

Exercicis d'ampliació. Composició de funcions.

La Matemàtica (almenys una part) treballa amb objectes i operacions definides sobre aquests objectes (és una visió molt simple, però prou encertada). Fins ara per vosaltres els objectes eren els nombres, i les operacions les típiques (suma, multiplicació...), de manera que donats dos nombres (objectes) els podem sumar (operar) i obtenim un altre nombre. Doncs això mateix podem fer amb les funcions, amb operacions conegudes, o amb noves operacions.

Siguin f i g dues funcions reals. Definim la funció $f \circ g$ de la següent manera:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Aquesta definició té sentit sempre que x sigui del domini de g i $g(x)$ sigui del domini de f .

En la composició de funcions no fem altra cosa que aplicar primer una funció i al resultat aplicar-li l'altra funció.

Exemple: Si $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 1$ aleshores $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2 + 1) = f(3) = 9$.

1. Si $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 1$. Calcula $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(0)$ i $(f \circ g)(-1)$.
2. La composició de funcions és commutativa? És a dir, en general $f \circ g = g \circ f$? Justifica la resposta.
3. Donada $f(x) = 3x$, busca una funció g tal que $(f \circ g)(x) = x$. Comprova que en aquest cas també es compleix que $(g \circ f) = x$. A la funció g l'anomenem inversa de f , i ho escrivim $g = f^{-1}$.
4. Si $f(x) = x^2$, calcula f^{-1} . Explica quin és el domini de f i de f^{-1} . Observa que hi ha funcions que no tenen inversa, o com a mínim, que no tenen una inversa per a tots els punts.
5. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, calcula f^{-1} .
6. Si $f(x) = x^2$, calcula $f \circ f$.
7. Resol la següent equació funcional on $f(x) = x^3$. Pensa que busques una funció i no un valor de x .

$$f \circ g = (x + 2)^3$$