Unitat 4. Conservació de la quantitat de moviment

Activitats

1. Dos cossos tenen la mateixa quantitat de moviment, però la velocitat de l'un és el triple de la de l'altre. Quina relació tenen les seves masses?

Com que les quantitats de moviment són iguals, i les seves velocitats una triple de l'altra, podem establir que: $p = m_1 v$ (primer cos); $p = m_2 (3v)$ (segon cos); dividint ambues expressions:

$$\frac{p}{p} = \frac{m_1 v}{m_2\, 3v} \rightarrow 1 = \frac{m_1}{3m_2} \rightarrow m_1 = 3m_2$$

2. Calculeu el mòdul de la quantitat de moviment dels cossos següents:

***a*) Un automòbil de 275 kg que es mou amb una velocitat de 65 km/h.**

$$m = 275 \text{ kg}$$

$$v = 65 \text{ km/h} = 18{,}06 \text{ m/s}$$

$$p = mv = 275 \cdot 18{,}06 = 4\,965{,}28 \text{ kg·m/s}$$

***b*) Una persona de 72 kg que camina amb una velocitat de 5,5 km/h.**

$$m = 72 \text{ kg}$$

$$v = 5{,}5 \text{ km/h} = 1{,}53 \text{ m/s}$$

$$p = mv = 72 \cdot 1{,}53 = 110 \text{ kg·m/s}$$

***c*) Un avió de reacció de 45 t, que es mou amb una velocitat de 950 km/h.**

$$m = 45 \text{ t} = 4{,}5 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

$$v = 950 \text{ km/h} = 263{,}89 \text{ m/s}$$

$$p = mv = 4{,}5 \cdot 10^4 \cdot 263{,}89 = 1{,}19 \cdot 10^7 \text{ kg·m/s}$$

3. Un cos de 3 kg de massa es mou en línia recta amb una velocitat constant de 3 m/s. En un moment determinat, se li aplica una força constant de 12 N durant un temps de 5 s. Determineu la quantitat de moviment i la velocitat finals.

Calculem la variació de la quantitat de moviment a partir de la força aplicada i de l'interval de temps durant el qual s'aplica aquesta força constant. En mòdul:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t = 12 \cdot 5 = 60 \text{ N·s}$$

El mòdul de la quantitat de moviment inicial del cos és:

$$p_0 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kg·m/s}$$

Per tant, la quantitat de moviment i la velocitat finals valen:

$$p_f = p_0 + \Delta p = 9 + 60 = 69 \text{ kg·m/s}$$

$$v_f = \frac{p_f}{m} = \frac{69}{3} = 23 \text{ m/s}$$

Calculem l'impuls lineal, i apliquem el teorema de l'impuls lineal:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \text{ kg} \\ v_0 = 3 \text{ m/s} \\ F = 12 \text{ N} \\ \Delta t = 5 \text{ s} \end{array}\right\}$$

$$I = F\,\Delta t = 12 \cdot 5 = 60 \text{ N·s}$$

$$\Delta p = I \rightarrow p - p_0 = I \rightarrow p = I + p_0 = I + m\,v_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow p = 60 + 3 \cdot 3 = 69 \text{ m/s}$$

$$p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{69}{3} = 23 \text{ m/s}$$

4. Estimeu la força mitjana efectuada quan una escopeta d'aire comprimit, que ha actuat durant un interval de temps de 0,1 s, expulsa un petit projectil de 12 g de massa amb una velocitat de 15 m/s.

Calculem primer la variació del mòdul de la quantitat de moviment sabent que la quantitat de moviment inicial és zero perquè la bala parteix del repòs:

$$\Delta p = p_f - p_0 = 0{,}012 \cdot 15 - 0 = 0{,}18 \text{ kg·m/s}$$

Amb aquest valor i el de l'interval de temps durant el qual s'aplica la força de valor constant trobem el valor d'aquesta força. En mòdul:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0{,}18}{0{,}1} = 1{,}8 \text{ N}$$

Apliquem el teorema de l'impuls lineal, i aïllem F:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t = 0{,}1 \text{ s} \\ m = 12 \text{ g} = 0{,}012 \text{ kg} \\ v = 15 \text{ m/s} \\ v_0 = 0 \end{array}\right\}$$

$$I = F\Delta t = \Delta p \rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv - mv_0}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow F = \frac{0{,}012 \cdot 15 - 0}{0{,}1} = 1{,}8 \text{ N}$$

5. El batedor d'un equip de beisbol veu venir la pilota, de massa 145 g, a una velocitat de 28 m/s, i l'impulsa en sentit contrari a una velocitat de 42 m/s. La força mitjana que n'ha actuat ha estat de 140 N. Trieu les respostes correctes.

$$\Delta p = m(v_f - v_0) = 0{,}145 \cdot \big(42 - (-28)\big) = 10{,}15 \text{ kg·m/s} = I$$

Per tant, les respostes correctes són:

A) L'impuls que ha actuat sobre la pilota és de:

***a*) 6,09 N·s *b*) 10,15 N·s *c*) 2,03 N·s**

La *b*) $I = 10{,}15$ N·s

B) La variació de la quantitat de moviment experimentat per la pilota és de:

***a*) 10,15 kg·m/s**

b) **2,03 kg·m/s**

c) **6,09 kg·m/s**

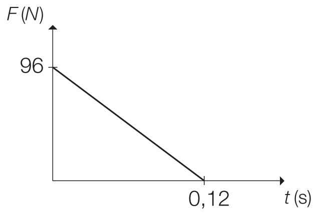
La *a*) $\Delta p = 10{,}15$ kg·m/s

C) El temps que ha durat el cop ha estat de:

a) **43,5 ms** *b*) **14,5 ms** **c) 72,5 ms**

La *c*) $\Delta t = \dfrac{\Delta p}{F} = \dfrac{10{,}15}{140} = 72{,}5$ ms

6. El mecanisme d'un joc de tir al plat fa una força sobre els plats donada per la funció $F(t) = 96 - 800\,t$, expressada en N, que actua entre l'instant $t_0 = 0$ i l'instant en què $\vec{F}$ s'anul·la. Si la massa dels plats val 90 g, amb quina velocitat surten disparats, si inicialment estan en repòs?



