

UNITAT 1

OPERACIONS AMB ENTERS

Què treballaràs?

- En acabar la unitat has de ser capaç de...
 - Sumar, restar, multiplicar i dividir nombres enters.
 - Entendre i saber utilitzar les propietats de la suma i del producte de nombres enters.
 - Resoldre operacions amb nombres enters que continguin parèntesis i claudàtors.
 - Resoldre operacions combinades amb nombres enters respectant l'ordre de les operacions.

Introducció de la unitat

En aquesta unitat hi trobaràs les eines que necessites per a operar amb els nombres enters. Recorda que en el mòdul comú La temperatura vas conèixer els nombres enters. Vas aprendre a calcular el seu valor absolut, a ordenar-los i a representar-los sobre la recta i en uns eixos de coordenades cartesianes, a operar amb ells i a utilitzar-los per a resoldre problemes senzills.

Aquesta és una unitat d'ampliació i en ella treballaràs més a fons les operacions amb enters.

1. Suma de nombres enters

Quan sumem dos nombres enters ens podem trobar que els nombres tinguin igual signe o bé que els nombres tinguin diferent signe.

1.1. Suma de dos nombres enters que tenen igual signe

Per a sumar dos nombres enters que tenen igual signe:

1r - Sumem els valors absoluts dels nombres.

2n - Posem al resultat el mateix signe dels nombres.

Exemple

Volem fer la suma següent:

$$(+3) + (+6) =$$

1r - Sumem els valors absoluts dels nombres (3 + 6) i ens dona 9.

2n - Posem al resultat el mateix signe dels nombres, és a dir, el signe positiu: +9

Per tant :

$$(+3) + (+6) = +9$$

1.2. Suma de dos nombres enters que tenen diferent signe

Per a sumar dos nombres enters que tenen diferent signe:

1r - Restem els valors absoluts dels nombres.

2n - Posem al resultat el signe del nombre que té major valor absolut.

Exemple1

Volem fer la suma següent:

$$(-3) + (+6) =$$

1r - Restem els valors absoluts dels nombres (6 - 3) i ens dona 3.

2n - Posem al resultat el signe del nombre que té major valor absolut, és a dir, el signe positiu: +3.

Per tant :

$$(-3) + (+6) = +3$$

Exemple 2

Volem fer la suma següent:

$$(+2) + (-9) =$$

1r - Restem els valors absoluts dels nombres (9 - 2) i ens dóna 7.

2n - Posem al resultat el signe del nombre que té major valor absolut, és a dir, el signe negatiu: -7.

• Activitat d'aprenentatge 1

1.3. Suma de tres o més nombres enters

Tenim dues maneres de resoldre aquestes sumes. Vegem-les resolent l'expressió següent:

$$(-3) + (+5) + (-8) + (-6) + (+2) =$$

<p>Procediment 1</p> <p>•Resolem les operacions en l'ordre en què apareixen:</p> $(-3) + (+5) + (-8) + (-6) + (+2) =$ $\quad (+2) + (-8) + (-6) + (+2) =$ $\quad \quad (-6) + (-6) + (+2) =$ $\quad \quad \quad (-12) + (+2) = -10$	<p>Procediment 2</p> <p>•Sumem els nombres enters positius:</p> $(+5) + (+2) = (+7)$ <p>•Sumem els nombres enters negatius:</p> $(-3) + (-8) + (-6) = (-17)$ <p>•Sumem els dos resultats anteriors:</p> $(+7) + (-17) = -10$
--	---

• Activitat d'aprenentatge 2

1.4. Propietats de la suma de nombres enters

La suma de nombres enters compleix sempre les quatre propietats següents:

Commutativa, associativa, element neutre i element oposat o simètric.

