

UNITAT 3
OPERACIONS AMB FRACCIONS

Què treballaràs?

- En acabar la unitat has de ser capaç de...
 - Sumar, restar, multiplicar i dividir fraccions.
 - Resoldre operacions combinades amb fraccions i enters.
 - Resoldre problemes de fraccions.

1. Sumes i restes de fraccions

1.1. Sumes i restes de fraccions amb igual denominador

La suma i resta de fraccions amb el mateix denominador és una fracció que té per numerador les sumes i restes dels numeradors i per denominador el mateix denominador.

Exemples

1. Per fer la suma de les fraccions $\frac{5}{8} + \frac{4}{8}$ se sumen els numeradors i s'hi deixa el mateix denominador.

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5+4}{8} = \frac{9}{8}$$

2. Per fer la resta de les fraccions $\frac{8}{24} - \frac{2}{24}$ es resten els numeradors i s'hi deixa el mateix denominador. En aquest cas, després se simplifica la fracció resultant.

$$\frac{8}{24} - \frac{2}{24} = \frac{8-2}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

3. Per fer sumes i restes combinades de fraccions se sumen i resten els numeradors tenint en compte el signe del numerador. Després si cal, se simplifica el resultat.

$$\frac{7}{12} + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7+9-8}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{21} - \frac{9}{21} - \frac{2}{21} = \frac{8-9-2}{21} = \frac{-3}{21} = \frac{-1}{7}$$

4. La Maria menja $\frac{3}{8}$ d'un bocata i en Joan $\frac{2}{8}$. Quina fracció mengen entre tots dos?

Quina fracció queda sense menjar?

Entre tots dos mengen $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

Queda sense menjar $\frac{3}{8}$

• Activitats d'aprenentatge

1. Suma o resta les fraccions simplificant-ne els resultats.

$$a) \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

$$b) \frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{8}{12}$$

$$c) \frac{3}{35} - \frac{8}{35} + \frac{10}{35} + \frac{15}{35}$$

$$d) \frac{8}{9} - \frac{5}{9} - \frac{15}{9} - \frac{3}{9}$$

2. En una cursa de relleus el primer corredor fa $\frac{16}{25}$ de la cursa, el segon $\frac{7}{25}$ i el tercer $\frac{3}{25}$. Quina fracció fan en total? És possible aquest resultat?
3. En Carles beu $\frac{4}{12}$ de l'aigua de la cantimplora i la Carme $\frac{5}{12}$. Quina fracció d'aigua beuen en total? Qui beu més aigua de tots dos?

1.2. Sumes i restes de fraccions amb diferent denominador

Per sumar o resta fraccions que tenen els denominadors diferents:

- 1r. Es calcula el mcm dels denominadors.
- 2n. Es redueixen les fraccions a mínim comú denominador.
- 3r. Es fan les sumes i restes dels numeradors i s'hi deixa el mateix denominador.
- 4r. Se simplifica la fracció resultant.

Exemples

1. Per calcular la suma de les fraccions $\frac{7}{12} + \frac{4}{8} =$

- 1r. Es calcula el mcm dels denominadors.

$$12 = 3 \cdot 2^2$$

$$8 = 2^3$$

$$\text{mcm de (12 i 8)} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

- 2n. Es redueixen les fraccions a mínim comú denominador.

$$\frac{7}{12} \longrightarrow 24 : 12 = 2; 2 \cdot 7 = 14 \longrightarrow \frac{14}{24}$$

$$\frac{4}{8} \longrightarrow 24 : 8 = 3; 3 \cdot 4 = 12 \longrightarrow \frac{12}{24}$$

- 3r. Es fan les sumes dels numeradors.

$$\frac{7}{12} + \frac{4}{8} = \frac{14}{24} + \frac{12}{24} = \frac{26}{24}$$

4r. Se simplifica la fracció resultant.

$$\frac{26}{24} = \frac{2 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{13}{12}$$

Tot el procés continuat s'expressa:

$$\frac{7}{12} + \frac{4}{8} = \frac{14}{24} + \frac{12}{24} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$$

2. Per calcular la resta de les fraccions $\frac{7}{18} - \frac{1}{72} =$

1r. Es calcula el mcm dels denominadors

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ \text{mcm de } (18 \text{ i } 72) &= 2^3 \cdot 3^2 = 72 \end{aligned}$$

2n. Es redueixen les fraccions a mínim comú denominador.

$$\frac{7}{18} \longrightarrow 72 : 18 = 4; 4 \cdot 7 = 28 \longrightarrow \frac{28}{72}$$

$$\frac{1}{72} \longrightarrow 72 : 72 = 1; 1 \cdot 1 = 1 \longrightarrow \frac{1}{72}$$

3r. Es fa la resta dels numeradors.

$$\frac{7}{18} - \frac{1}{72} = \frac{28}{72} - \frac{1}{72} = \frac{27}{72}$$

4r. Se simplifica la fracció resultant.

$$\frac{27}{72} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3}{8}$$

Tot el procés continuat s'expressa:

$$\frac{7}{18} - \frac{1}{72} = \frac{28}{72} - \frac{1}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

3. Per calcular operacions de fraccions amb sumes i restes $\frac{10}{18} - \frac{6}{9} + \frac{5}{2} - 7 =$

1r. Es calcula el mcm dels denominadors.