En primer lloc, representem la funció $F(t)$:

- $t_0 = 0 \rightarrow F(0) = 96 - 800 \cdot 0 = 96$ N
- $F = 0 \rightarrow 0 = 96 - 800\,t_1 \rightarrow t_1 = \dfrac{96}{800} = 0{,}12$ s

A continuació, calculem l'impuls a partir del gràfic *F-t*; si tenim en compte que l'àrea tancada per aquest gràfic és l'àrea d'un triangle de base 0,12 i altura 96, trobem que:

$$I = \text{àrea} = \frac{0{,}12 \cdot 96}{2} = 5{,}76 \text{ N·s}$$

Finalment, apliquem el teorema de l'impuls i aïllem v tenint en compte que $v_0 = 0$, $m = 90$ g $= 0{,}09$ kg:

$$I = \Delta p \rightarrow mv - mv_0^0 = I$$

$$\rightarrow v = \frac{I}{m} = \frac{5{,}76}{0{,}09} = 64 \text{ m/s}$$

7. Volem estimar la força mitjana que han d'efectuar els cinturons de seguretat sobre els ocupants d'un automòbil en un accident de circulació. Un automòbil, que portava una velocitat de 72 km/h, ha xocat contra un mur molt resistent, i, de resultes de l'accident, en 0,25 s ha rebotat amb una velocitat de 18 km/h. Calculeu la força mitjana que efectua el cinturó de seguretat sobre un ocupant de 70 kg de massa i l'acceleració que ha sofert aquesta persona.

$v = 72$ km/h $= 20$ m/s

$v_0 = -18$ km/h $= -5$ m/s

$m = 70$ kg

$\Delta t = 0{,}25$ s

Primer calcularem la variació de la quantitat de moviment:

$$\Delta p = mv - mv_0 = m(v - v_0) = 70 \cdot \big(20 - (-5)\big) =$$
$$= 1\,750 \text{ kg·m/s}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1\,750}{0{,}25} = 7\,000 \text{ N}$$

El cinturó ha efectuat una força mitjana de 7 000 N.

Utilitzem la segona llei de Newton per calcular l'acceleració efectuada sobre l'ocupant:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{7\,000}{70} = 100 \text{ m/s}^2$$

L'ocupant del vehicle pateix una acceleració de 100 m/s^2.

8. Tenint en compte el principi de conservació de la quantitat de moviment, com s'explica el moviment d'un avió de reacció?

El combustible d'un avió de reacció es crema en una cambra, que només té un petit orifici perquè els gasos de combustió puguin sortir cap a l'exterior; per tant, aquests gasos són expulsats de l'avió a una gran velocitat, i, en contrapartida, l'avió és impulsat en sentit contrari per tal de que es verifiqui el principi de conservació de la quantitat de moviment.

9. [Curs 2001-02] Dos patinadors, *A* i *B*, amb la mateixa massa, $m = 40$ kg, estan en repòs sobre una pista horitzontal sense fregament apreciable. El patinador *A* llança a una velocitat horitzontal $v = 2$ m/s una bola de massa $m = 6$ kg que recull el patinador *B*. Calculeu la velocitat final de cada patinador.

PAU

Donat que el fregament és negligible, podem aplicar el principi de conservació de la quantitat de moviment a les diferents situacions:

1) Al sistema format pel patinador *A* i la bola abans i després del llançament de la bola:

$$m_A\, v_A + m_{bola}\, v_{bola} = m_A\, v'_A + m_{bola}\, v'_{bola} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 = m_A\, v'_A + m_{bola}\, v'_{bola} \rightarrow$$
$$\rightarrow v'_A = \frac{-m_{bola}\, v'_{bola}}{m_A + m_{bola}} = \frac{6 \cdot 2}{40 + 6} = 0{,}26 \text{ m/s}$$

Aquesta és la velocitat del patinador *A* després del llançament.

2) Al sistema format pel patinador *B* i la pilota abans i després de recollir la bola, tenint present que el patinador *B* i la bola adquireixen la mateixa velocitat final v'_B:

$$m_B\, v_B + m_{bola}\, v_{bola} = (m_B + m_{bola})\, v'_B \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 + m_{bola}\, v_{bola} = (m_B + m_{bola})\, v'_B \rightarrow$$
$$\rightarrow v'_B = \frac{m_{bola}\, v_{bola}}{m_B + m_{bola}} = \frac{6 \cdot 2}{40 + 6} = 0{,}26 \text{ m/s}$$

Aquesta és la velocitat del patinador *B* i la bola després del llançament.

10. Una granada en repòs explota i es divideix en dos fragments, que surten disparats en la mateixa direcció. Si la velocitat amb què surt el primer fragment és de 115 m/s, calculeu la velocitat, en mòdul, del segon fragment, suposant que la massa d'aquest és la tercera part de la massa del primer. Després feu un diagrama que representi les situacions inicial i final.

