

TREBALL DE RECERCA

# NOMÉS ÉS QÜESTIÓ DE SORT?

Estudi matemàtic i estadístic sobre els jocs d'atzar



**Eva Bramon Vinardell**

INS Pere Alsius i Torrent

2n Batxillerat B

Tutora: Àngels Picart Fàbrega

Banyoles, 23 de gener de 2012

**Agraïments:**

Vull donar les gràcies a totes aquelles persones que m'han ajudat a realitzar i a fer possible la tasca d'aquest treball.

Primer a la meva tutora, l'Àngels, que m'ha donat idees, m'ha proporcionat informació i eines pel treball i m'ha guiat i ajudat en tot moment amb molta dedicació i amabilitat.

A totes les administracions de loteries i apostes de Banyoles i rodalies, per haver-me facilitat la recollida de dades deixant-me passar l'enquesta als seus clients. També a totes les persones anònimes que, desinteressadament, han contestat les preguntes.

I, sens dubte, als meus pares i la meva germana, per la seva col·laboració incondicional i paciència en el dia a dia.

A tots ells, de tot cor, moltes gràcies.

**ÍNDEX**

<b>1. INTRODUCCIÓ</b>	
1.1. JUSTIFICACIÓ .....	3
1.2. OBJECTIUS .....	3
1.3. METODOLOGIA.....	4
<b>2. ELS JOCS D'ATZAR</b>	
2.1. CONCEPTE DE JOC .....	6
2.2. ELS JOCS D'ATZAR.....	6
2.3. ENTITATS RESPONSABLES.....	7
<b>3. DESCRIPCIÓ DE DIFERENTS JOCS D'ATZAR</b>	
3.1. LOTERIES I APOSTES D'EUROPA (HISTÒRIA, CARACTERÍSTIQUES I PREMIS)	
3.1.1. Euromillones.....	8
3.2. LOTERIES I APOSTES D'ESPANYA (HISTÒRIA, CARACTERÍSTIQUES I PREMIS)	
3.2.1. Loteria Nacional .....	9
3.2.2. La Primitiva.....	12
3.2.3. Bonoloto.....	14
3.2.4. La Quiniela.....	15
3.3. LOTERIES I APOSTES DE CATALUNYA (HISTÒRIA, CARACTERÍSTIQUES I PREMIS)	
3.3.1. Lotto 6/49.....	17
3.3.2. Trio .....	19
3.3.3. Super 10 .....	20
3.3.4. Loto Express .....	22
<b>4. RISCOS DEL JOC</b>	
4.1. CONCEPTE D'ADDICCIÓ .....	26
4.2. LUDOPATIA.....	26
4.3. LÍMITS ENTRE UN JOC RESPONSABLE I UN JOC PROBLEMÀTIC .....	27
4.4. CONSEQÜÈNCIES DE LA LUDOPATIA .....	28
4.5. PREVENCIÓ DE LA LUDOPATIA .....	29
<b>5. ELS INICIS DE LA TEORIA DE LA PROBABILITAT</b>	
5.1. CONTEXT HISTÒRIC I PRECURSORS.....	30
5.2. NAIXEMENT DE LA TEORIA DE LA PROBABILITAT .....	33
<b>6. TREBALL PRÀCTIC</b>	
6.1. PRÀCTIQUES SOBRE LA HISTÒRIA DE LA PROBABILITAT	
6.1.1. Pràctica del llibre <i>Sopra le Scoperte dei Dadi</i> de Galileu Galilei .....	35
6.1.2. Pràctica de la carta de Pascal a Fermat del dimecres 29 de juliol de 1654 .....	36
6.2. ANÀLISI DELS JOCS D'ATZAR (CÀLCUL DE LA PROBABILITAT DE GUANYAR I DE L'ESPERANÇA MATEMÀTICA)	
6.2.1. Euromillones.....	37
6.2.2. Loteria Nacional .....	39
6.2.3. La Primitiva .....	42
6.2.4. Bonoloto.....	43

6.2.5. La Quiniela .....	44
6.2.6. Lotto 6/49 .....	44
6.2.7. Trio .....	46
6.2.8. Super 10.....	47
6.2.9. Loto Express.....	50
<b>6.3. ENQUESTA SOBRE ELS JOCS D'ATZAR</b>	
6.3.1. Descripció .....	59
6.3.2. Interpretació.....	60
<b>6.4. ANÀLISI DEL JOC A ESPANYA L'ANY 2009</b>	
6.4.1. Dades.....	71
6.4.2. Anàlisi de les quantitats jugades distribuïdes per jocs a Espanya .....	72
6.4.3. Anàlisi de les quantitats jugades distribuïdes per jocs a Catalunya .....	73
6.4.4. Valor mitjà de les quantitats jugades per habitant a Espanya .....	74
6.4.5. Comparació del valor mitjà de les quantitats jugades per habitant de Catalunya amb el de les altres comunitats autònomes .....	75
<b>6.5. EL PROBLEMA D'INVESTIGACIÓ</b>	
6.5.1. Plantejament del problema .....	76
6.5.2. Anàlisi i interpretació de dades .....	76
6.5.3. Elaboració d'un simulador	
6.5.3.1. Concepte de simulador.....	78
6.5.3.2. Programa GeoGebra .....	79
6.5.3.3. Característiques del simulador .....	80
6.5.3.4. Passos per a l'elaboració del simulador .....	81
6.5.4. Descobriments de la Campana de Gauss (Distribució Normal)	
6.5.4.1. Gràfic de la distribució del nombre d'uns per jornada .....	84
6.5.4.2. Distribució binomial.....	85
6.5.4.3. Aproximació de la distribució binomial per la distribució normal .....	88
6.5.4.4. Càlcul dels intervals centrats a la mitjana.....	90
<b>7. CONCLUSIONS I PROSPECTIVA</b> .....	93
<b>8. FONTS D'INFORMACIÓ</b>	
8.1. BIBLIOGRAFIA .....	96
8.2. WEBGRAFIA .....	96
<b>ÍNDIX DE TAULES</b> .....	100
<b>ÍNDIX DE FIGURES I GRÀFICS</b> .....	102
<b>ANNEXOS</b>	
ANNEX 1: LLIBRE "SOPRA LE SCOPERTE DEI DADI" DE GALILEU	
ANNEX 2: CARTA DE PASCAL A FERMAT DEL DIMECRES 29 DE JULIOL DE 1654	
ANNEX 3: ENQUESTA SOBRE ELS JOCS D'ATZAR	
ANNEX 4: TAULES DELS RESULTATS DE LES QUINIELES DE L'ANY 2001 AL 2010	
ANNEX 5: TAULA DEL RECOMPTE D'UNS DE LES QUINIELES DE L'ANY 2001 AL 2010	
ANNEX 6: CD AMB EL SIMULADOR I EL TREBALL (VERSIÓ PDF)	

## 1. INTRODUCCIÓ

### 1.1. Justificació

Des de ben petita m'han agradat els números. M'encanta comptar, sí, comptar petites coses insignificants que m'envolten (com podrien ser les rajoles que hi ha a la paret d'un bany o els seients d'un teatre) i també, fer càlculs i resoldre problemes a la classe de matemàtiques.

Per mi, encara que costi de creure, una de les parts més difícils del treball del recerca ha estat escollir el tema. Des del primer moment en què vaig pensar en el treball, tenia clar que el volia orientar cap al món de les matemàtiques. Però, tot i tenint clar el marc, em va costar molt definir el tema. Pocs dies abans de l'elecció definitiva va tocar un premi de l'Euromillones, valorat en sis milions d'euros, a Banyoles. Em va sobtar moltíssim que algú de la meua ciutat hagués tingut aquesta sort -o potser, no només sort-, i aquest va ser el motiu pel qual vaig decidir enfocar aquest treball cap als jocs d'atzar.

Els jocs d'atzar mouen any rere any milers de milions d'euros, i són moltes les persones que participen en aquest tipus d'apostes, amb il·lusió, però sense pensar en termes probabilístics o matemàtics. Voltaire, filòsof i escriptor francès, ja en el segle XVIII va dir: "L'atzar és una paraula buida de sentit, res pot existir sense causa" i a partir d'aquí, em vaig fer la primera pregunta. Guanyar o no un premi en un joc d'atzar és només qüestió de sort? Pregunta que responc després de l'estudi del joc de La Quiniela, a més d'altres aspectes que em proposo investigar en aquest treball relacionats amb els jocs d'atzar.

### 1.2. Objectius

Es creu que, en tots els jocs de loteries i apostes, la sort és l'únic motiu pel qual obtens un premi, i d'aquí surgeix, com ja he dit, el meu principal objectiu: veure si realment la probabilitat de guanyar als jocs d'apostes i loteries només ve determinada pel factor atzar o si hi ha altres factors que la condicionen. Per això, calcularé les probabilitats de guanyar dels jocs d'atzar que més es juguen a Catalunya, per així poder confirmar el que em suposo: la probabilitat de treure algun premi és gairebé insignificant.

També vull conèixer més a fons la malaltia provocada per l'obsessió al joc, la ludopatia. Estic interessada en saber quines són les causes d'aquesta malaltia i també la manera com es pot prevenir patir-la.

Un altre propòsit és conèixer els inicis de la teoria de la probabilitat, és a dir, explicar la història des que van aparèixer els primers daus fins que es va introduir el primer concepte de Teoria de Probabilitat.

D'altra banda m'agradaria investigar quin tipus de gent juga als jocs d'atzar a Banyoles. O sigui, fer una recerca del perfil de gent que juga als jocs d'atzar, la freqüència amb què ho fan, la quantitat de diners que hi destinen i quins són els jocs més jugats.