Anem a conèixer aquestes propietats:

<p>•Propietat commutativa</p>	<p>Exemple 1</p> $(+8) + (-5) = +3$ $(-5) + (+8) = +3$ <p>Exemple 2</p> $(-3) + (+9) + (-7) = -1$ $(-7) + (+9) + (-3) = -1$ $(+9) + (-7) + (-3) = -1$	<p>Veiem que tant en l'exemple 1 com en el 2, el fet de canviar l'ordre dels nombres que estem sumant (sumands), no afecta el resultat de la suma. Això és el que ens diu la propietat commutativa:</p> <p>L'ordre dels sumands no altera la suma.</p>
--------------------------------------	--	--

<p>• Propietat associativa</p>	<p>Exemple</p> $(-7) + (-9) + (+4) + (-15) = -27$ <p>(No agrupem els sumands)</p> $[(-7) + (-9)] + [(+4) + (-15)] =$ $= (-16) + (-11) = -27$ <p>(Agrupem de dos en dos els sumands)</p> $[(-7) + (-9) + (+4)] + (-15) =$ $= (-12) + (-15) = -27$ <p>(Agrupem els tres primers sumands)</p> $(-7) + [(-9) + (+4) + (-15)] =$ $= (-7) + (-20) = -27$ <p>(Deixem sense agrupar el primer sumand, agrupem la resta)</p>	<p>Veiem en l'exemple que el resultat de la suma és independent de la manera com agrupem els sumands.</p> <p>Això és el que ens diu la propietat associativa:</p> <p>La suma de tres o més sumands no depèn de la forma en què s'agrupen.</p>
<p>• Element neutre</p>	<p>Exemples</p> $(-6) + 0 = -6$ $(+3) + 0 = +3$	<p>Veiem que si sumem el nombre 0 a qualsevol nombre enter obtenim el mateix nombre.</p> <p>La suma té com a element neutre el 0. Això vol dir que la suma de qualsevol nombre enter amb el zero dóna aquest mateix nombre enter.</p>
<p>• Element oposat o simètric</p>	<p>Exemples</p> <p>L'oposat de -5 és $+5$ ja que si els sumem el resultat de la suma és 0.</p> $(-5) + (+5) = 0$ <p>L'oposat de $+1$ és -1 ja que si els sumem el resultat de la suma és 0.</p> $(+1) + (-1) = 0$	<p>Qualsevol nombre enter té un oposat, que és el mateix nombre, però amb signe contrari. La suma d'un nombre enter amb el seu oposat dóna 0.</p>

• **Activitats d'aprenentatge 3, 4**

2. Resta de dos nombres enters

Restar dos nombres enters consisteix en sumar al primer d'ells el segon canviat de signe.

Fixem-nos que això ens diu que fàcilment podem convertir una operació resta en suma.

Exemples

$$(+5) - (+9) = (+5) + (-9) = -4$$

$$(-5) - (-3) = (-5) + (+3) = -2$$

• **Activitat d'aprenentatge 5, 6**

3. Simplifiquem l'escriptura de sumes i restes

Les següents simplificacions ens facilitaran el càlcul de les expressions de nombres enters:

Simplificació	Notació inicial	Notació simplificada
•En les sumes suprimim el signe + de la suma.	$(-8) + (+2)$	$-8 + 2$
	$(-6) + (-1) + (+3)$	$-6 -1 + 3$
•Expressem les restes com a sumes canviant el signe del terme que estava restant.	$(-6) - (+1) - (-4)$	$-6 -1 +4$
	$(+9) + (-2) -(+7)$	$+9 -2 -7$
•Quan el primer sumand té signe positiu, no cal posar-li signe.	$(+6)+(+9)+(+7)$	$6 + 9 + 7$
	$(+9)+(-8)-(-2)-(-6)$	$9 - 8 + 2 + 6$

4. Càlculs amb sumes i restes combinades

Després de simplificar les expressions, tenim dues maneres de fer els càlculs. Vegem-les calculant l'expressió següent: $2+6-3+8-7$

<p>Procediment 1</p> <ul style="list-style-type: none">• Resolem les operacions en l'ordre en què apareixen: $2+6-3+8-7 = 8-3+8-7 = 5+8-7 = 13-7 = 6$	<p>Procediment 2</p> <ul style="list-style-type: none">• Sumem els nombres amb signe + $2+6+8 = 16$ <ul style="list-style-type: none">• Sumem els nombres amb signe - $3+7 = 10$ <ul style="list-style-type: none">• Restem el segon terme del primer $16 - 10 = 6$
--	--