Representa la situació abans i després de l'explosió:

$$m_2 = \frac{m_1}{3}$$

Apliquem el principi de conservació de la quantitat de moviment, tenint en compte que $v = 0$, $m_2 = \dfrac{m_1}{3}$, i aïllem v_2'.

$$m\,\cancel{v}^0 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \;\rightarrow\; m_1 \cdot (-115) + \frac{m_1}{3}\, v_2' = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cancel{m_1} v_2' = -3\, \cancel{m_1}\, (-115) \;\rightarrow\; v_2' = 345 \text{ m/s}$$

11. [Curs 1998-99] Suposeu el cas ideal d'una pilota de tennis de 80 g de massa que xoca contra una paret vertical i tant abans com després de xocar-hi va a 30 m/s i es mou en la mateixa direcció horitzontal. S'ha conservat la quantitat de moviment de la pilota durant el xoc? Quant val el mòdul de l'impuls realitzat per la paret sobre la pilota?

PAU

La quantitat de moviment de la pilota no s'ha conservat perquè la paret ha efectuat una força sobre la pilota. Tot i que el mòdul de la quantitat de moviment de la pilota és el mateix abans i després del xoc, com que hi ha un canvi en la direcció del moviment, també hi ha un canvi en la quantitat de moviment.

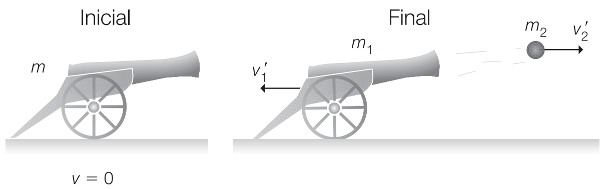
El mòdul de l'impuls realitzat per la paret sobre la pilota és igual al mòdul de la variació de la quantitat de moviment:

$$|\vec{I}| = |\Delta \vec{p}|$$

I, com que estem en un moviment unidimensional podem prescindir del caràcter vectorial. Per tant:

$$|I| = |\Delta p| = m\,|v_f - v_0| = 0{,}08 \cdot |-30 - 30| = 4{,}8 \text{ N·s}$$

12. Calculeu en mòdul la velocitat de retrocés d'un canó que té una massa de 275 kg, sabent que dispara un projectil de massa 1,4 kg que surt amb una velocitat de 78 m/s.



$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 275 \text{ kg},\; v_1' = ? \\ m_2 = 1{,}4 \text{ kg},\; v_2' = 78 \text{ m/s} \end{array}\right\}$$

Apliquem el principi de conservació de la quantitat de moviment i aïllem v_1':

$$m\,\cancel{v} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \;\rightarrow\; 275\, v_1' + 1{,}4 \cdot 78 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v_1' = -0{,}4 \text{ m/s}$$

En mòdul: $v_1' = 0{,}4$ m/s

13. [Curs 2002-03] Un projectil de 20 g va a una velocitat horitzontal de 300 m/s i s'encasta en un bloc d'1,5 kg que està inicialment en repòs. Calculeu la velocitat del conjunt just després de l'impacte.

PAU

$m = 20$ g $= 0{,}02$ kg

$M = 1{,}5$ kg

$v_0 = 300$ m/s

Si considerem el sistema format per el projectil i el bloc al qual s'encasta veiem que no actuen forces exteriors, per tant podem aplicar la conservació de la quantitat de moviment:

$$\Delta \vec{p} = ctnt \;\rightarrow\; m v_0 + M \cdot 0 = (m + M) \cdot v \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v = \frac{m \cdot v_0}{m + M} = \frac{0{,}02 \cdot 300}{0{,}02 + 1{,}5} = 3{,}95 \text{ m/s}$$

Activitats finals

Qüestions

1. Raoneu si és certa l'afirmació següent: «El vector quantitat de moviment és sempre tangent a la trajectòria d'un cos en moviment».

El vector quantitat de moviment sempre té la direcció del vector velocitat ja que és igual al producte escalar d'aquest vector per la massa, que sempre és una quantitat positiva. Com que el vector velocitat instantània és tangent en tot punt a la trajectòria del mòbil, el vector quantitat de moviment també ho és. Per tant, l'afirmació anterior és certa.

2. Comenteu com són l'impuls mecànic i la variació de la quantitat de moviment en els casos següents:

***a)* Una força que actua durant un interval de temps molt curt.**

L'impuls tindrà un valor petit, ja que l'interval de temps és molt curt.

***b)* Una força molt petita que actua durant un interval de temps molt llarg.**

L'impuls pot tenir un valor apreciable sempre i quan el valor de l'interval de temps sigui prou gran per a compensar el valor de la força. Amb els valors típics d'intervals de temps, però, l'impuls associat a una força molt petita sol ser també petit.

***c)* Una força molt gran que actua durant un interval de temps molt curt.**

En aquest cas l'impuls pot tenir un valor apreciable, ja que si bé una magnitud és molt petita, l'altra té un valor molt gran, donant un valor de $\vec{I}$ apreciable; lògicament, aquest valor de $\vec{I}$ dependrà dels valors de $\vec{F}$ i de Δt.

3. Comproveu que les unitats en el SI de l'impuls i de la quantitat de moviment són equivalents.

Les unitats en el SI de l'impuls són les del producte d'una força per un temps, és a dir, el Newton per segon. Tenint en compte que el Newton és igual al quilogram pel metre dividit pel segon al quadrat, obtenim:

$$\text{N}\cdot\text{s} = \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\text{s} = \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

És a dir, obtenim les mateixes unitats en el SI que la quantitat de moviment, ja que aquest és el producte d'una massa per una velocitat.

4. Quan disparem amb una escopeta, sentim una força que ens impulsa cap enrere. Interpreteu aquest fenomen tenint en compte el principi de conservació de la quantitat de moviment.