Es tracte d'una operació en la que hi ha fraccions i enters. Per resoldre-la se suposa que **l'enter té per denominador la unitat**, en aquest cas, sota del 7 hi ha un 1.

El mcm de (18, 9, 2 i 1) = 18

2n. Es redueixen les fraccions a mínim comú denominador i se sumen i resten els numeradors tenint en compte els signes.

$$\frac{10}{18} - \frac{6}{9} + \frac{5}{2} - \frac{7}{1} = \frac{10}{18} + \frac{12}{18} + \frac{45}{18} - \frac{126}{18} = \frac{10+12+45-126}{18} = \frac{-59}{18}$$

El resultat és una fracció irreductible i per tant no es pot simplificar.

• **Activitats d'aprenentatge**

4. Calcula les operacions següents i simplifica'n el resultat.

a) $\frac{3}{18} + \frac{4}{10}$

b) $\frac{7}{12} - \frac{11}{6}$

c) $\frac{10}{25} - \frac{12}{3} + \frac{5}{15}$

d) $\frac{5}{10} + \frac{3}{5} - \frac{12}{6}$

5. Efectua les operacions següents tot simplificant-ne el resultat.

a) $\frac{7}{12} - 4 - \frac{5}{8} + \frac{7}{6}$

b) $\frac{5}{25} - \frac{3}{15} - \frac{4}{10} + 6$

c) $-\frac{7}{4} - \frac{12}{3} + 1 - \frac{5}{18}$

d) $\frac{20}{16} - 4 + \frac{5}{15} - 2$

6. Efectua les operacions següents i simplifica'n el resultat. Recorda que en primer lloc has de fer les operacions de dins dels parèntesis.

a) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{15}\right) + \left(\frac{5}{15} - \frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{-2}{12} - \frac{7}{20}\right) - \left(\frac{5}{15} + \frac{3}{25}\right)$

7. En una cursa de relleus el primer corredor triga $\frac{5}{4}$ d'hora i el segon $\frac{3}{2}$ d'hora i el tercer $\frac{7}{3}$ d'hora. Quina fracció d'hora triguen en total?

2. Multiplicació de fraccions

El producte de fraccions és una altra fracció que té per numerador el producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. El signe de la fracció s'obté aplicant la regla del producte dels signes.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemples

1. Per calcular el producte de les fraccions es multipliquen els numeradors i els denominadors.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

2. Per calcular el producte $\frac{2}{7} \cdot 9$ se suposa que sota del 9 hi ha un 1.

$$\frac{2}{7} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 9}{7} = \frac{18}{7}$$

3. Per calcular el producte $\frac{-3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2}$ es té en compte el signe quan es fa la multiplicació dels numeradors. Se simplifica la fracció que resulta.

$$\frac{-3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(-3)(6)(5)}{2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{-90}{20} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{-9}{2}$$

• Activitats d'aprenentatge

8. Efectua els productes següents tot simplificant-ne el resultat.

a) $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{35}$

b) $\left(\frac{-3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)$

$$c) \left(\frac{-3}{12}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{-2}\right) \quad d) \left(-\frac{4}{6}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{8}\right)$$

$$e) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-4) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \quad f) (-3) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot (14)$$

2. 1. La fracció com a operador d'una altra fracció

La fracció com a operador d'una altra fracció vol dir calcular la fracció d'una altra fracció.
Per fer aquest càlcul es multipliquen les fraccions.

Exemples

Ja hem vist en la unitat anterior com es calcula la fracció d'una quantitat, per exemple, els $\frac{2}{3}$ de 15 €. (Repassa com es fa).

1. Per calcular les $\frac{2}{3}$ parts de $\frac{1}{2}$ es fa el producte de les fraccions

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

i, com sempre, se simplifica el resultat si cal.

Les $\frac{2}{3}$ parts de $\frac{1}{2}$ són $\frac{1}{3}$.

2. Et correspon $\frac{1}{3}$ de les $\frac{2}{4}$ parts de 360 €. Quina fracció et correspon? Quants euros és la fracció?