• Activitat d'aprenentatge 7

5. Càlculs amb parèntesis

Quan volem calcular una expressió que conté parèntesis, podem fer-ho de dues maneres:

<p>Procediment 1</p> <ul style="list-style-type: none">• Fem primer l'operació de dins dels parèntesis: $4 - (3 + 9 - 3) = 4 - (+9)$ <ul style="list-style-type: none">• En segon lloc suprimim els parèntesis i fem el càlcul de l'expressió: $4 - (+9) = 4 - 9 = -5$	<p>Procediment 2</p> <ul style="list-style-type: none">• Suprimim prèviament els parèntesis, tenint en compte el següent: <p>-si el parèntesi va precedit del signe -, canviem els signes dels nombres que conté.</p> <p>-si el parèntesi va precedit del signe +, deixem amb els seus signes els nombres que conté.</p> $4 - (3 + 9 - 3) = 4 - 3 - 9 + 3$ <ul style="list-style-type: none">• En segon lloc calculem l'expressió: $4 - 3 - 9 + 3 = -5$
--	---

6. Càlculs amb claudàtors

Els claudàtors són un tipus de parèntesis que es simbolitzen de la següent manera: []. Fem servir els claudàtors per no posar més parèntesis en les expressions que ja en tenen.

Anem a resoldre la següent expressió: $2 - [3 - (+ 2 - 6) + 5 - 4] - 3$ que té parèntesis i claudàtors. Tenim dues possibilitats per a resoldre-la, però és important recordar que sempre cal començar per resoldre els parèntesis més interiors i després els més exteriors i els claudàtors.

<p>Procediment 1</p> <p>•Primerament suprimim els parèntesis fent els canvis de signes que calguin.</p> $2 - [3 - (+ 2 - 6) + 5 - 4] - 3 =$ $= 2 - [3 - 2 + 6 + 5 - 4] - 3 =$ <p>•En segon lloc fem el mateix amb els claudàtors i a continuació calculem l'expressió.</p> $= 2 - [3 - 2 + 6 + 5 - 4] - 3 =$ $= 2 - 3 + 2 - 6 - 5 + 4 - 3 = -9$	<p>Procediment 2</p> <p>•Primerament fem les operacions de dins dels parèntesis.</p> $2 - [3 - (+ 2 - 6) + 5 - 4] - 3 =$ $= 2 - [3 - (- 4) + 5 - 4] - 3 =$ $= 2 - [3 + 4 + 5 - 4] - 3 =$ <p>•En segon lloc fem les operacions de dins dels claudàtors.</p> $= 2 - [3 + 4 + 5 - 4] - 3 =$ $= 2 - 8 - 3 = -9$
--	--

• **Activitat d'aprenentatge 8**

7. Multiplicació de nombres enters

Per a multiplicar dos nombres enters:

<p>1r - Multipliquem els seus valors absoluts.</p> <p>2n - Posem el signe + al resultat obtingut si els dos factors són del mateix signe, i el signe - si els factors tenen signes contraris.</p>

Exemples

- $(+4) \times (+3) = +12$ El resultat és positiu perquè els dos factors tenen igual signe, signe +.
- $(-5) \times (-8) = +40$ El resultat és positiu perquè els dos factors tenen igual signe, signe -.
- $(+60) \times (-1) = -60$ El resultat és negatiu perquè els dos factors tenen signe diferent.
- $(-2) \times (+8) = -16$ El resultat és negatiu perquè els dos factors tenen signe diferent.

La següent taula recull les diferents possibilitats del signe del producte de dos nombres enters, és el que anomenem **regla del signe**.

FACTOR 1	FACTOR 2	SIGNE DEL PRODUCTE
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

7.1. Producte de més de dos enters

Quan en una multiplicació hi ha més de dos factors:

1r - Multipliquem els valors absoluts dels factors. 2n - Afegim al resultat el signe + o - segons que el nombre de factors negatius sigui parell o imparell. Si el nombre de factors negatius és parell afegim el signe + i si és imparell, afegim el signe -.