Suposem que el projectil surt disparat en sentit positiu de l'eix de les *X*; com que la quantitat de moviment inicial és nul·la (tant el projectil com l'escopeta estan en repòs), i la quantitat de moviment del projectil després del tret és positiva, la quantitat de moviment de l'escopeta ha de ser igual a la del projectil, però negativa: l'escopeta surt disparada cap enrere, i l'hem d'agafar ben fort per aguantar-la.

5. Amb argila tova construïm una bola de la mateixa massa que una altra bola de goma. Quan les deixem caure des de la mateixa altura, i després d'impactar amb el terra, la bola d'argila es queda enganxada al terra, mentre que la bola de goma rebota i assoleix gairebé la mateixa altura. Per a cada una de les boles, i si considerem els instants de temps just abans i just després del xoc de les boles amb el terra, s'ha experimentat la mateixa variació de la quantitat de moviment?

S'ha conservat la quantitat de moviment? Quin ha estat l'impuls mecànic que el terra ha efectuat sobre cada una de les boles?

Cada bola experimenta una variació de la quantitat de moviment diferent ja que tenen la mateixa massa i la seva velocitat varia de forma diferent. Si p_0 és la quantitat de moviment inicial de cada una de les boles (treballem en una dimensió i amb el sentit positiu d'*Y* habitual), la bola d'argila experimenta $\Delta p = p_0$ i la de goma, $\Delta p = 2p_0$. És a dir, la quantitat de moviment no s'ha conservat i l'impuls del terra sobre la bola d'argila val: $I = p_0$ i sobre la de goma, $I = 2p_0$.

6. Un home està dret sobre una barca a prop del moll. En un moment donat, salta a terra. Per què creus que quan l'home salta, la barca es mou en sentit contrari?

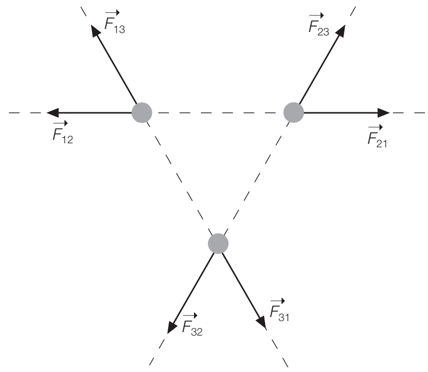
Aquesta qüestió es pot resoldre per dos procediments diferents:

1r. Quan l'home vol saltar a terra, cal que la barca l'empenti a ell endavant; per tant, ell ha d'empentar la barca cap enrere, d'acord amb el principi d'acció-reacció. Com que la barca es pot moure dins l'aigua, en ser empentada per l'home es mou en sentit contrari a ell.

2n. Considerem el sistema format per l'home i la barca. Inicialment la seva quantitat de moviment total és nul. En un moment donat, l'home salta i, per tant, té una certa quantitat de moviment en una direcció. En aquest instant, la força neta externa sobre el sistema és nul·la (aquesta suposició és prou bona considerant negligible el fregament entre l'aigua i la barca). Per tant, s'ha de conservar la quantitat de moviment del sistema i, en conseqüència, la barca adquireix un valor de quantitat de moviment oposat al de l'home. És a dir, la seva velocitat és oposada a la de l'home i per això es mou en sentit contrari.

7. Demostreu el principi de conservació de la quantitat de moviment en el cas d'un sistema format per 3 partícules.

Suposem que les partícules interaccionen entre sí segons forces que tendeixen a separar-les; les partícules s'efectuen forces dos a dos, d'acord amb el principi d'acció-reacció. Per tant, totes les forces que tenim són:



- Forces sobre la partícula 1 (degudes a les partícules 2 i 3): $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$.
- Forces sobre la partícula 2 (degudes a les partícules 1 i 3): $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{23}$.
- Forces sobre la partícula 3 (degudes a les partícules 1 i 2): $\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{32}$.

Si tenim en compte la tercera llei de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21};\ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31};\ \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$$

Per tant, la força total del sistema és nul·la:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} =$$
$$= \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} - \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} - \vec{F}_{23} = 0$$

Reagrupant els termes de l'anterior expressió per a cada partícula, i suposant que aquestes forces són constants i que actuen durant un interval de temps Δt:

$$\sum \vec{F} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) =$$
$$= \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_3}{\Delta t} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_3 = 0 \rightarrow \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) =$$
$$= 0 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \text{constant}$$

8. Dues boles, una d'elles amb una massa 5 vegades més gran que l'altra, van a la mateixa velocitat en mòdul i experimenten un xoc frontal, a conseqüència del qual queden unides. El mòdul de la velocitat final és, respecte del de la velocitat inicial:

a) **La meitat.**

b) **Dues terceres parts.**

c) **La quarta part.**

d) **Continua sent el mateix.**

Per conservació de la quantitat de moviment i tenint en compte que $m_1 = 5\ m_2$ resulta:

$$m_1 \cdot v + m_2 \cdot (-v) = (m_1 + m_2) \cdot v' \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4\ m_2\ v = 6\ m_2\ v_2 \ \rightarrow\ \ v' = \frac{2}{3}\ v$$

Per tant, l'opció correcta és la *b*).

9. Un cos es mou amb una velocitat determinada i interacciona amb un segon cos que està inicialment en repòs. Quina és la relació entre les masses d'ambdós cossos si, de resultes de la interacció, la velocitat final del primer es redueix a la meitat, i la velocitat final del segon és el doble de la que portava inicialment el primer?