$\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{4}$ és calcula fent la multiplicació

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \longrightarrow \text{La fracció és } \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \text{ parts de } 360 \text{ €} = 60 \text{ €}$$

3. Tres germans es reparteixen un terreny de 15.000 m². El germà gran rep $\frac{3}{5}$ de l'herència. El germà petit $\frac{1}{3}$ de l'herència i l'altre germà la resta. Quina fracció rep el germà mitjà? Quants diners rep cadascú?

$$\text{El germà gran rep } \frac{3}{5} \text{ de } 15.000 = \frac{15.000 \cdot 3}{5} = 9.000 \text{ m}^2$$

$$\text{El germà petit rep } \frac{1}{3} \text{ de } 15.000 = \frac{15.000 \cdot 1}{3} = 5.000 \text{ m}^2$$

$$\text{El germà gran i petit junts reben } \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$$

$$\text{El germà mitjà rep la fracció } 1 - \frac{14}{15} = \frac{15 - 14}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\text{El germà mitjà rep } \frac{1}{15} \text{ de } 15.000 = \frac{15.000 \cdot 1}{15} = 1.000 \text{ m}^2$$

4. En Joan compra una moto per 2.100 € i tria l'opció de pagament fraccionat. D'entrada paga $\frac{1}{7}$ del preu. El primer mes pagarà $\frac{2}{3}$ del que queda i el segon mes pagarà la resta.

- a) Quant paga d'entrada?

$$\frac{1}{7} \text{ de } 2.100 = \frac{2.100 \cdot 1}{7} = 300 \text{ €}$$

- b) Quant pagarà el primer mes?

$$\frac{2}{3} \text{ del que queda per pagar}$$

$$\text{Queda per pagar } 2.100 - 300 = 1.800 \text{ €}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } 1.800 = \frac{1.800 \cdot 2}{3} = 1.200 \text{ €}$$

- c) Quant pagarà el segon més?

$$\text{Ha pagat } 300 + 1.200 = 1.500 \text{ €}$$

$$1.800 - 1.500 = 300 \text{ €}$$

$$\text{El segon mes pagarà } 300 \text{ €}$$

• **Activitats d'aprenentatge**

9. Indica el resultat simplificat:

- a) Les $\frac{1}{4}$ parts de $\frac{4}{6}$ són:

- b) Les $\frac{2}{3}$ parts de $\frac{3}{4}$ són:
c) Les $\frac{3}{5}$ parts de $\frac{7}{15}$ són:
d) Les $\frac{5}{8}$ parts de $\frac{4}{20}$ són:

10. Tres persones es reparteixen una herència de forma que a la primera li corresponen $\frac{2}{7}$ del total. A la segona $\frac{1}{3}$ del que queda i a la tercera la resta. Quina fracció es queda cadascuna d'elles.

3. Fracció inversa

La fracció inversa de la fracció $\frac{a}{b}$ és la fracció $\frac{b}{a}$. (Sempre que $\frac{a}{b} \neq 0$).

Quan es multiplica una fracció per la seva inversa el resultat és la unitat.

Es compleix $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Exemple

La fracció inversa de $\frac{5}{8}$ és $\frac{8}{5}$ perquè $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1$

4. Divisió de fraccions

El quocient de dividir dues fraccions és una altra fracció que s'obté multiplicant la primera fracció (dividend) per la inversa de la segona fracció (divisor).

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

També es pot fer la divisió de fraccions directament multiplicant en creu.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemples

1. Per calcular la divisió de les fraccions $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ es pot fer:

a) Multiplicant per la fracció inversa

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

b) Multiplicant en creu

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

2. En l'operació següent $\frac{-3}{12} : \frac{4}{5}$ s'ha de tenir en compte el signes.

a) Es multiplica per la fracció inversa

$$\frac{-3}{12} : \frac{4}{5} = \frac{-3}{12} \cdot \frac{5}{4} = \frac{-15}{48} = \frac{-5}{16}$$

b) Es multiplica en creu

$$\frac{-3}{12} : \frac{4}{5} = \frac{(-3) \cdot 5}{12 \cdot 4} = \frac{-15}{48} = \frac{-5}{16}$$

3. En l'operació $\frac{-2}{5} : 4$ se suposa que hi ha un 1 sota del 4.

$$\frac{-2}{5} : 4 = \frac{-2}{5} : \frac{4}{1} = \frac{-2}{20} = \frac{1}{10}$$

Una altra manera d'expressar el quocient de divisions és escriure-la en forma de fracció.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Exemple

1. El quocient de les fraccions $\frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}}$.

Ja saps que per calcular el seu valor es multiplica per la fracció inversa del denominador.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

Quan hi ha una fracció en el denominador es pot escriure l'expressió com a producte del numerador per la inversa de la fracció del denominador.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Exemple