Per acabar, després d'haver llegit l'estudi anomenat *La travessa com a joc d'atzar*, em proposo continuar la mateixa investigació i elaborar un simulador del joc de la Quiniela.

### 1.3. Metodologia

Aquest treball consta de dues parts ben diferenciades. Una part teòrica on defineixo el concepte de joc, explico què són els jocs d'atzar i descriu les entitats responsables a nivell d'Europa, Espanya i Catalunya, i a més faig la descripció acurada dels jocs d'atzar més comuns que es juguen a Catalunya. També descriu què és la ludopatia, el pas d'un joc responsable a un de problemàtic, les conseqüències que té aquesta malaltia així com la seva prevenció. En l'últim apartat teòric explico els inicis de la Història de la Probabilitat i els principals matemàtics que van contribuir fins a l'elaboració de la primera Teoria de la Probabilitat.

La segona part pràctica està dividida en cinc apartats. En el primer tracto de conèixer i entendre dos famosos problemes que van afavorir el desenvolupament de la Probabilitat: el problema de Galileu Galilei i el problema del cavaller de Méré sobre el llançament de daus. Aquestes problemes van ser mal resolts inicialment, i s'ha tardat segles a donar la solució correcta. Tot seguit faig una anàlisi dels jocs d'atzar descrits anteriorment, on calculo la probabilitat de guanyar i l'esperança matemàtica de cadascun d'ells. A continuació, interpreto les dades obtingudes de la realització d'una enquesta i faig una anàlisi del joc a Espanya l'any 2009, últim any del que he pogut obtenir dades. L'últim apartat correspon al problema d'investigació, on analitzo i interpreto les dades dels resultats de les quinielles dels últims deu anys. A partir d'aquestes dades explico com construir un simulador i n'elaboro un. A més, encara que no estava previst en el plantejament inicial del treball, ordeno aquestes dades i les represento segons dos tipus concrets de distribucions de probabilitat: la binomial i la normal. Això m'ajuda a entendre les lleis de probabilitat i els fonaments de la Teoria de la Probabilitat. Per complir els objectius proposats, la metodologia emprada en aquest treball s'ha basat en la recerca bibliogràfica, en obtenir documentació de diverses fonts i en seleccionar la informació que he considerat més interessant. He consultat el projecte *Jugar i gaudir* de la Generalitat de Catalunya per tal d'explicar els riscos del joc. He trobat a Internet el llibre *Sopra le Scoperte dei Dadi* de Galileu Galilei i la carta de Pascal a Fermat del dimecres 29 de juliol de 1654, material necessari per poder resoldre els problemes referents a la Història de la Probabilitat. També he passat una enquesta als diferents establiments de venda de loteries i apostes de Banyoles i Mata, i he fet un estudi de les dades obtingudes de *Informe anual del juego en España, 2009*

realitzat per la Subdirecció General d'Estudis i Relacions Institucionals. M'he basat en l'estudi *La travessa com a joc d'atzar* de Josep Lluís Cañadilla<sup>1</sup> publicat a la revista *Biaix*<sup>2</sup> número 20 (desembre de 2002) per concretar el problema d'investigació i he utilitzat el programari lliure *Geogebra* per elaborar el simulador. Finalment, després de tota aquesta recerca he arribat a unes conclusions.

---

<sup>1</sup> Professor de matemàtiques a l'Institut Jaume Huguet de Valls i actualment president de l'Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals (APMCM).

<sup>2</sup> La revista *Biaix* és una revista de didàctica de les matemàtiques. Va néixer l'abril de 1992 i els primers anys va ser exclusivament la revista de l'APMCM. Amb la creació de FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya) el 1994 va passar a ser la revista de la FEEMCAT.

## 2. ELS JOCS D'ATZAR

### 2.1. Concepte de joc

El joc és una activitat inherent a l'ésser humà i és una part universal de la cultura humana, se sap que ja s'hi jugava des de la prehistòria. És difícil trobar una única definició adient, el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC)<sup>3</sup> ens diu que és *Entreteniment, exercici recreatiu, sotmès a regles, en el qual entren en competència l'habilitat i la sort dels participants*. El que està clar és que tots els jocs tenen una sèrie de característiques, de les quals algunes de les més representatives són: és una activitat lliure i lúdica, es localitza en unes limitacions espacials i temporals establertes per endavant, té un caràcter incert, té finalitat en si mateix, és improductiu, sol seguir unes regles i és una activitat convencional que crea un món apart.

Els jocs es poden classificar segons diferents criteris com el nombre de participants, la durada del joc, el tema del joc, el lloc... Si els classifiquem de forma tradicional hi trobem els jocs abstractes, d'estratègia, de taula, de rol, temàtics, d'atzar... entre molts altres. En el meu treball em centraré en els jocs d'atzar i a continuació els descriuré.

### 2.2. Els jocs d'atzar

Els jocs d'atzar són jocs en els quals les possibilitats de guanyar o perdre no depenen de les habilitats del jugador sinó exclusivament de l'atzar. Aquesta és la definició clàssica de joc d'atzar, però amb aquest treball intento demostrar que les possibilitats de guanyar o perdre no depenen només de l'atzar, sinó que hi intervenen altres factors.

Molts jocs combinen l'atzar amb l'habilitat dels jugadors, com ara per calcular les possibilitats que deriven d'una o varies accions o per reduir la probabilitat de resultats desfavorables i augmentar els favorables mitjançant les seves accions.

Els premis de la majoria de jocs estan determinats per la probabilitat estadística d'encertar la combinació escollida. Com més petites siguin les probabilitats d'obtenir la combinació correcta, més gran serà el premi.

Alguns exemples de jocs d'atzar són els següents:

- Casinos (màquines escurabutxaques, ruletes, jocs de daus i cartes, jocs de números,...)
- Apostes a carreres de cavalls, gossos,...
- Loteries de l'Estat
- Bingos i rifes
- Apostes a lligues atlètiques (futbol, golf, bitlles...)

Dels diferents jocs d'atzar, estudiaré les loteries i les apostes de futbol (La Quiniela).

---

<sup>3</sup> Corporació acadèmica, científica i cultural que té per objecte la recerca científica en tots els elements de la cultura catalana. Va ser creada el 18 de juny de 1907 per la Diputació de Barcelona.



### 2.3. Entitats responsables

L'organisme que promou el joc a Espanya s'anomena ONLAE<sup>4</sup>. Es va crear al 1985 per tal d'unificar les diferents institucions que gestionaven els jocs fins aquell moment: el *Patronato de Apuestas Mutuas Deportivas Benéficas* i el *Servicio Nacional de Loterías*. És una entitat pública empresarial adscrita al Ministeri d'Economia i Hisenda d'Espanya<sup>5</sup> a través de la Secretaria d'Estat d'Hisenda i Pressupostos<sup>6</sup>. Actualment s'encarrega de la gestió, explotació i comercialització de vuit jocs diferents: Loteria Nacional, La Primitiva, La Bonoloto, El Gordo, La Quiniela, El Quinigol, la Lototurf i el Quíntuple Plus. A més, també s'encarrega en part de l'Euromillones, que es una loteria que es celebra a vuit països més de la Unió Europea a més del nostre.

Pel que fa a Catalunya, el sistema de jocs d'apostes de La Generalitat s'anomena Loto Catalunya, i està organitzat i gestionat per l'EAJA<sup>7</sup>. Aquesta organització va començar a funcionar el 27 d'abril del 1987 amb la venda de la Loto Ràpid, i a partir de llavors ha posat a la venda altres sortejos com la Lotto 6/49, el Trio, el Súper 10, la Loto Express i el Supertoc. Els ingressos de les recaptacions es destinen al finançament de serveis socials.

---

<sup>4</sup> Organització Nacional de Loteries i Apostes de l'Estat.

<sup>5</sup> Ministeri encarregat de la gestió dels assumptes econòmics i d'hisenda, sent el responsable de preparar els Pressupostos Generals de l'Estat.

<sup>6</sup> La Secretaria d'Estat d'Hisenda i Pressupostos, a més de controlar Les Loteries i Apostes de l'Estat, controla l'Agència Tributària d'Espanya, l'Institut de Crèdit Oficial, l'Institut Nacional d'Estadística, el Tresor Públic i el Catastre.

<sup>7</sup> Entitat Autònoma de Jocs i Apostes.

### 3. DESCRIPCIÓ DE DIFERENTS JOCS D'ATZAR

#### 3.1. Loteries i apostes d'Europa

##### 3.1.1. EUROMILLONES

- Història:

L'Euromillones és una loteria que es juga a Espanya, França, Regne Unit, Àustria, Bèlgica, Irlanda, Luxemburg, Portugal i Suïssa. La idea de crear aquest sorteig va néixer en la dècada dels 90, però el primer es va realitzar el 2002 amb l'arribada de l'euro. Després de molts estudis i investigacions del mercat d'Espanya, França i el Regne Unit es va decidir dur a terme el projecte. El primer sorteig es va realitzar el 13 de febrer del 2004 i només hi participaven tres països, però a l'octubre d'aquell mateix any es van incorporar la resta de països que hi participen actualment.

- Característiques:

El joc de l'Euromillones consisteix en apostar a 7 números. Se n'han d'escollir cinc d'una taula que va de l'1 al 50, i llavors dos més d'una altra taula que va de l'1 al 9, aquests dos números s'anomenen *estrelles*. Aquest joc es juga setmanalment els dimarts i dijous, i el sorteig es fa a París. El preu de cada aposta és de 2 euros.