Considerant que en tot moment els cossos es mouen en el sentit positiu de l'eix *X*, i tenint en compte com són les velocitats entre si, tenim que:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2\ v_2{}' \rightarrow$$

$$\rightarrow\ m_1 v + m_2 \cdot 0 = m_1 \left(\frac{v}{2}\right) + m_2\ (2\,v) \rightarrow$$

$$\rightarrow\ m_1 = \frac{m_1}{2} + 2\,m_2 \rightarrow$$

$$2\,m_1 = m_1 + 4\,m_2 \ \rightarrow\ 2\,m_1 - m_1 = 4\,m_2 \ \rightarrow\ m_1 = 4\,m_2$$

Problemes

1. Un automòbil es mou amb una velocitat de 110 km/h. El conductor acciona els frens durant 1,2 s i la seva velocitat disminueix fins a 80 km/h. Si la massa total és de 435 kg, calculeu:

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 110\ \text{km/h} = 30{,}56\ \text{m/s} \\ v = 80\ \text{km/h} = 22{,}22\ \text{m/s} \\ \Delta t = 1{,}2\ \text{s} \\ m = 435\ \text{kg} \end{array}\right\}$$

a) **La variació de la quantitat de moviment.**

$p_0 = m\,v_0 = 435 \cdot 30{,}56 = 1{,}33 \cdot 10^4\ \text{N}\cdot\text{s}$

$p = m\,v = 435 \cdot 22{,}22 = 9{,}67 \cdot 10^3\ \text{N}\cdot\text{s}$

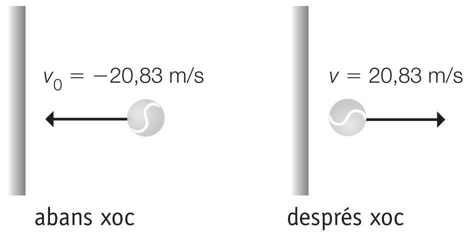
$\Delta p = p - p_0 = 9{,}67 \cdot 10^3 - 1{,}33 \cdot 10^4$

$\Delta p = -3\,630\ \text{N}\cdot\text{s}$

b) **La força mitjana amb què es frena l'automòbil, aplicant el teorema de l'impuls mecànic.**

$$I = F\Delta t = \Delta p \ \rightarrow\ F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-3\,630}{1{,}2} = -3\,025\ \text{N}$$

2. Una pilota de tennis de massa 21 g que es mou horitzontalment amb una velocitat de 75 km/h xoca contra una paret vertical i surt disparada en sentit contrari. Calculeu la força mitjana efectuada per la paret sobre la pilota, suposant que ha actuat durant un temps de 0,08 s, i que la pilota surt disparada amb la mateixa velocitat, en mòdul.



Representa la situació:

$m = 21\ \text{g} = 0{,}021\ \text{kg}$

$v_0 = 75\ \text{km/h} = 20{,}83\ \text{m/s}$

$|v| = |v_0| = 20{,}83\ \text{m/s}$

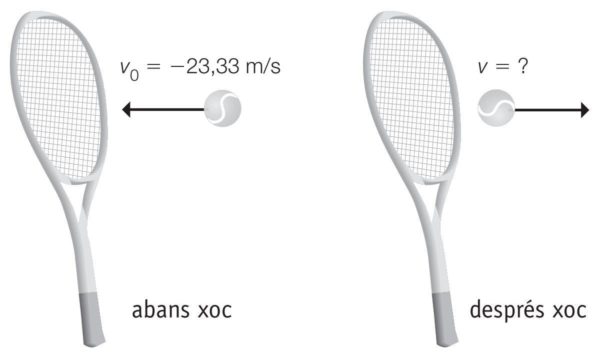
$\Delta t = 0{,}08\ \text{s}$

Apliquem el teorema de l'impuls lineal i aïllem *F*:

$$I = F\Delta t = \Delta p \ \rightarrow\ F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\ v - m\ v_0}{\Delta t} =$$

$$= \frac{0{,}021 \cdot 20{,}83 - 0{,}021 \cdot (-20{,}83)}{0{,}08} = 10{,}94\ \text{N}$$

3. En el moment en què un tennista està a punt d'impulsar la pilota, de massa 25 g, aquesta porta una velocitat de 84 km/h. Sabent que la força mitjana que aplica el jugador sobre la pilota és de 26 N, i que aquesta actua durant un interval de temps de 0,05 s, calculeu la velocitat final de la pilota, suposant que aquesta surt en la mateixa direcció, però en sentit contrari, a la velocitat inicial.



Representa la situació, suposant que la velocitat inicial és negativa:

$$\left.\begin{array}{l} m = 25\ \text{g} = 0{,}025\ \text{kg} \\ v_0 = 84\ \text{km/h} = 23{,}33\ \text{m/s} \\ F = 26\ \text{N} \\ \Delta t = 0{,}05\ \text{s} \end{array}\right\}$$

Apliquem el teorema de l'impuls lineal i aïllem v:

$$I = F\Delta t = \Delta p \rightarrow mv - mv_0 = F\Delta t \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{F\Delta t + mv_0}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{26 \cdot 0{,}05 + 0{,}025 \cdot (-23{,}33)}{0{,}025} =$$

$$= 28{,}67 \text{ m/s} = 103{,}2 \text{ km/h}$$

4. Una pilota de golf de massa 30 g que està inicialment en repòs és impulsada pel jugador i agafa una velocitat de 104 km/h. Aplicant el teorema de l'impuls mecànic, estimeu quina ha estat la força mitjana efectuada sobre la pilota, suposant que aquesta ha actuat durant un interval de temps de 0,07 s.

$$\left.\begin{aligned} m &= 30 \text{ g} = 0{,}03 \text{ kg} \\ v &= 104 \text{ km/h} = 28{,}89 \text{ m/s} \\ \Delta t &= 0{,}07 \text{ s} \\ v_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$I = F\,\Delta t = \Delta p \rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv - m\cancel{v_0}^{\,0}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{0{,}03 \cdot 28{,}89}{0{,}07} = 12{,}4 \text{ N}$$

