

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS (d'una sola variable amb coeficients racionals)

Monimi: Expressió del tipus ax^n . On $a \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ i x és la variable. Per exemple $3x^2$.

Polinomi: Suma d'un nombre finit monomis. Per exemple $x^2 - 4x + 1$.

Coeficient: Nombre que multiplica la variable en un monomi. Per exemple, en el monomi $3x^2$ el coeficient és 3. I en el monomi $\frac{x^2}{4}$ el coeficient és $\frac{1}{4}$. I en el monomi x^4 el coeficient és 1, recorda que $x^4 = 1x^4$.

Coeficient principal: És el coeficient del monomi que té grau més alt.

Terme independent: En un polinomi és el nombre que no multiplica cap x . De fet és el coeficient del monomi de grau zero.

Grau d'un monomi: És l'exponent a que tenim elevada la x . Per exemple, en el monomi $3x^2$ el grau és 2. I en el monomi $2x$ el grau és 1. Recorda que $2x = 2x^1$.

Grau d'un polinomi: És el més gran dels exponents a que està elevada la x . Per exemple, en el polinomi $x^2 - 4x + 1$ el grau és 2.

Arrels d'un polinomi: Són les solucions de l'equació que resulta d'igualar un polinomi a zero. Són els valors que substituïts a la variable fan que el polinomi valgui zero.

Factoritzar un polinomi és reescriure'l en forma de producte. És a dir, passar de la forma expandida

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a la forma factoritzada

$$a_n (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

on $x_1 \dots x_n$ són les arrels del polinomi. i a_n és el coeficient principal.

Com pots veure, el primer que apareix en el polinomi factoritzat és el coeficient principal.

No tots els polinomis es poden factoritzar completament i n'hi ha que ni tan sols es poden factoritzar en part.

Per factoritzar un polinomi cal buscar-ne les arrels. Però a part, cal tenir en compte altres aspectes.

Factoritzar polinomis de grau 1.

Per factoritzar polinomis de grau 1 només hem de resoldre la l'equació que resulta d'igualar el polinomi a zero. Com que el polinomi és de grau 1, l'equació serà de primer grau i molt fàcil de resoldre. Després només caldrà afegir-hi el coeficient principal.

Tots els polinomis de primer grau tenen una arrel i per tant són factoritzables.

Exemple:

Volem factoritzar el polinomi $2x + 5$.

Primer de tot igualem el polinomi a zero i obtenim:

$$2x + 5 = 0$$

que és una equació de primer grau i la resollem en un plis-plas.

$$x = \frac{-5}{2}$$

Per tant ja tenim l'arrel que és $\frac{-5}{2}$. I ara només cal escriure el polinomi factoritzat.

$$2x + 5 = 2 \left(x - \frac{-5}{2} \right) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right)$$

El 2 que hem posat davant del parèntesis és el coeficient principal, i fixa't en els signes!.

Factoritzar polinomis de grau 2

En termes generals per factoritzar polinomis de grau 2 farem el mateix que en els de grau 1. El que passa és que en aquest cas l'equació que haurem de resoldre serà de segon grau, i com ja saps les equacions de segon grau poden tenir dos, una o cap solució.

Si no té cap solució ja hem acabat, vol dir que el polinomi de grau 2 no es pot factoritzar.

Si té una solució doble, la factorització serà del tipus $a(x - x_1)^2$ on a és el coeficient principal i x_1 és la solució doble que hem obtingut.

Si té dues solucions diferents, la factorització serà del tipus $a(x - x_1)(x - x_2)$ on a és el coeficient principal i x_1 i x_2 són les dues solucions de l'equació de segon grau.

Exemple 1:

Volem factoritzar el polinomi $x^2 + 2x + 10$

Igualem a zero i obtenim l'equació

$$x^2 + 2x + 10 = 0$$

L'anem a resoldre i a mig camí veiem que no té solució perquè el discriminant és negatiu. Oh! Com que no té cap solució no podem factoritzar el polinomi. Ja estem.

Exemple 2:

Volem factoritzar el polinomi $2x^2 - 4x + 2$.

Igualem el polinomi a zero i obtenim

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

que és una equació de 2n grau que resollem amb la fórmula de sempre. En aquest cas hem obtingut una única solució doble:

$$x_1 = 1$$

Per tant, la factorització és

$$2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$$

Exemple 3:

Volem factoritzar el polinomi $x^2 + x - 6$

Igualem el polinomi a zero i obtenim

$$x^2 + x - 6 = 0$$

que és una equació de segon grau i la resollem sense dificultat. Obtenim les solucions

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

Per tant la factorització queda de la forma

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

En aquest cas el coeficient principal és 1 i no ens cal posar-lo. Observa que $(x + 3)$ prové de $(x - (-3))$.