Exemple 1

$$(-7) \times (+6) \times (-8) \times (+2) = + 672$$

El resultat del producte és positiu perquè hi ha un nombre parell (dos) de factors negatius.

Exemple 2

$$(+2) \times (-3) \times (+5) \times (-1) \times (-6) = -180$$

El resultat del producte és negatiu perquè hi ha un nombre imparell (tres) de factors negatius.

- **Activitats d'aprenentatge 9, 10**

7.2. Propietats del producte de nombres enters

El producte de nombres enters compleix les propietats següents: **commutativa, associativa, distributiva del producte respecte la suma, element neutre.**

•Propietat commutativa	Exemple 1 $(-6) \times (+4) = -24$ $(+4) \times (-6) = -24$ Exemple 2 $(-3) \times (-7) = (-7) \times (-3) = +21$	Veiem que en els dos exemples, el fet de canviar l'ordre dels nombres que estem multiplicant (factors) no ha fet variar el resultat de la multiplicació. Això és el que ens diu la propietat commutativa : L'ordre dels factors no altera el producte.
-------------------------------	---	--

<p>•Propietat associativa</p>	<p>Exemple</p> <p>Suposem que tenim tres nombres per multiplicar. Anem a fer la multiplicació agrupant-los de diferents maneres.</p> <p>Agrupem els dos primers factors:</p> $((-7) \times (+6)) \times (-8) =$ $= (-42) \times (-8) = +336$ <p>Agrupem segon i tercer factors:</p> $(-7) \times ((+6) \times (-8)) =$ $= (-7) \times (-48) = +336$	<p>Fixem-nos que en tots els casos el resultat de la multiplicació ha estat el mateix, independentment de com hàgim agrupat els factors.</p> <p>Això és el que ens diu la propietat associativa:</p> <p>El producte de dos o més factors no depèn de la forma en què s'agrupen.</p>
<p>•Propietat distributiva del producte de nombres enters respecte de la suma</p>	<p>Exemple</p> <p>Anem a aplicar la propietat distributiva per calcular l'expressió següent en la qual hi ha un nombre enter que multiplica una suma de nombres enters:</p> $(+3) \times [(+5) + (-4)]$ <p>Aplicar la propietat distributiva consisteix en multiplicar cada un dels sumands per aquest nombre i després sumar els productes obtinguts:</p> $(+3) \times [(+5) + (-4)] =$ $= (+3) \times (+5) + (+3) \times (-4) =$ $= (+15) + (-12) = +3$ <p>Anem ara a resoldre l'expressió anterior sense aplicar la propietat distributiva, és a dir, fent primer l'operació de dins del claudàtor i després la multiplicació:</p> $(+3) \times [(+5) + (-4)] =$ $= (+3) \times (+1) = +3$	<p>Veiem que quan tenim un nombre enter que multiplica una suma de nombres enters podem resoldre primer el claudàtor i fer després la multiplicació o bé aplicar la propietat distributiva.</p> <p>La propietat distributiva ens diu el següent:</p> <p>Per multiplicar un nombre enter per una suma de nombres enters, només cal multiplicar cada un dels sumands per aquest nombre i sumar els productes obtinguts.</p>

•Element neutre	Exemples $(-5) \times (+1) = -5$ $(+7) \times (+1) = +7$	El nombre enter +1 és l' element neutre del producte de nombres enters. Això vol dir que el producte de qualsevol nombre enter per el +1 dóna el mateix nombre enter.
------------------------	--	--

• Activitat d'aprenentatge 11

8. Divisió exacta de nombres enters

Per a calcular la divisió exacta de dos nombres enters:

1r - Es divideixen els seus valors absoluts.
2n - Es posa al resultat el signe que li correspon segons la regla dels signes.

La següent taula recull les diferents possibilitats del signe de la divisió exacta de dos nombres enters: és el que anomenem **regla del signe**.