5. Un automòbil que està sortint d'una població per una carretera recta va a una velocitat constant de 50 km/h. Quan ja n'ha sortit, el conductor, de 64 kg de massa, veu un senyal que li permet augmentar la velocitat fins a 80 km/h, i accelera durant mig minut fins a assolir aquesta velocitat. Determineu, aplicant el teorema de l'impuls:

***a*) La variació de la quantitat de moviment que ha experimentat el conductor.**

$$v_i = 50 \text{ km/h} = 13{,}89 \text{ m/s}$$

$$v_f = 80 \text{ km/h} = 22{,}22 \text{ m/s}$$

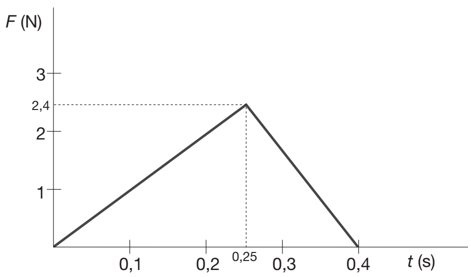
$$\Delta\vec{p} = m\left(\vec{v_f} - \vec{v_i}\right) = 64 \cdot (22{,}22 - 13{,}89) = 533 \text{ kg·m/s}$$

***b*) La força mitjana sobre el conductor en la direcció del seu moviment durant aquest interval de temps.**

$$\Delta t = 0{,}5 \text{ min} = 30 \text{ s}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{533}{30} = 17{,}8 \text{ N}$$

6. Un cos de 850 g és impulsat amb una força donada pel gràfic següent (fig. 4.11):



Calculeu l'impuls mecànic, la quantitat de moviment final i la velocitat final del cos, suposant que inicialment la seva velocitat és de 2,3 m/s.

Calculem l'impuls, calculant l'àrea del triangle definit pel gràfic F-t, tenint en compte que correspon a l'àrea d'un triangle de base 0,4 i altura 2,4:

$$I = \text{àrea} = \frac{0{,}4 \cdot 2{,}4}{2} = 0{,}48 \text{ N·s}$$

Per calcular la quantitat de moviment final, apliquem el teorema de l'impuls, amb $v_0 = 2{,}3$ m/s i $m = 850$ g $= 0{,}85$ kg.

$$I = \Delta p \rightarrow p - p_0 = I \rightarrow$$

$$\rightarrow p = I + p_0 = 0{,}48 + 0{,}85 \cdot 2{,}3 = 2{,}4 \text{ N·s}$$

Per últim, calculem la velocitat final:

$$p = mv \rightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{2{,}4}{0{,}85} = 2{,}9 \text{ m/s}$$

7. Sobre una pilota de tennis, de 35 g de massa, actua la força donada per l'expressió $F(t) = 22 - 2 \cdot 10^2\, t$, on F només adopta valors positius i $t_0 = 0$. Calculeu:

$$m = 35 \text{ g} = 0{,}035 \text{ kg};\ F(t) = 22 - 2 \cdot 10^2 t$$

***a*) El temps durant el qual ha actuat la força, i dibuixeu el gràfic de F en funció de t.**

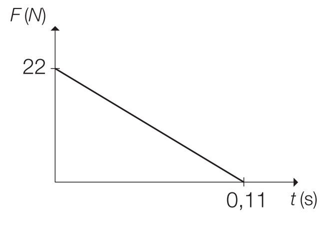
Com que F només adopta valors positius, tenim que:

$$22 - 2 \cdot 10^2 t > 0 \rightarrow 2 \cdot 10^2 t < 22 \rightarrow$$

$$\rightarrow t < \frac{22}{2 \cdot 10^2} = 0{,}11 \text{ s}$$

Per tant, F ha actuat entre $t_0 = 0$ i $t_1 = 0{,}11$ s.

El gràfic F-t és ($F(0) = 22 - 2 \cdot 10^2 \cdot 0 = 22$ N):



***b*) La velocitat final de la pilota, suposant que està inicialment en repòs.**

Calculem en primer lloc l'impuls a partir de l'àrea del triangle definit pel gràfic F-t (base: 0,11 s i altura: 22 N):

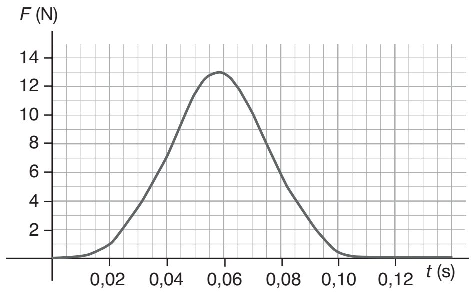
$$I = \frac{0{,}11 \cdot 22}{2} = 1{,}21 \text{ N·s}$$

Finalment, apliquem el teorema de l'impuls i aïllem v ($v_0 = 0$):

$$I = \Delta p \rightarrow mv - mv_0 = I \rightarrow v = \frac{I}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{1{,}21}{0{,}035} = 34{,}57 \text{ m/s} = 124{,}5 \text{ km/h}$$

8. En un experiment de laboratori, s'ha determinat el gràfic de la força efectuada per un bloc de fusta fix sobre un corró de 37 g de massa que xoca amb ell i que porta una velocitat inicial de 8,3 m/s, utilitzant un sensor de força i analitzant les mesures obtingudes amb un programa informàtic. Per fer-ne el tractament, el gràfic obtingut (fig. 4.12) s'ha superposat sobre una quadrícula, en la qual, en cada quadret, el costat horitzontal representa 0,005 s i el costat vertical, 1 N.