- Premis:

Categoria	Números encertats	Estrelles encertades	Distribució (50% recaptació)
1 <sup>a</sup>	5	2	32%
2 <sup>a</sup>	5	1	4.8%
3 <sup>a</sup>	5	0	1.6%
4 <sup>a</sup>	4	2	0.8%
5 <sup>a</sup>	4	1	0.7%
6 <sup>a</sup>	4	0	0.7%
7 <sup>a</sup>	3	2	0.5%
8 <sup>a</sup>	2	2	2.3%
9 <sup>a</sup>	3	1	2.2%
10 <sup>a</sup>	3	0	3.7%
11 <sup>a</sup>	1	2	6.5%
12 <sup>a</sup>	2	1	17.6%
13 <sup>a</sup>	2	0	18%
		Fons de reserva <sup>8</sup>	8.6%

Taula 3.1. Distribució dels premis de l'Euromillones

<sup>8</sup> Part dels beneficis no distribuïts del sorteig que s'utilitzaran en cas necessari per cobrir el Fons Garantit de 15 milions d'euros pel primer sorteig dels quatre primers cicles. Un cicle es el conjunt de sorteigs celebrats fins que hi hagi un encertant de la primera categoria.

Només es destina un 50% de la recaptació als premis. La distribució dels premis ve determinada per la quantitat de números o estrelles encertades, segons la següent taula:

Si no hi ha encertants de la primera categoria l'import del Fons Garantit de 15 milions d'euros incrementarà com a Pot el fons de premis de la primera categoria del següent sorteig i així successivament.



Figura 3.1. Bitllet de l'Euromillones fet de manera automàtica



Figura 3.2. Bitllet de l'Euromillones omplert manualment

## 3.2. Loteries i apostes d'Espanya

### 3.2.1. LOTERIA NACIONAL

- Història:

La Loteria Nacional va aparèixer a Espanya durant la Guerra de la Independència. Ciriaco González Carvajal<sup>9</sup> volia aportar fons a la Hisenda Pública i va pensar en “un medio de aumentar los ingresos del erario público sin quebranto de los contribuyentes”, per això va presentar un projecte de Loteria davant les Corts Generals i Extraordinàries a Cadis. La proposta va ser aprovada el 23 de novembre de 1811 i el primer sorteig es va realitzar el 4 de març de 1812 a Cadis. A mesura que els exèrcits napoleònics es retiraven, es va anar celebrant a Ceuta i a tot Andalusia. El 23 de febrer de 1812 es va dur a terme el primer sorteig a Madrid. Actualment, el sorteig de la Loteria Nacional es celebra cada dijous i dissabte, i més d'aquests sorteigs setmanals també es fan Sorteig Extraordinaris, com ara el de la Creu Roja i el de Nadal. En aquests sorteigs especials hi ha més números premiats i es pot guanyar una quantitat més elevada.

<sup>9</sup> Jurista espanyol i ministre del Consell i Cambra d'Índies.

- Característiques:

La loteria es un joc d'atzar que consisteix en encertar els números d'un bitllet prèviament comprat amb els números extrets a l'atzar d'un bombo. El número d'encerts poden ser tots o només una part, i es reparteixen els premis segons la quantitat de números coincidents. Existeixen dos tipus de sortejos, el sistema tradicional i el sistema de bombos múltiples. El sistema tradicional hi ha un bombo pels números (on cada bola representa un número) i l'altre pels premis. Per altra banda, el sistema de bombos múltiples està format per cinc o més bombos que corresponen a les unitats, desenes, centenes... i que contenen deu boles cadascun (del zero al nou) excepte el bombo de les unitats més grans, que tindrà tants números com bitllets hi hagi al sorteig.

El dècim és el bitllet necessari per poder participar en el sorteig, la classificació dels dècims és la següent:

- Un bitllet són deu dècims d'un mateix número i sèrie.
- Una sèrie són cada una de les successions de bitllets numerats del 00000 fins a l'últim número.
- La fracció identifica cada un dels deu dècims d'un mateix bitllet, així no hi ha cap dècim igual encara que tingui el mateix número i sigui de la mateixa sèrie.

Un dècim de la Loteria del Dijous val 3 euros, mentre que un de la Loteria del Dissabte val 6 euros, per això la quantitat dels premis és superior a la Loteria del Dissabte.

- Premis:

El 70% de l'import total dels bitllets impresos és la quantitat que es distribueix en premis, mentre que el 30% restant es queda en mans de l'Estat.

Les categories i premis de la Loteria Nacional del Dijous, tenint en compte que s'emeten 6 sèries de 100.000 dècims a 30 euros cadascun (18.000.000 euros) i d'aquests el 70% és per premis (12.600.000 euros), són les següents:

Números premiats per sèrie	Valor d'un premi	Valor dels premis d'una sèrie	Descripció del premi
1 (només una sèrie)	1.170.000 euros	1.170.000 euros	-
1	300.000 euros	300.000 euros	Una extracció de 5 xifres
1	60.000 euros	60.000 euros	Una extracció de 5 xifres
40	750 euros	30.000 euros	Quatre extraccions de 4 xifres
1.100	150 euros	165.000 euros	Onze extraccions de 3 xifres
3.000	60 euros	180.000 euros	Tres extraccions de 2 xifres
2	7.800 euros	15.600 euros	Número anterior i posterior al del primer premi
2	4.365 euros	8.730 euros	Número anterior i posterior al del segon premi

99	300 euros	29.700 euros	99 números restants de la centena del primer premi
99	300 euros	29.700 euros	99 números restants de la centena del segon premi
9	750 euros	6.750 euros	Bitllets que tinguin les quatre últimes xifres iguals i amb el mateix ordre que les del primer premi
99	300 euros	29.700 euros	Bitllets que tinguin les tres últimes xifres iguals i amb el mateix ordre que les del primer premi
999	150 euros	149.850 euros	Bitllets que tinguin les dues últimes xifres iguals i amb el mateix ordre que les del primer premi
9.999	30 euros	299.970 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la del primer premi
10.000	30 euros	300.000 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la que s'obtingui en la primera extracció especial d'una xifra
10.000	30 euros	300.000 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la que s'obtingui en la segona extracció especial d'una xifra

Taula 3.2. Distribució dels premis de la Loteria Nacional del Dijous

Les categories i premis de la Loteria Nacional del Dissabte, tenim en compte que s'emeten 10 sèries de 100.000 dècims a 60 euros cadascun (60.000.000 euros) i d'aquests el 70% és per premis (42.000.000 euros), és la següent:

Números premiats per sèrie	Valor d'un premi	Valor dels premis d'una sèrie	Descripció del premi
1 (només una sèrie)	2.940.000 euros	2.940.000 euros	-
1	600.000 euros	600.000 euros	Una extracció de 5 xifres
1	120.000 euros	120.000 euros	Una extracció de 5 xifres
40	1.500 euros	60.000 euros	Quatre extraccions de 4 xifres
1.100	300 euros	450.000 euros	Onze extraccions de 3 xifres
3.000	120 euros	360.000 euros	Tres extraccions de 2 xifres
2	12.000 euros	24.000 euros	Número anterior i posterior al del primer premi
2	7.080 euros	14.160 euros	Número anterior i posterior al del segon premi
99	600 euros	59.400 euros	99 números restants de la centena del primer premi
99	600 euros	59.400 euros	99 números restants de la centena del segon premi

99	600 euros	59.400 euros	Bitllets que tinguin les tres últimes xifres iguals i amb el mateix ordre que les del primer
999	300 euros	299.700 euros	Bitllets que tinguin les dues últimes xifres iguals i amb el mateix ordre que les del primer premi
9.999	60 euros	599.940 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la del primer premi
10.000	60 euros	600.000 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la que s'obtingui en la primera extracció especial d'una xifra
10.000	60 euros	600.000 euros	Bitllets que tinguin l'última xifra igual que la que s'obtingui en la primera extracció especial de dues

Taula 3.3. Distribució dels premis de la Loteria Nacional del Dissabte



Figura 3.3. Dècim de Loteria Nacional

### 3.2.2. LA PRIMITIVA

- Història :

La Primitiva és un joc d'atzar creat pel Marquès de Esquilache<sup>10</sup> amb l'objectiu d'aconseguir més diners per les arques del país sense haver de crear un nou impost. El primer sorteig de la Primitiva, en aquell moment coneguda com la *Lotería por Números*, es va celebrar el 10 de desembre del 1763 i el sistema que es va utilitzar va ser molt semblant a l'actual. Després del naixement de la Loteria Nacional al 1812, la *Lotería por Números* es va passar a anomenar la Loteria Primitiva i es va continuar jugant de la mateixa manera fins al 1862, que el govern la va suprimir. Al cap d'un segle, al 1985, es va tornar a celebrar la loteria per un Real Decret publicat en el BOE (Boletín Oficial del Estado) el 7 d'agost del mateix any. Des d'aquell any que s'ha continuat celebrant setmanalment, els dijous i els dissabtes. El preu inicial de cada aposta

<sup>10</sup> Leopoldo de Gregorio, Marquès de Esquilache (1700-1785): diplomàtic i polític espanyol d'origen italià, ministre del rei Carles III.

va ser de 25 pessetes, però amb els anys ha anat augmentant progressivament com també la quantitat dels premis.

- Característiques:

La Primitiva consisteix en escollir un determinat nombre de números de l'1 al 49 per encertar la Combinació Guanyadora del sorteig corresponent, formada per les 6 boles de les 49 que s'extreuen del bombo. Del mateix bombo se n'extreu una bola extra com a número complementari. I d'un altre bombo apart que conté les boles del 0 i el 9, se n'extreu una altra que és el reintegrament. La realització d'una aposta de 6 números dels 49 possibles s'anomena participació, i té un preu de 1€. També es poden fer apostes més complexes que tenen un preu superior.