1. En el cas que el numerador sigui un nombre enter

$$\frac{1}{\frac{5}{9}} = 1 \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{7}} = 3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$$

• Activitats d'aprenentatge

11. Calcula les operacions i simplifica'n el resultat:

a) $\frac{8}{5} : \frac{12}{15}$

b) $\frac{9}{12} : \frac{6}{3}$

c) $\frac{-3}{4} : \frac{9}{7}$

d) $\frac{6}{-4} : \frac{12}{-8}$

e) $3 : \frac{-3}{7}$

f) $\frac{-15}{6} : (-4)$

12. Calcula les operacions tot simplificant-ne el resultat:

a) $\frac{1}{\frac{3}{10}} =$

b) $\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{9}} =$

c) $\frac{-2}{\frac{8}{3}} =$

6. Operacions combinades

Sempre que hi ha operacions combinades s'han de resoldre seguint l'ordre següent: (És el mateix ordre que se segueix en les operacions combinades amb nombres enters).

- 1r. Es fan les operacions indicades entre parèntesis.
- 2n. Es fan els productes i les divisions.
- 3r. Es calculen les sumes i les restes en l'ordre en què van apareixent.

Exemples

1. Producte d'un enter per una suma de fraccions.

$$7\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{18}\right) =$$

- 1r Es fa l'interior dels parèntesis

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{18} = \frac{24}{18} + \frac{8}{18} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$$

- 2n Es fa la multiplicació

$$7 \cdot \frac{16}{9} = \frac{7 \cdot 16}{9} = \frac{112}{9}$$

2. Producte d'una fracció per una suma o resta de fraccions.

$$\frac{3}{8}\left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{3} = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

3. Resolem l'operació

$$\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3}\right) : \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{20}{24}\right) : \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{9}\right) = \left(\frac{20}{24}\right) : \left(\frac{-2}{9}\right) = \left(\frac{20 \cdot 9}{-24 \cdot 2}\right) = -\frac{180}{48} = -\frac{15}{4}$$

7. Propietat distributiva

Recorda com has aplicat la propietat distributiva del producte de nombres enters respecte de la suma.

Per aplicar la propietat distributiva del producte respecte de la suma de fraccions, primer es multiplica el factor exterior per cada un dels membres de dins del parèntesi. Després es fan les sumes i restes. Per últim se simplifica la fracció resultant.

Exemples

1. En el producte d'un enter per una suma de fraccions s'aplica la propietat distributiva.

$$7\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{18}\right) = 7 \cdot \frac{4}{3} + 7 \cdot \frac{8}{18} = \frac{28}{3} + \frac{56}{18} = \frac{168}{18} + \frac{56}{18} = \frac{224}{18} = \frac{112}{9}$$

2. En el producte d'una fracció per una resta de fraccions s'aplica la propietat distributiva.

$$\frac{3}{8}\left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{48} - \frac{3}{24} = \frac{12}{48} - \frac{6}{48} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

• Activitats d'aprenentatge

13. Efectua les operacions següents pel dos mètodes:

1r. Calculant en primer lloc l'interior del parèntesi.

2n. Aplicant la propietat distributiva.

a) $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right) =$

b) $\frac{7}{2}\left(\frac{4}{8} - \frac{1}{6}\right) =$

c) $\frac{7}{8}\left(\frac{5}{4} - 4\right) =$

d) $-3\left(\frac{1}{18} - \frac{2}{6}\right) =$

14. Calcula el valor de les operacions següents i simplifica'n el resultat. Recorda que primer has d'operar el parèntesi.

a) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\right) =$

b) $\left(\frac{7}{2} - 5\right) : \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) =$

c) $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{5} =$

d) $\frac{5}{4} : \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3}\right) =$

$$e) \frac{\frac{1}{5} + 5}{\frac{3}{5} \cdot 4} =$$

$$f) \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{4} + 3\right)} =$$

15. Un senyor deixa 37.800 € d'herència i mana que el $\frac{5}{6}$ de l'herència es reparteixin entre els seus 3 fills. Quant li toca a cadascun d'ells?.
16. Tres persones es reparteixen un terreny de 2.400 m². El primer es queda $\frac{3}{8}$ del terreny, el segon $\frac{4}{6}$ del que queda i el tercer la resta. Quants metres quadrats es queda cadascuna de les persones?.
17. Un paleta triga en fer una feina $\frac{3}{4}$ d'hora. Quant de temps trigaria en fer els $\frac{4}{5}$ de la mateixa feina?
18. Mentre un ciclista fa els $\frac{3}{6}$ d'una etapa un cotxe fa els $\frac{5}{8}$ de la mateixa. Qui va més ràpid? Quantes vegades va més de pressa?