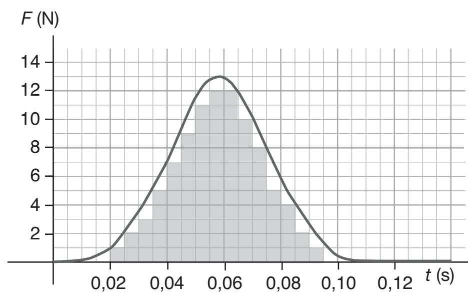
Determineu la velocitat final del corró. (Indicació: determineu l'impuls calculant, en el gràfic *F-t*, les àrees per defecte i per excés).

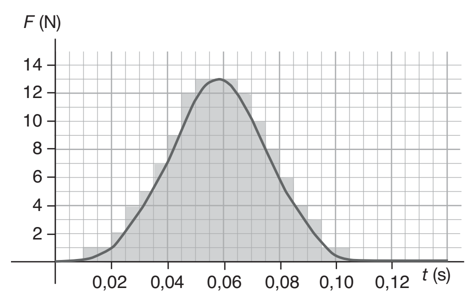
$m = 37 \text{ g} = 0{,}037 \text{ kg}$

$v_i = -8{,}3 \text{ m/s}$

$v_f = ?$

Primer calcularem l'impuls efectuat pel bloc de fusta sobre el corró calculant l'àrea del gràfic *F-t*. Com que no és una àrea regular mesurarem l'àrea per excés i per defecte amb l'ajuda de la quadrícula i tenint en compte que cada quadrícula equival a 0,005 N·s:





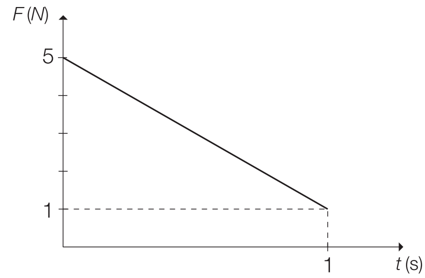
$$\left.\begin{array}{l} A_d = 92 \text{ quadrets} \\ A_e = 125 \text{ quadrets} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{A_d + A_e}{2} = \frac{92 + 125}{2} =$$

$$= 108{,}5 \text{ quadrets} \rightarrow I = 108{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}543 \text{ N·s}$$

$$I = \Delta p = m \cdot (v_f - v_i) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_f = \frac{I}{m} + v_i = \frac{0{,}543}{0{,}037} + (-8{,}3) = 6{,}36 \text{ m/s}$$

9. La força que actua sobre un cos de massa 1,8 kg ve donada per la funció $F(t) = 5 - 4t$, expressada en N. Calcula la velocitat final del cos, suposant que la força actua entre els instants $t_0 = 0$ i $t = 1$ s i que el cos es mou inicialment a una velocitat de 3,5 m/s.



Representem la funció $F(t)$ tenint en compte que la força actua entre $t_0 = 0$ i $t = 1$ s.

- $t_0 = 0 \rightarrow F(0) = 5 - 4t = 5 - 4 \cdot 0 = 5 \text{ N}$
- $t = 1 \text{ s} \rightarrow F(1) = 5 - 4 \cdot 1 = 5 - 4 = 1 \text{ N}$

Calculem l'impuls a partir del gràfic *F-t*. En aquest cas, l'àrea tancada per aquest gràfic es compon d'un triangle de base 1 i altura 5 − 1 = 4, i un rectangle de base 1 i altura 1:

$$I = \text{àrea} = \frac{1 \cdot 4}{2} + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3 \text{ N·s}$$

Apliquem el teorema de l'impuls i aïllem v tenint en compte que $m = 1{,}8$ kg i $v_0 = 3{,}5$ m/s:

$$I = \Delta p \rightarrow m v - m v_0 = I \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{I + m v_0}{m} = \frac{I}{m} + v_0 =$$

$$= \frac{3}{1{,}8} + 3{,}5 = 5{,}2 \text{ m/s}$$

10. [Curs 1999-2000] Un cos es mou amb una velocitat de 5 m/s. Si de cop es trenca en dues parts iguals de manera que una d'elles es mou amb una velocitat de 2 m/s en la mateixa direcció i sentit que el cos original, quina serà la velocitat (en mòdul, direcció i sentit) de l'altra part?

PAU

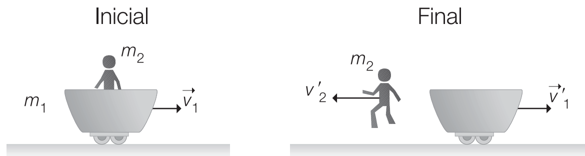
Apliquem la conservació del moment lineal:

$$m \cdot 5 = \frac{m}{2} \cdot 2 + \frac{m}{2} v' \rightarrow v' = 8 \text{ m/s}$$

L'altra part es mou a 8 m/s en la mateixa direcció i sentit que el cos original i que la part que es mou a 2 m/s.

11. Una vagoneta es mou sobre un carril horitzontal amb una velocitat de 24 km/h i porta una persona de 71 kg de massa. En un moment determinat, la persona salta de la vagoneta amb una velocitat de 2,3 m/s respecte del terra, en sentit contrari al del moviment de la vagoneta. Feu un

esquema que representi les situacions inicial i final, i calculeu la velocitat final de la vagoneta, sabent que aquesta té una massa de 198 kg i sense tenir en compte el fregament.



$$m_1 = 198 \text{ kg},\ v_1 = 24 \text{ km/h} = 6{,}67 \text{ m/s},\ v_1' = ?$$

$$m_2 = 71 \text{ kg},\ v_2 = 24 \text{ km/h} = 6{,}67 \text{ m/s},\ v_2' = -2{,}3 \text{ m/s}$$

Apliquem el principi de conservació de la quantitat de moviment i aïllem v_1':