- Premis:

Els premis es reparteixen depenent del número d'encerts respecte cada participació, és a dir, cada categoria de premi rep un percentatge de recaptació del sorteig que es reparteix en parts iguals entre totes les participacions encertades d'una mateixa categoria. Si alguna categoria no té cap encertant, el premi passa a formar part del Pot del pròxim sorteig. Per aquest motiu el premi rebut no és fix, depèn de la recaptació, del pot acumulat i del número d'encertants.

Un 55% de la recaptació és destinat als premis i la distribució per categories dels premis és la següent:

Categoria	Número d'encerts	Distribució (55% recaptació)
Primera categoria	6	45%
Segona categoria	5 + C	24%
Tercera categoria	5	12%
Quarta categoria	4	19%
Cinquena categoria	3	4€ (premi fix)
-	Reintegrament	0.50€ (premi fix)

Taula 3.4. Distribució dels premis de La Primitiva



Figura 3.4. Bitllet de La Primitiva fet de manera automàtica



Figura 3.5. Bitllet de La Primitiva omplert manualment

### 3.2.3. BONOLOTO

- Història:

El primer sorteig de la Bonoloto es va celebrar el 28 de febrer del 1988 i es va crear per competir amb les grans loteries d'aquell moment, la Primitiva, la Quiniela i la Loteria Nacional. A diferència de la Primitiva, la Bonoloto tenia quatre sorteigs setmanals (dilluns, dimarts, dimecres i divendres) i el preu de cada aposta era de 50 pessetes (cada aposta era de 25 però s'havia de participar, com a mínim, a dues apostes).

A l'any 1991 va aparèixer el reintegrament, que retornava l'import invertit als jugadors que haguessin encertat aquest número. Amb el pas dels anys les apostes van augmentar de preu, fins al preu actual que es va establir a 0.50 euros l'any 2002.

- Característiques:

El joc de la Bonoloto consisteix en encertar 6 números d'una sèrie de xifres entre l'1 i el 49, a més, també s'extreu un altre número anomenat complementari. Existeixen dos tipus de bitllets, un amb una banda superior verda i vermella i l'altre només vermella. El bitllet vermell i verd es va crear per participar només en un sol sorteig dels quatre setmanals, mentre que el vermell serveix per participar en tots els sortejos que faltin per fer durant la setmana.

- Premis:

Igual que a la Primitiva, un 55% de la recaptació és destinat als premis, i la distribució per categories dels premis es pot veure en la taula següent:



Categoria	Número d'encerts	Distribució (55% recaptació)
Primera categoria	6	45%
Segona categoria	5 + C	24%
Tercera categoria	5	12%
Quarta categoria	4	19%
Cinquena categoria	3	4€ (premi fix)
-	Reintegrament	0.50€ (premi fix)

Taula 3.5. Distribució dels premis de la Bonoloto

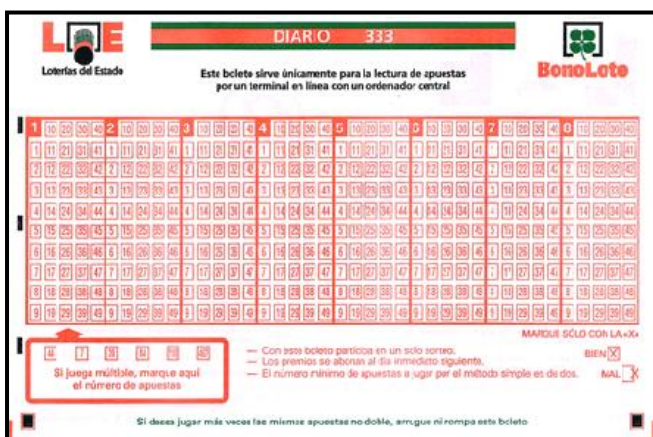


Figura 3.6. Bitllet diari de la Bonoloto omplert manualment



Figura 3.7. Bitllet de la Bonoloto fet de manera automàtica

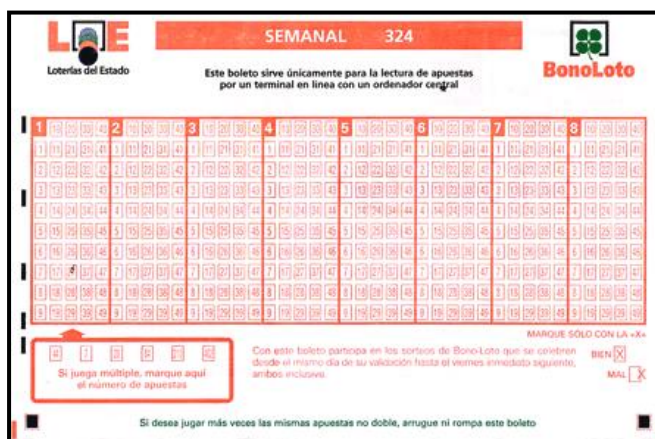


Figura 3.8. Bitllet setmanal de la Bonoloto omplert manualment

### 3.2.4. LA QUINIELA

- Història:

La Quiniela és un dels jocs més populars de tot Espanya. La primera vegada que es va poder jugar-hi va ser el 22 de setembre de 1946, degut a la gran afició que hi havia pel futbol ja des d'aquell moment. El govern va voler regular les apostes futbolístiques i al 1946 va crear el *Patronato de Apuestas Mutuas Benéficas* que s'encarregava d'administrar, recaptar i pagar els premis. La primera butlleta estava formada per set partits i va costar 2 pessetes. En aquesta primera jornada es van segellar 38.530 butlletes i es van recaptar un total de 77.060 pessetes.

- Característiques:

El joc de la Quiniela consisteix en encertar els pronòstics dels partits de la primera i la segona divisió de futbol que es juguen en una jornada de lliga. Als inicis del joc el sistema d'escrutini era molt més complex que actualment perquè els encertants havien d'endevinar el resultat exacte dels partits. És a dir, s'assignava una puntuació a cada aposta en funció del resultat i guanyava qui tingués més punts, les puntuacions eren les següents:

- 30 punts si el resultat era exacte.
- 20 punts si s'encertava el guanyador i hi havia la mateixa diferència de gols.
- 19 punts si s'encertava el guanyador i hi havia diferència d'un gol.
- 18 punts si s'encertava el guanyador i hi havia diferència de dos gols.

I així successivament sempre i quan s'encertés el guanyador.

En els casos d'empat:

- 19 punts si hi havia un gol de diferència.
- 18 punts si hi havia dos gols de diferència.

Aquest sistema va ser vigent les dues primeres temporades (1946-1947, 1947-1948) fins que al 1948 es va implantar el sistema 1X2 i una butlleta amb 14 resultats, el qual continua existint fins avui amb algunes variacions. Aquest sistema es basa en apostar per cada partit escollint entre tres diferents resultats: victòria local (1), empat (x) o victòria del visitant (2). Abans es donaven premis pels encertants de 14, 13 o 12 resultats, però a partir de l'any 1988 es va afegir un partit més a la butlleta i es va establir un nou premi anomenat *Pleno al 15*, que s'ha mantingut fins ara. El preu de cada aposta és de 0.50 euros.

- Premis:

Els primers butlletins premiats van ser 62, dels quals dos eren de la primera categoria i van rebre 9.603 pessetes, de la segona categoria n'hi va haver un que va cobrar 7.202 pessetes, un altre de la tercera categoria amb un premi de 4.801 pessetes i 58 de la quarta, que van cobrar 59 pessetes. En aquests primers butlletins es destinava només el 45% per premis, ja que un altre 45% era per beneficència i el 10% restant era per les despeses de gestió. Actualment es destina als premis un 55% de la recaptació, que es distribueix de la següent manera:

<b>Categoria</b>	<b>Número d'encerts</b>	<b>Distribució (55% recaptació)</b>
Especial	15	10%
Primera	14	12%
Segona	13	8%
Tercera	12	8%
Quarta	11	8%
Cinquena	10	9%

Taula 3.6. Distribució dels premis de La Quiniela



- Premis:

La distribució dels premis és variable segons la recaptació i el percentatge es refereix a la diferència entre la quantitat destinada a premis i els premis del reintegrament. Si s'encerta el reintegrament el premi és fix i equival a l'import de l'aposta. Si no hi ha encertants de la primera i segona categoria, l'import d'aquests premis s'acumula pel sorteig següent. Però sempre es garanteix un premi mínim de 600.000 euros per la primera categoria.

