunciat, resulta que la velocitat angular val:

$$\omega = \pi = 3{,}14 \text{ rad/s}$$

Així, la velocitat lineal ve donada per:

$$v = \omega r = 3{,}14 \cdot \frac{d}{2} = 3{,}14 \cdot \frac{0{,}3}{2} = 0{,}47 \text{ m/s}$$

***b*) Les voltes i l'arc recorregut que ha fet el ventilador si ha funcionat descrivint un moviment circular uniforme durant 1 h.**

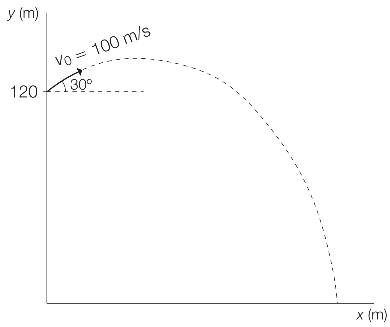
Busquem el nombre de voltes i la longitud de l'arc recorregut durant un interval de temps d'una hora:

$$1 \text{ h}\,\frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{3{,}14 \text{ rad}}{\text{s}} = 1\,800 \text{ voltes}$$

$$1\,800 \text{ voltes}\,\frac{2\pi r \text{m}}{1 \text{ volta}} = 1\,800 \text{ voltes}\,\frac{2\pi\,(0{,}3/2) \text{ m}}{1 \text{ volta}} =$$

$$= 1\,696{,}46 \text{ m} = 1\,696 \text{ m}$$

P1. Es llança un cos de 5 kg des d'un penya-segat que està a una altura de 120 m sobre l'aigua. La velocitat inicial del cos té un mòdul de 100 m/s i forma un angle de 30° amb l'horitzontal. Si la fricció amb l'aire és negligible, calculeu:



$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, g t^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} v_{0x} &= 100 \cos 30° = 86{,}60 \text{ m/s} \\ v_{0y} &= 100 \sin 30° = 50 \text{ m/s} \\ g &= -9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} - g t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 86{,}60\, t \\ y &= 120 + 50 t - 4{,}9 t^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} v_x &= 86{,}60 \\ v_y &= 50 - 9{,}8 t \end{aligned}\right\}$$

***a*) El component horitzontal de la velocitat en el moment de l'impacte amb l'aigua.**

$$v_x = 86{,}60 \text{ m/s}$$

***b*) El temps que el cos triga a arribar a una altura de 80 m sobre l'aigua.**

Quan $y = 80$ m $\rightarrow 80 = 120 + 50 t - 4{,}9 t^2 \rightarrow$

$\rightarrow 4{,}9 t^2 - 50 t - 120 - 80 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4{,}9 t^2 - 50 t - 40 = 0 \rightarrow$

$$t = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 40}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{50 \pm \sqrt{3\,284}}{9{,}8} = 10{,}95 \text{ s}$$

P2. [Curs 02-03] Un coet és llançat verticalment cap amunt, des del repòs, i puja amb una acceleració constant de 14,7 m/s² durant 8 s. En aquest moment se li acaba el combustible, i el coet continua el seu moviment de manera que l'única força a què està sotmès és la gravetat.

PAU

***a*) Calculeu l'altura màxima a què arriba el coet.**

Primer tram:

$$y = \frac{1}{2}\, a t^2 = 470{,}4 \text{ m}, \quad v = a t = 117{,}6 \text{ m/s}$$

Segon tram:

$$\left.\begin{aligned} y' &= y + v t' - \frac{1}{2}\, g t'^2 \\ 0 &= v' = v - g t' \end{aligned}\right\} y' = 1\,175{,}3 \text{ m}, \; t' = 12 \text{ s}$$

***b*) Calculeu el temps transcorregut des de la sortida fins a la tornada del coet a la superfície de la terra.**

Pujada: $t + t' = 20$ s

Baixada: $0 = 1\,175{,}3 + \cancel{0} \cdot t'' - \dfrac{1}{2}\, 9{,}81 t''^2$

$t'' = 15{,}48$ s

$$t_T = 20 + 15{,}48 = 35{,}48 \text{ s}$$

***c*) Feu un gràfic velocitat-temps d'aquest moviment. Considereu $g = 9{,}81$ m/s².**