Positiu/Positiu = Positiu	Negatiu/Negatiu = Positiu
Positiu/Negatiu = Negatiu	Negatiu/Positiu = Negatiu

De la taula deduïm que la divisió de dos nombres enters amb igual signe és sempre un nombre enter positiu, mentre que la divisió de dos nombres enters amb signe diferent és un nombre enter negatiu.

• Activitat d'aprenentatge 12

9. Operacions combinades amb nombres enters

Sovint hem de calcular expressions de nombres enters que contenen alhora sumes, restes, multiplicacions i divisions, a més de parèntesis i claudàtors.

Sempre que una expressió tingui operacions combinades, aquestes les hem de resoldre seguint l'ordre següent:

1r. Resolem els parèntesis, claudàtors i claus començant sempre pels més interiors.



2n. Fem les multiplicacions i les divisions en l'ordre en què apareixen.



3r. Calculem les sumes i les restes en l'ordre en què apareixen.

Activitat 1

Calcula l'expressió següent:

$$6 \times (5 - 8) - (-3) \times 6 - 9 - 1$$

Solució

1r Resolem els parèntesis.

$$6 \times (5 - 8) - (-3) \times 6 - 9 - 1 = 6 \times (-3) - (-3) \times 6 - 9 - 1 =$$

2n Calculem les multiplicacions en l'ordre en què apareixen.

$$= -18 - (-18) - 9 - 1 =$$

3r Fem les sumes i restes en l'ordre en què apareixen.

$$= -18 + 18 - 9 - 1 = -10$$

Activitat 2

Fes el càlcul següent:

$$-(-3) \times (7-9) + (4-1) \times 2 + 4$$

Solució

1r Resolem els parèntesis.

$$-(-3) \times (7-9) + (4-1) \times 2 + 4 = +3 \times (-2) + 3 \times 2 + 4 =$$

2n Calculem les multiplicacions en l'ordre en què apareixen

$$+3 \times (-2) + 3 \times 2 + 4 = -6 + 6 + 4 =$$

3r Fem les sumes i restes en l'ordre en què apareixen

$$= -6 + 6 + 4 = 4$$

Activitat 3

Calcula l'expressió següent:

$$\begin{aligned} [(-6+7) - (4 \times 9) - 5] + [(20 - 5) : 3 - (3 \times 8)] &= [1 - 36 - 5] + [15 : 3 - 24] = [-40] + [5 - 24] = \\ &= -59 \end{aligned}$$

• Activitats d'aprenentatge 13, 14

Activitats d'aprenentatge

Activitat 1

Calcula les sumes d'enters següents:

a) $(+3) + (+10) =$

b) $(+13) + (-5) =$

c) $(-5) + (+8) =$

d) $(+1) + (-7) =$

e) $(+8) + (-3) =$

f) $(+4) + (+6) =$

g) $(-3) + (-8) =$

h) $(-9) + (-1) =$

Activitat 2

Resol les operacions:

a) $(-6) + (-10) + (-3) =$

b) $(-3) + (+8) + (+4) =$

c) $(+7) + (+12) + (-5) =$

d) $(-13) + (+7) + (-1) =$

e) $(-9) + (+8) + (-9) + (-2) =$

f) $(+4) + (+2) + (+3) + (-1) =$

g) $(-7) + (+3) + (-6) + (-1) =$

h) $(-11) + (+5) + (-6) + (-1) =$

Activitat 3

Uneix amb fletxes:

$(-5) + (+9) + (-7) = (-7) + (+9) + (-5)$

$[(-7) + (-9)] + [(+4) + (-15)] = (-7) + (-9) + (+4) + (-15)$

$(-2) + 0 = -2$

Element neutre

Propietat commutativa

Propietat associativa

Activitat 4

Calcula l'oposat dels següents nombres:

a) +5 b) -4 c) -2 d) +3 e) 0

Activitat 5

Calcula les restes d'enters següents:

a) $(-6) - (-10) =$

b) $(-3) - (+8) =$

c) $(+7) - (+12) =$

d) $(-13) - (+7) =$

e) $(-9) - (+8) =$

f) $(+4) - (+2) =$

g) $(-7) - (+3) =$

h) $(-11) - (+5) =$

Activitat 6

Omple els buits següents:

a) $(+2) - (-7) = (+2) + ?$

c) $(-6) - (+15) = (-6) + ?$

b) $(-3) - (+2) = (+3) - ?$

d) $(+5) + (-9) = (+3) + ?$

Activitat 7

Fes els càlculs següents:

a) $-2 + 8 - 4 - (-3) + 1$

c) $4 - (-5) - 3 + (+2) - (-3)$

e) $(-6) + 8 + 3 + (-2) + 4$

b) $-4 + 6 - 7 + (-5) + 8$

d) $-(-7) + (+6) + (-2) - 8 - 1$

f) $(-3) - 2 + (-3) - (-2) + 3$

Activitat 8

Fes les següents operacions:

a) $-2 + [8 + (-3 + 5 - 4) + 6] =$

b) $-(-3 - 8) + (+5 - 2) =$

c) $-[-8 - (-2 + (-4))] + 5 =$

d) $-2 + (3 - (5 + 2 - 1)) + 8 =$

e) $(7 + 5) + (-2 - 1) =$

f) $[2 - (3 - 1 + 2 - 4) + 3] - 5 =$

g) $4 - (7 + 2) + (3 + 1 - 4) =$

h) $2 - [7 - (3 - 2 + 5 - 4) + 7] =$

Activitat 9

Calcula els següents productes:

a) $(-2) \times (-5)$

d) $0 \times (+3)$

g) $(-2) \times (-6)$

b) $(-3) \times 0$

e) $(+4) \times (+5)$

h) $(-2) \times (-1)$

c) $0 \times (-1)$

f) $(+3) \times (-7)$

i) $(-4) \times (+8)$

Activitat 10

Calcula els productes:

a) $(-5) \times 0 \times (+3) =$

b) $(-3) \times (+4) \times (+5) =$

c) $(-2) \times (+3) \times (-7) =$

d) $(-2) \times (-1) \times (+6) =$

e) $(-2) \times (-1) \times (-6) =$

f) $(-1) \times (-4) \times (+8) =$

Activitat 11

Calcula les següents expressions aplicant la propietat distributiva:

- a) $(-3) \times [(+2) + (-3)]$ c) $(-2) \times [(+3) - (-4) + (+3)]$
b) $(+2) \times [(+2) + (-3) - (-6)]$ d) $(+4) \times [(+9) + (-7) - (-3)]$

Activitat 12

Calcula les següents divisions de nombres enters.

- a) $-3 : +1$ d) $12 : 3$ g) $120 : -6$
b) $-20 : -4$ e) $0 : -5$ h) $24 : -2$
c) $76 : -19$ f) $-18 : -3$ i) $27 : -3$

Activitat 13

Calcula les expressions següents, tenint cura de respectar l'ordre de les operacions.

- a) $(-5) \times (2 - 3) \times (6:2)$ e) $(-3) \times [5 + (-2)]$
b) $(24 : 6) + (8 \times 4)$ f) $[4 \times (-2)] + [(-8) \times 5]$
c) $[(25 - 5) \times 4] + [8 \times (75 : 5)]$ g) $(-3) \times (-2) - (+3) \times (-3) + [(-4) \times (-5) \times (-2)]$
d) $8 \times 7 + 9 + 5 \times (4 \times 2 - 6 \times (-7))$ h) $-3 \times [6 \times (-4 + 2) - 3 \times (-5 + 4)] - 2 \times [3 \times (5-2) - (4-3)]$

Activitat 14

Calcula les següents expressions, tenint cura de respectar l'ordre de les operacions.

- a) $4 \times [-20 - (+300)] : (-10)$
b) $-5 - [800 : (300 - (-100))]$
c) $[(+3) + (-4)] \times (-2)$
d) $(+5) \times [(-2) \times (+4) - (-3)]$
e) $(-1) - [(-5) \times (-3)] \times (-7)$