<b>Categoria</b>	<b>Número d'encerts</b>	<b>Distribució</b>
Primera	6	50%
Segona	5+C	5%
Tercera	5	5%
Quarta	4	10%
Cinquena	3	30%
-	Reintegrament	1 € per aposta (premi fix)

Taula 3.7. Distribució dels premis de la Lotto 6/49

La distribució dels premis del joc del Jòquer és fixa i és la següent:

<b>Número d'encerts</b>	<b>Distribució</b>
6 xifres	100.000 €
5 últimes xifres	10.000 €
4 últimes xifres	1.000 €
3 últimes xifres	100 €
2 últimes xifres	10 €
Última xifra	1 €

Taula 3.8. Distribució dels premis del Jòquer

L'estructura dels premis del Combi 3 és fixa i és la següent:

<b>Número d'encerts</b>	<b>Distribució</b>
9 encerts	3.000 €
8 encerts	200 €
7 encerts	50 €
6 encerts	15 €
5 encerts	4 €
4 encerts	1 €

Taula 3.9. Distribució dels premis del Combi 3



Figura 3.10. Bitllet de la Lotto 6/49 fet de forma automàtica

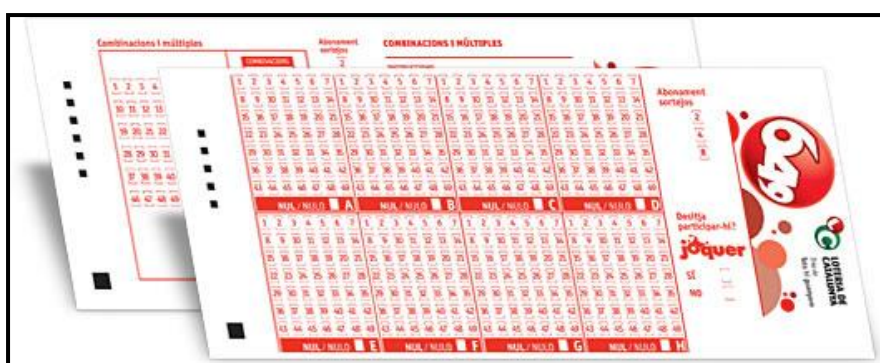


Figura 3.11. Butlleta de la Lotto 6/49 omplert manualment

### 3.3.2. TRIO

- Història:

El primer sorteig del Trio va ser al 1988. Se celebra un sorteig tots els dies de l'any a la seu de la Loteria de Catalunya a Barcelona.

- Característiques:

El jugador ha d'escollir 3 números del 0 al 9. Hi ha un bombo que conté les 10 boles numerades del 0 al 9, del qual se n'extreu una bola corresponent a les centenes que després es torna a introduir al bombo, i seguidament es repeteix dues vegades més aquest procediment per tal d'extreure les boles que corresponents a les desenes i a les unitats. El número guanyador estarà format per aquestes 3 xifres que defineixen les diferents categories de premis. A més, es pot jugar al Supertrio, que és una opció de joc integrada dintre el Trio en què el jugador paga el doble de l'aposta i, si fa el ple, triplica el premi. El preu de l'aposta no és fix, pot ser de 0.50, 1, 2, 3, 6, 12 o 15 euros, i també hi ha la possibilitat d'abonar-se a 2, 3, 4, 5, 6, 7 o 14 sorteigs consecutius.

- Premis:

Els premis varien segons el nombre de números encertats, la posició que ocupen i l'import de l'aposta efectuada. Així doncs, hi ha 5 categories de premis per al Trio i una per al Supertrio:

Número d'encerts	Premi per a cada guanyador segons l'import marcat per aposta i sorteig						
	0.50 €	1 €	2 €	3 €	6 €	12 €	15 €
xxx + Supertrio	375	750	1.500	2.250	4.500	9.000	11.250
xxx	125	250	500	750	1.500	3.000	3.750
xx-	2.50	5	10	15	30	60	75
-xx	2.50	5	10	15	30	60	75
x-x	2.50	5	10	15	30	60	75
--x	0.50	1	2	3	6	12	15

Taula 3.10. Distribució dels premis del Trio



Figura 3.12. Butlleta del Trio omplerta manualment



Figura 3.13. Bitllet del Trio fet de manera automàtica

### 3.3.3. SUPER 10

- Història:

El primer sorteig del Super 10 es va realitzar al 1990. Se celebra un sorteig tots els dies de l'any a la seu de la Loteria de Catalunya a Barcelona.

- Característiques:

El jugador ha de triar 10 números de 68. La combinació guanyadora està formada per 20 números que permeten definir les diferents categories de premis. A més, també es pot participar a Diana, que és una opció del joc amb la qual es triplica el premi. Per obtenir el número Diana, es fa un segon sorteig amb els 20 números de la combinació guanyadora a partir dels quals se n'extreu una bola. El preu de l'aposta pot ser de 0.60, 1, 2 o 3 euros i hi ha la possibilitat d'abonar-se a 2, 3, 5 o 7 sorteigs consecutius. El preu de participar en l'opció Diana és el mateix que l'escollit per al Super 10.

- Premis:

Els premis són fixos i varien segons els números encertats i l'import de l'aposta efectuada. Així doncs, hi ha 7 categories de premis:

Números encertats	Premi per a cada guanyador segons el preu de l'aposta escollida			
	0,60 €	1 €	2 €	3 €
10	60.000	100.000	200.000	300.000
9	1.200	2.000	4.000	6.000
8	120	200	400	600
7	12	20	40	60
6	1,20	2	4	6
5	0,60	1	2	3
0	1,20	2	4	6

Taula 3.11. Distribució dels premis del Super 10

Per al Super 10 amb l'opció Diana hi ha les 10 categories de premis següents (es triplica el premi):

Números encertats	Premi per a cada guanyador segons el preu de l'aposta escollida			
	0.60 €	1 €	2 €	3 €
10 amb Diana	180.000	300.000	600.000	900.000
9 amb Diana	3.600	6.000	12.000	18.000
8 amb Diana	360	600	1.200	1.800
7 amb Diana	36	60	120	180
6 amb Diana	3,60	6	12	18
5 amb Diana	1,80	1	6	9
4 amb Diana	0,60	1	2	3
3 amb Diana	0,60	1	2	3
2 amb Diana	1,20	2	4	6
Diana	6,00	10	20	30

Taula 3.12. Distribució dels premis del Super 10 amb Diana

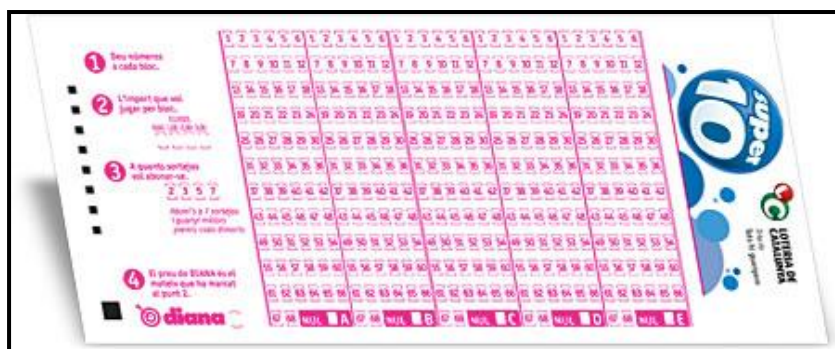


Figura 3.14. Butlleta del Super 10 omplerta manualment



Figura 3.15. Bitllet del Super 10 fet de manera automàtica

### 3.3.4. LOTO EXPRESS

- Història:

El primer sorteig de la Loto Express es va fer al 1993. Actualment se celebra un sorteig cada 4 minuts (des de les 7 del matí fins les 12 de la nit) tots els dies de l'any, mitjançant un procés informàtic. Els sorteigs es fan als Serveis Centrals de la Loteria de Catalunya, a Molins de Rei, i es pot fer el seguiment del sorteig mitjançant els monitors específics instal·lats en 800 punts de venda.

- Característiques:

El joc consisteix en triar de 4 a 10 números de 70, i la combinació guanyadora està formada per 20 números que permeten definir les diferents categories de premis. Igual que el Super 10, existeix l'opció de Diana amb la qual es pot arribar a triplicar el premi. El número Diana és triat a l'atzar dels 20 de la combinació guanyadora de la Loto Express. El preu de l'aposta pot ser de 0.60, 1, 2 o 3 euros i hi ha la possibilitat d'abonar-se a 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50 o 100 sorteigs consecutius. El preu de participar en l'opció Diana és el mateix que l'escollit per la Loto Express.



- Premis:

Els premis són fixos i predeterminats segons l'import jugat i l'aposta escollida. Per cada aposta hi ha diferents categories de premis que depenen dels números encertats. A més, en totes les apostes, si no s'encerta cap número es retorna l'import que s'ha jugat.

Números encertats	Premi per a cada guanyador segons el preu de l'aposta escollida			
	0.60 €	1 €	2 €	3 €
10	30.000	50.000	100.000	150.000
9	600	1.000	2.000	3.000
8	60	100	200	300
7	6	10	20	30
6	1,80	3	6	9
5	1,20	2	4	6
4	0,60	1	2	3
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3
9	6.000	10.000	20.000	30.000
8	300	500	1.000	1.500
7	60	100	200	300
6	6	10	20	30
5	1,80	3	6	9
4	-	-	-	-
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3
8	3.000	5.000	10.000	15.000
7	150	250	500	750
6	18	30	60	90
5	3	5	10	15
4	-	-	-	-
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3
7	900	1.500	3.000	4.500
6	60	100	200	300
5	9	15	30	45
4	-	-	-	-
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3
6	300	500	1.000	1.500
5	12	20	40	60
4	3	5	10	15
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3
5	60	100	200	300
4	9	15	30	45
3	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3

4	30	50	100	150
3	0,60	1	2	3
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-
0	0,60	1	2	3

Taula 3.13. Distribució dels premis de la Loto Express

Distribució de premis de la Loto Express amb l'opció Diana:

Números encertats	Premi per a cada guanyador segons el preu de l'aposta escollida			
	0.60 €	1 €	2 €	3 €
10 amb Diana	90.000	150.000	300.000	450.000
9 amb Diana	1.800	3.000	6.000	9.000
8 amb Diana	180	300	600	900
7 amb Diana	30	50	100	150
6 amb Diana	7.80	13	26	39
5 amb Diana	3,60	6	12	18
4 amb Diana	2,40	4	8	12
3 amb Diana	1,20	2	4	6
2 amb Diana	1,20	2	4	6
Diana	6	10	20	30
9 amb Diana	18.000	30.000	60.000	90.000
8 amb Diana	900	1.500	3.000	4.500
7 amb Diana	150	250	500	750
6 amb Diana	15	25	50	75
5 amb Diana	4,80	8	16	24
4 amb Diana	2,40	4	8	12
3 amb Diana	1,20	2	4	6
2 amb Diana	1,20	2	4	6
Diana	6	10	20	30
8 amb Diana	9.000	15.000	30.000	45.000
7 amb Diana	390	650	1.300	1.950
6 amb Diana	42	70	140	210
5 amb Diana	9	15	30	45
4 amb Diana	2,40	4	8	12
3 amb Diana	1,20	2	4	6
2 amb Diana	1,20	2	4	6
Diana	6	10	20	30
7 amb Diana	2.700	4.500	9.000	13.500
6 amb Diana	150	250	500	750
5 amb Diana	18	30	60	90
4 amb Diana	2,40	4	8	12
3 amb Diana	1,80	3	6	9
2 amb Diana	1,80	3	6	9
Diana	6	10	20	30
6 amb Diana	900	1.500	3.000	4.500
5 amb Diana	42	70	140	210
4 amb Diana	9	15	30	45
3 amb Diana	1,80	3	6	9
2 amb Diana	1,80	3	6	9
Diana	6	10	20	30
5 amb Diana	210	350	700	1.050
4 amb Diana	24	40	80	120
3 amb Diana	3	5	10	15
2 amb Diana	3	5	10	15
Diana	6	10	20	30
4 amb Diana	120	200	400	600
3 amb Diana	6	11	22	33
2 amb Diana	3	5	10	15
Diana	6	10	20	30

Taula 3.14. Distribució dels premis de la Loto Express amb Diana



Figura 3.16. Butlleta de la Loto Express omplerta manualment



Figura 3.17. Bitllet del Super 10 fet de manera automàtica

## 4. RISCOS DEL JOC

### 4.1. Concepte d'addicció

Segons l'Enciclopèdia Catalana<sup>12</sup>, es defineix addicció com *tendència, inclinació forta a alguna cosa*. Aquesta inclinació es materialitza amb una pèrdua de control i amb una interferència negativa greu en la salut o en la vida quotidiana de la persona, i es podria dir que al final acaba generant la pèrdua de llibertat.

El terme addicció és utilitzat en un ventall molt ampli de contextos, entre els quals destaquen l'addicció a les drogues (drogoaddicció), al tabac (tabaquisme), a l'alcohol (alcoholisme), a l'ordinador, al joc (ludopatia)... Pel tema del meu treball explicaré amb més detall la ludopatia.

### 4.2. Ludopatia

El joc és una activitat necessària per als éssers humans de molta importància en l'esfera social, ja que és molt útil per a adquirir i desenvolupar capacitats intel·lectuals, motores o afectives sempre i quan es realitzin d'una forma gustosa i sense sentir cap mena d'obligació.

Així doncs, quan un individu sent una incontrolable necessitat de jugar, menyspreant qualsevol conseqüència negativa, diem que té una addicció al joc, la ludopatia.

La ludopatia és un trastorn reconegut per l'OMS<sup>13</sup> que el recull en la seva Classificació Internacional de Malalties l'any 1992, però ja des del 1980 que l'Associació Americana de Psiquiatria (APA) en va plantejar la seva definició i alguns criteris de diagnòstic en el Manual Diagnòstic i Estadístic (DSM-III). L'APA descrivia aquest trastorn com *una conducta de joc inadaptada, persistent i recurrent, que altera la continuïtat de la vida personal, familiar o professional*. Actualment, i degut a l'augment del trastorn a diferents països, podríem descriure la ludopatia com un trastorn del comportament, entenent el comportament com l'expressió de la psicologia de l'individu, que consisteix en la pèrdua de control en relació amb un joc d'apostes, i això incideix tant en les dificultats que suposa per l'individu deixar de jugar quan està apostant, com mantenir-se sense apostar definitivament en aquell joc o en altres. Aquestes dificultats segueixen un model additiu en la majoria dels casos, tant en la manera en com s'adquireix o manté el trastorn, com en les distorsions de pensament i emocionals que provoca, i desgraciadament, en els efectes desastrosos en les relacions familiars i amoroses del jugador.

---

<sup>12</sup> Començà a sortir per fascicles el 1968, editada per Edicions 62, i recull alfabèticament tota mena d'entrades històriques, geogràfiques, culturals, etc. de tot el món.

<sup>13</sup> Organització Mundial de la Salut. És una agència de l'Organització de les Nacions Unides (ONU) amb seu a Ginebra (Suïssa) que actua com a autoritat coordinadora en temes de salut pública internacional des del 7 d'abril de 1948.

### 4.3. Límits entre un joc responsable i un joc problemàtic

Una persona saludable no recorre als jocs d'apostes quan té un problema, al contrari, quan juga ho fa per divertir-se però sempre d'una manera controlada. Per saber si per una persona el joc deixa de ser una afició i es converteix en una addicció hem de tenir en compte un conjunt de factors.

Un joc es considera responsable si es realitza per divertir-se i no per solucionar problemes econòmics, si s'aposta amb companyia, si es fixa un límit de temps i de diners abans de començar a jugar-hi, si s'hi juga espaiadament, si no es deixen de realitzar les obligacions diàries, si es tenen altres aficions i es mantenen les amistats habituals, si no s'hi juga quan està baix d'ànim, nerviós...

Així doncs, podem considerar que un joc és problemàtic si s'aposta molt freqüentment, si s'inverteixen la majoria dels diners sobrants en el joc, si es parla contínuament d'apostes, si s'intenta apostar menys però sense aconseguir-ho, si s'intenten recuperar els diners perduts, si es diuen mentides relacionades amb el joc, si es demanen diners per apostar, si s'infravaloren les pèrdues, si no es realitzen les obligacions diàries d'una manera habitual, si t'irrites quan apostes...

Podem diferenciar tres fases en la progressió d'un joc responsable a un joc problemàtic, i depenent de la persona es poden produir a ritmes molt diferents. Les tres fases són les següents:

Fase de guany → Fase de pèrdua → Fase de desesperació

A continuació descriuré breument les característiques principals de cada un d'elles.

- Fase de guany:

Aquesta fase es caracteritza perquè es juga ocasionalment i per això es poden obtenir guanys freqüents. Això fa que es generin més esperances de guanyar, i per tant que augmenti la freqüència del joc i que augmenti també la quantitat de diners que s'aposten.

- Fase de pèrdua:

En aquesta fase es comença a jugar sol i només es pensa en jugar, fins que s'arriba a un punt que no pots parar. Això es veu reflectit a la vida del jugador, tant en l'àmbit familiar, laboral com social: perd hores de feina, no surt amb els amics, es descuiden de les obligacions quotidianes...

A més, es comença un període de pèrdues que s'allarguen en el temps, i en conseqüència s'han de demanar préstecs per cobrir el deute i poder continuar jugant per recuperar els diners perduts.

La incapacitat de pagar aquests deutes provoca que es diguin mentides. També és en aquest moment que es poden apreciar canvis en la personalitat del jugador, es mostra més irritable i inquiet. Creu que l'única solució per sortir d'aquesta espiral és jugar més i amb apostes més elevades i per això li cal demanar préstecs més alts, d'aquesta manera el deute només fa que agreujar-se.

- Fase de desesperació:

Un dels trets característics d'aquesta fase és que augmenten considerablement tant el temps com els diners destinats al joc, i de vegades es poden cometre actes il·legals. A més, empitjoren les relacions personals, es fan més tenses.

També és en aquest moment que apareixen els remordiments, culpen els altres de la situació en que es troben i la seva reputació es veu greument afectada.

#### **4.4. Conseqüències de la ludopatia**

Les diferents conseqüències provocades per l'addició al joc es poden ordenar segons les àrees de la persona que afecten:

- Àmbit personal: Els jugadors addictes al joc no es senten bé emocionalment. Com ja he mencionat anteriorment, perden diners, diuen mentides als amics i familiars, no saben com afrontar els seus deutes, no realitzen les feines rutinàries que abans feien... Tot això els genera un grau de malestar, i fins i tot els pot provocar tenir un concepte d'ells mateixos molt deteriorat. Com a conseqüència d'aquesta situació, s'aïllen dels altres sense adonar-se i també poden recórrer al consum excessiu d'alcohol.

- Pla econòmic: Acostumen a tenir una mala situació econòmica amb deutes de grans quantitats. També són habituals els robatoris i l'obligació a les famílies a adaptar-se a canvis econòmics relacionats amb l'addicció del joc.

- Estudis: Com que els jugadors tenen pensaments constants en el joc, fa que no puguin concentrar-se en els estudis i es sentin desmotivats pel treball personal, i llavors és quan es veu afectat el rendiment necessari per poder assolir el curs.

- Entorn familiar: Com que el jugador destina molt de temps al joc fa que no en pugui dedicar tant als pares, germans i a la resta de la família. Això fa que els familiars puguin reaccionar amb aversió envers ell.

- Vida social: Els jugadors que pateixen aquest trastorn disposen de poc temps per dedicar als amics i acaben perdent les amistats que tenien. A més, aquells amics que els hi havia deixat diners i que no han recuperat, no volen saber res més d'ells. Tot això provoca que el jugador es senti més sol i deprimat.

- Actes delictius: Els jugadors que tenen problemes amb el joc sovint estan implicats en actes penats per la llei, com ara: falsificació de xecs, furts, impagament de lloguer de l'habitatge i d'altres factures...