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow 198 \cdot 6{,}67 + 71 \cdot 6{,}67 = 198\, v_1' + 71\,(-2{,}3) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_1' = 9{,}89 \text{ m/s} = 35{,}6 \text{ km/h}$$

12. Un estudiant de física vol comprovar experimentalment el principi de conservació del moment lineal en un billar, i utilitza un sensor de moviment per tal de determinar les velocitats d'una bola abans i després de xocar amb una de les bandes, i els temps d'impacte. Llança una bola de 120 g de massa en direcció perpendicular a una de les bandes, que rebota en la mateixa direcció. Les velocitats de la bola mesurades just abans del xoc amb la banda i just després són, en mòdul, de 3,2 m/s i de 2,8 m/s, respectivament, amb un temps d'impacte amb la banda de 0,15 s.

a) **S'ha conservat la quantitat de moviment de la bola?**

$$\Delta p = m\,(v_f - v_0) = 0{,}120 \cdot (-3{,}2 - 2{,}8) =$$

$$= -0{,}72 \text{ kg·m/s}$$

b) **Quin impuls ha efectuat la banda sobre la bola?**

$$I = \Delta p = -0{,}72 \text{ N·s}$$

c) **Quina força mitjana ha efectuat la banda sobre la bola? I la bola sobre la banda?**

$$|F| = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{0{,}72}{0{,}15} = 4{,}8 \text{ N, són forces d'acció-reacció.}$$

13. L'estudiant del problema anterior realitza un segon experiment. Llança la bola anterior contra un altra bola de 100 g inicialment en repòs, i mesura una velocitat per a la primera bola tot just abans del xoc de 3,8 m/s. Les velocitats de les boles just després del xoc són, respectivament, d'1,8 m/s i de 2,4 m/s, totes dues en el mateix sentit que la velocitat inicial de la primera bola, i el temps d'impacte ha estat de 0,07 s.

Dades:

$\mathbf{m_1 = 0{,}120}$ **kg;** $\mathbf{m_2 = 0{,}100}$ **kg**

$\mathbf{v_1 = 3{,}8}$ **m/s;** $\mathbf{v_2 = 0}$

$\mathbf{v'_1 = 1{,}8}$ **m/s;** $\mathbf{v'_2 = 2{,}4}$ **m/s**

a) **S'ha conservat la quantitat de moviment de la primera bola?**

$\Delta p_1 = m_1\,(v'_1 - v_1) = 0{,}120 \cdot (1{,}8 - 3{,}8) = -0{,}24$ kg·m/s. No es conserva.

b) **Quin impuls ha efectuat la primera bola sobre la segona?**

La variació de la quantitat de moviment de la primera bola és deguda a l'impuls que ha exercit la segona bola. Pel principi d'acció-reacció, l'impuls de la primera bola sobre la segona és igual a $I_{1\rightarrow 2} = -I_{2\rightarrow 1} = 0{,}24$ N·s.

c) **Quina força mitjana ha efectuat la primera bola sobre la segona? I la segona sobre la primera?**

Són forces d'acció-reacció. Per tant, són oposades i de mòdul igual i de valor: $|F| = \dfrac{|I|}{\Delta t} = \dfrac{0{,}24}{0{,}07} = 3{,}43$ N

14. Un dia en què ha nevat força s'ha dipositat una gran quantitat de neu sobre el sostre d'una estació; en el moment en què una màquina de tren de 9,1 t passa per l'estació, li cauen a sobre 396 kg de neu. Calculeu la velocitat que portava la màquina, sabent que la seva velocitat final és de 23 km/h i que la neu ha caigut suaument.

$$m_1 = 9{,}1 \text{ t} = 9{,}1 \cdot 10^3 \text{ kg};\ v_1 = ?$$

$$m_2 = 396 \text{ kg};\ v_2 \simeq 0 \text{ (ja que ha caigut suaument)}$$

$$m_T = m_1 + m_2 = 9{,}1 \cdot 10^3 + 396 = 9{,}496 \cdot 10^3 \text{ kg};$$

$$v' = 23 \text{ km/h} = 6{,}39 \text{ m/s}$$

Apliquem el principi de conservació de la quantitat de moviment i aïllem v_1:

$$m_1 v_1 + m_2 \cancel{v_2} = m_T\, v' \rightarrow$$

$$\rightarrow 9{,}1 \cdot 10^3 \cdot v_1 = 9{,}496 \cdot 10^3 \cdot 6{,}39 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_1 = 6{,}67 \text{ m/s} = 24 \text{ km/h}$$

15. Els astronautes d'un transbordador espacial de 47,5 t es volen allunyar d'una estació espacial i tornar a la Terra. En un moment donat, engeguen els motors i els gasos de combustió són expulsats a una velocitat de 720 m/s respecte de l'estació. Calculeu l'augment de velocitat que experimenta el transbordador, sabent que inicialment està en repòs respecte de l'estació i que la massa dels gasos expulsats és de 950 kg.

$$m = 47{,}5 \text{ t} = 4{,}75 \cdot 10^4 \text{ kg};\ v = 0$$

$$m_1 = 950 \text{ kg};\ v_1' = 720 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 4{,}75 \cdot 10^4 - 950 = 4{,}655 \cdot 10^4 \text{ kg};\ v_2' = ?$$

Apliquem el principi de conservació de la quantitat de moviment i aïllem v_2':

$$m\,\cancel{v} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow 950 \cdot 720 + 4{,}655 \cdot 10^4\, v_2' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_2' = -\frac{950 \cdot 720}{4{,}655 \cdot 10^4} = -14{,}7 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$\Delta v = 14{,}7 - 0 = 14{,}7 \text{ m/s}$$