#### **4.5. Prevenció de la ludopatia**

El programa de prevenció amb persones que han mostrat signes d'addició al joc consta dels sis apartats següents:

- Informació sobre el joc: Se'ls hi ha de proporcionar informació sobre les addicions, i més específicament l'addició al joc i les conseqüències que pot tenir.
- Autoestima: Se'ls hi ha de fer entendre que la base d'un comportament saludable és tenir una autoestima positiva, ja que ens condiona la manera en què assumim els reptes i ens comportem amb els altres.
- Presa de decisions i resolució de conflictes: S'ha de potenciar el desenvolupament d'un pensament crític, fer front a la pressió social del grup al qual es pertany i també fomentar habilitats per prendre decisions per així poder millorar l'autoestima i pel creixement personal.
- Control emocional i fer front a l'estrès: Comprendre les reaccions emocionals i aprendre tècniques per saber-les afrontar de forma adequada, per així no patir innecessàriament.
- Habilitats socials i de comunicació: Analitzar com és una relació personal satisfactòria i proporcionar les habilitats necessàries per relacionar-se amb els altres. Al superar la timidesa s'adquireixen les pautes de comportament adients per afrontar amb èxit les situacions socials.
- Habilitats d'oci: Investigar i decidir responsablement noves activitats d'oci que ajudin a sentir noves sensacions i també favorables pel desenvolupament personal.

## 5. ELS INICIS DE LA TEORIA DE LA PROBABILITAT

### 5.1. Context històric i precursors

En diverses excavacions arqueològiques assíries<sup>14</sup> i sumèries<sup>15</sup> s'han trobat uns ossos extrems del taló de xais, cèrvols i d'altres animals de mida semblant a aquests. Aquest os anomenat astràgal o tal·lus es creu que pot ser l'avantpassat del nostre dau, perquè si es llença sobre una superfície anivellada pot caure en quatre posicions diferents, la probabilitat de les quals no és la mateixa. No se sap si l'utilitzaven amb una finalitat religiosa, d'entreteniment o per les dues coses, però cada astràgal té unes característiques pròpies i per això qualsevol estudi sobre el seu comportament general estava condemnat al fracàs.



Figura 5.1. Astràgals

FONT:<http://culturacubica.wordpress.com/2011/02/10/una-historia-cubica/>

No se sap en quin moment exacte els astràgals van anar desapareixent per donar pas als daus, però s'han trobat daus a diferents parts del món datats aproximadament de l'any 1200 a.C. Van ser originaris d'Orient i es van estendre fins a Egipte i Grècia passant per l'Índia i Aràbia. Antigament es feien servir com a oracles i a les cerimònies religioses, també com a instruments per desvelar la fortuna i el destí dels individus i a més es practicaven jocs amb daus però no se'n sap res de les regles específiques amb les que jugaven. Quan va aparèixer el cristianisme<sup>16</sup> es va acabar la utilització pública dels daus com a mitjà per conèixer el futur, però les pràctiques endevinatòries privades i els jocs han continuat fins els nostres dies.

L'Edat Mitjana<sup>17</sup> va acabar amb la caiguda de Constantinoble<sup>18</sup> a l'any 1453, donant lloc al Renaixement<sup>19</sup>. Aquesta etapa destaca per l'activitat mercantil, industrial, artística, arquitectònica i científica, i també és el moment en què apareix una nova relació de l'home amb la natura. És a partir d'aquest moment que, amb l'avanç de les matemàtiques i la filosofia, s'intenta donar una explicació coherent a molts fenòmens que seguien un patró aleatori, és a dir, fenòmens que era impossible predir amb certesa el seu resultat. En aquell temps eren bàsicament els jocs d'atzar. És en aquest període que comencen a sorgir inquietuds de com

<sup>14</sup> Assíria fou un Imperi hegemònic de la zona de Mesopotàmia.

<sup>15</sup> Sumer fou una regió al sud de l'antiga Mesopotàmia, entre la desembocadura dels rius Èufrates i Tigris. Els sumeris estan considerats com la primera i més antiga civilització del món.

<sup>16</sup> Religió abrahàmica monoteïsta basada en la vida i els ensenyaments de Jesús de Nazaret, que es va originar al segle I a partir del judaisme.

<sup>17</sup> Període intermedi de la història d'Europa. Els seu inici és el segle V (any 476) i el final al segle XV (1453).

<sup>18</sup> Nom antic de l'actual ciutat d'Istanbul, a Turquia.

<sup>19</sup> Època artística i cultural que dona començament a l'Edat Moderna i en què es reflecteixen els ideals del moviment humanista que va desenvolupar-se a Europa el segle XVI.



comptabilitzar el nombre de possibles resultats d'un dau llençat varies vegades, o problemes de com repartir els guanys dels jugadors si s'interromp el joc abans d'acabar-lo. En aquell moment, els intel·lectuals de l'època no tenien la idea de modelitzar l'atzar mitjançant les matemàtiques.

Un dels primers problemes dedicats a comptabilitzar el número de possibles resultats al llençar un dau diverses vegades el trobem al poema *De Vetula* de Richard de Fournival<sup>20</sup> (1200-1250) escrit a l'Edat Mitjana. En el poema s'afirma de forma correcta que si es llancen tres daus hi han 216 combinacions possibles i calcula encertadament els diferents valors per la suma dels treus daus.



Figura 5.2. Luca Pacioli

FONT:<http://paciolialinaabby.blogspot.com/>

Tot i això, el problema més important relacionat amb els jocs d'atzar va ser conegut com "el problema del repartiment d'apostes" que distribuïa els guanys entre els jugadors quan la partida s'interrompia abans d'acabar-la. Aquest problema el va emprendre Luca Pacioli<sup>21</sup> (1445-1517) que al 1487 va proposar aquests dos problemes particulars: un joc en el que el premi és de 22 ducats<sup>22</sup> i consisteix en arribar als 60 punts, però s'interromp quan un equip en porta 50 i l'altre 30; i tres arquers que competeixen per un premi de 6 ducats que s'obté un cop es facin 6 dianes, sent interromput quan el primer arquer porta 4 dianes, el segon 3 i el tercer 2. Així doncs, com s'han de repartir els premis entre els adversaris? Pacioli va proposar que el premi del primer joc s'hauria de repartir en funció de les victòries obtingudes anteriorment, així doncs, el premi del primer equip seria de  $60 \times 5 / 8$  ducats i el del segon equip de  $60 \times 3 / 8$ . Referent al problema dels arquers, el premi es dividia en la proporció  $4/9$ ,  $3/9$  i  $2/9$ . Més endavant es va demostrar que aquesta solució obtinguda per Pacioli és incorrecta.

Va ser Girolamo Cardano<sup>23</sup> (1501-1576) qui va escriure el primer llibre sobre els jocs d'atzar anomenat "*Liber de Ludo Aleae*" l'any 1563, però no va ser



Figura 5.3. Girolamo Cardano

FONT:[http://aprendamospoli-nomios.blogspot.com/2010\\_05\\_01\\_archive.html](http://aprendamospoli-nomios.blogspot.com/2010_05_01_archive.html)

<sup>20</sup> Va néixer a Amiens (França) i fou un filòsof medieval i trobador conegut per l'obra *Bestiaire d'amour*.

<sup>21</sup> El seu nom complert és Fray Luca Bartolomeo de Pacioli. Va néixer a Sansepolcro i fou un cèlebre franciscà i matemàtic italià (un dels pioners del càlcul de probabilitats i realitzador de grans aportacions a la comptabilitat).

<sup>22</sup> Segons l'IEC, moneda d'or, i ocasionalment d'argent, encunyada a diferents ciutats i països, especialment la que segueix el patró de la veneciana, iniciada al segle XIII.

<sup>23</sup> Va néixer a Pavia (Itàlia) i fou un famós matemàtic, metge, astròleg, jugador d'atzar i filòsof.

publicat fins al 1663, quasi cent anys després de la mort de l'autor. En el llibre hi trobem la primera formulació explícita del concepte de lleis de l'atzar i hi ha resolt problemes relatius a diverses tirades de dau, i també alguns d'astràgals i de cartes mitjançant el recompte de tots els casos possibles. A més a més, Cardano també es va interessar anteriorment pel problema del repartiment d'apostes i al 1539 va arribar a la conclusió de que la solució de Pacioli era incorrecte. L'error era que al considerar només el nombre de jocs guanyats de cada equip, no comptava quants jocs haurien de guanyar per obtenir el premi. Cardano va proposar una altra solució, però en general és incorrecta, només es donen resultats vàlids en casos particulars.



Figura 5.4. Niccolò Tartaglia  
FONT:[http://www.ugr.es/~eaznar/fotos\\_tartaglia.htm](http://www.ugr.es/~eaznar/fotos_tartaglia.htm)

Niccolò Tartaglia<sup>24</sup> (1499 – 1557) també va intentar resoldre el problema, i al 1556 va publicar un llibre en el que es descartava la solució de Pacioli i en donava una de pròpia. Tanmateix, ell mateix va ser conscient que la seva solució tampoc era la correcta des del punt de vista matemàtic, però que aniria força bé per fer un repartiment just.

A més a més d'aquests autors, també cal destacar Galileo Galilei<sup>25</sup> (1564-1642) que sense conèixer el treball fet anteriorment per Cardano, va elaborar l'obra "*Sopra le Scoperte dei Dadi*"<sup>26</sup> que no va ser publicada fins al 1718.

Tant en el treball fet per Cardano com el de Galileu apareixen de forma definida els elements que constitueixen l'enfocament que actualment coneixem com l'Enfocament Clàssic de la Probabilitat. Aquest enfocament es basa en la suposició que cada resultat és possible de la mateixa manera i diu que: si hi ha  $x$  possibles resultats favorables a l'ocurrència d'un esdeveniment  $A$ , i  $z$  possibles resultats desfavorables a l'ocurrència d' $A$ , i tots els resultats són igualment possibles i no poden ocórrer els dos a la mateixa vegada, llavors la probabilitat de que passi  $A$  és:

$$P(A) = \frac{x}{(x + z)}$$

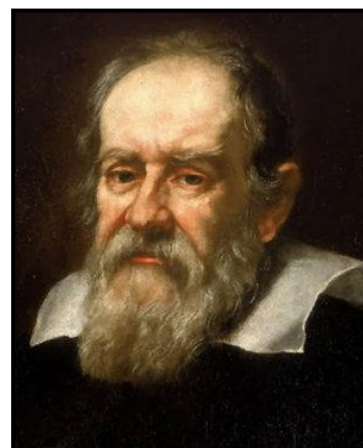


Figura 5.5. Galileo Galilei  
FONT:[http://es.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei](http://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei)

<sup>24</sup> Va néixer a Brescia (Itàlia) i fou matemàtic. Se l'anomenava Tartaglia el tartamut.

<sup>25</sup> Va néixer a Pisa (Itàlia), i va ser un físic, matemàtic i filòsof que va tenir un paper molt important durant la Revolució Científica. És considerat el "pare de la ciència moderna" i als Països Catalans és conegut amb el nom de Galileu.

<sup>26</sup> Veure apartat 6.1.1. i l'annex 1.

## 5.2. Naixement de la teoria de la probabilitat



Figura 5.6. Cavaller de Méré  
FONT:<http://www.frasesfamosas.com.br/de/antoine-gombaud.html>

L'any 1654, Antonie Gombaud<sup>27</sup> (1607-1684), conegut com el Cavaller de Méré, va proposar a Blaise Pascal<sup>28</sup> (1623-1662) dos famosos problemes, uns dels quals és conegut com a Problema dels Punts o Problema de les Apostes: si una partida s'acaba abans que cap dels jugadors hagi arribat al nombre de partides pel qual es va apostar, com s'haurà de repartir la quantitat total apostada?. Aquest problema, com ja he explicat a l'apartat anterior, ja havia estat estudiat per matemàtics italians el segle anterior però les solucions que van proposar no eren les correctes.

Aquest problema juntament amb d'altres plantejats pel Cavaller de Méré a Pascal sobre qüestions relacionades amb diferents jocs d'atzar, van donar lloc a una correspondència entre el propi Pascal i Pierre de Fermat<sup>29</sup> (1601-1665).



Figura 5.7. Blaise Pascal  
FONT:[http://es.wikipedia.org/wiki/Blaise\\_Pascal](http://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal)



Figura 5.8. Pierre de Fermat  
FONT:<http://gaussianos.com/tag/pierre-de-fermat/>

Aquesta correspondència és, per a molts autors, l'origen del càlcul de probabilitats modern. Un dels altres problemes històrics<sup>30</sup> que van ajudar a formalitzar la teoria de la probabilitat va ser solucionat per Pascal i Fermat, però cap d'ells va exposar el resultat per escrit. Va ser

<sup>27</sup> Va néixer a Poitou (França) i fou un escriptor. Va adoptar el títol de Cavaller per assignar-li al personatge dels seus diàlegs que representava les seves pròpies opinions.

<sup>28</sup> Va néixer a Clarmont-Ferrand (França) i fou filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg, i és considerat un dels personatges més brillants de la saviesa occidental.

<sup>29</sup> Va néixer a Beaumont-de-Lomagne (França) i fou un advocat i matemàtic occità que sobresortí pels seus treballs matemàtics.

<sup>30</sup> Veure l'apartat 6.1.2. on hi ha la resolució del problema i l'annex 2 on hi ha la carta on es planteja el problema.

l'holandès Christiaan Huygens<sup>31</sup> (1629-1695) qui al 1657 va publicar una breu obra titulada “*De Ratiocinnis in ludo aleae*” inspirada en la correspondència mantinguda entre Pascal i Fermat. En aquest treball Huygens resol el Problema dels Punts de forma general utilitzant un mètode diferent a l'emprat per Pascal i Fermat, va introduir el primer concepte que distingeix la Teoria de la Probabilitat de les altres branques de les matemàtiques, el concepte del valor esperat o l'esperança matemàtica<sup>32</sup>.



Figura 5.9. Christiaan Huygens  
FONT: <http://optica-fiscadelojo.blogspot.com/>

---

<sup>31</sup> Va néixer a La Haia (Països Baixos) i fou un físic i astrònom neerlandès.

<sup>32</sup> Benefici mitjà de cada partida si es repetís moltes vegades un joc.

## 6. TREBALL PRÀCTIC

### 6.1. Pràctiques sobre la història de la probabilitat

#### 6.1.1. PRÀCTICA DEL LLIBRE *SOPRA LE SCOPERTE DEI DADI*<sup>33</sup> DE GALILEU GALILEI

##### - Problema

En aquest opuscle<sup>34</sup> Galileu estudiava si en llançar tres daus era més probable obtenir un 9 o un 10 en la suma dels tres resultats. Totes dues sumes es poden escriure de sis formes diferents utilitzant tres nombres:

9 → (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)

10 → (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)

Justifiqueu, com feia Galileu, que la suma 10 és més freqüent que la suma 9 en aquest joc, fet que, segons Galileu, ja coneixien els jugadors més experimentats de l'època.

##### - Solució

Tenint en compte que:

- Per obtenir tres números iguals en els tres daus només es pot donar d'una sola manera.
- Per obtenir dos números iguals i un de diferent es pot produir de tres maneres diferents.
- Per obtenir tots tres números diferents als tres daus es pot produir de sis maneres diferents.

Les diferents possibilitats d'obtenir una suma amb resultat 9:

(1,2,6) → 6 possibilitats

(2,2,5) → 3 possibilitats

(1,3,5) → 6 possibilitats

(2,3,4) → 6 possibilitats

(1,4,4) → 3 possibilitats

(3,3,3) → 1 possibilitat

**Total: 25 possibilitats**

Les diferents possibilitats d'obtenir una suma amb resultat 10:

(1,3,6) → 6 possibilitats

(2,3,5) → 6 possibilitats

(1,4,5) → 6 possibilitats

(2,4,4) → 3 possibilitats

(2,2,6) → 3 possibilitats

(3,3,4) → 3 possibilitats

**Total: 27 possibilitats**

Així doncs, podem afirmar que és més probable obtenir una suma de 10 si tires tres daus amb una probabilitat de 27/216 (0,125), ja que la probabilitat que sumi 9 és de 25/216 (0,116).

<sup>33</sup> Veure annex 1, on hi ha el fragment del llibre en versió original i la traducció en català.

<sup>34</sup> Segons l'IEC, obra literària o científica de poca extensió.

### 6.1.2. PRÀCTICA DE LA CARTA DE PASCAL A FERMAT DEL DIMECRES 29 DE JULIOL DE 1654<sup>35</sup>

#### - Problema

Llegiu el punt 7 de la carta de Pascal a Fermat datada el dimecres 29 de juliol de 1654 que conté la correspondència entre Pascal i Fermat.

Feu l'exercici que proposa Méré a Pascal, justificant que han de ser 25 i no 24 el mínim nombre de tirades que s'han de fer amb dos daus per tal que la probabilitat d'obtenir algun cop dos sisos sigui més gran que la de no obtenir-los.

#### - Solució

Per tal de justificar l'exercici que proposa el Cavaller de Méré, primer calcularem la probabilitat que tirant 24 vegades dos daus no ens surti un sis doble i ens surti, i després calcularem la probabilitat que tirant 25 vegades dos daus no ens surti un sis doble i ens surti. Amb això podrem comprovar si la probabilitat de tirar 25 vegades dos daus i ens sortissin dos sisos és més alta que si només el tiréssim 24 vegades.

Primer de tot hem de calcular la probabilitat del succés A = "No treure cap sis doble en una tirada de dos daus". Els casos possibles que té aquest succés són 36 perquè es poden obtenir 6 resultats diferents en cada dau, així doncs, multiplicant les possibilitats de cada dau obtenim 36. D'altra banda els casos favorables d'aquest succés són 35 ja que només es pot donar una vegada que obtinguem un sis a cada dau. Per tant, la probabilitat del succés A és:

$$P(A) = \left(\frac{35}{36}\right)$$

La probabilitat d'aquest succés ens servirà per calcular la probabilitat de treure o no un sis doble si tirem 24 o 25 vegades el dau. Primer de tot calcularem la probabilitat del succés B = "No treure cap sis doble en 24 tirades de dos daus" i hem de multiplicar 24 vegades la probabilitat del succés A, o sigui:

$X = n^{\text{º}}$  de doble sisos obtinguts al fer 24 tirades

$$X = B(24, p) \text{ en la que } p = \frac{1}{36} \text{ i } q = \frac{35}{36}$$

$$P(B) = P(X=0) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.5085961239$$

Aquesta és la probabilitat de no treure cap sis doble en 24 triades, i per tal de calcular la probabilitat de treure'n un s'ha de calcular la probabilitat del succés contrari. És a dir:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914038761$$

<sup>35</sup> Veure annex 2, on hi ha la carta en versió original i la traducció en català.

A continuació calcularé la probabilitat del succés  $C = \text{“No treure cap sis doble en 25 tirades de dos daus”}$  i s'ha de multiplicar 25 vegades la probabilitat del succés  $A$ , o sigui:

$Y = n^{\circ}$  de doble sisos obtinguts al fer 25 tirades

$Y = B(25, p)$  en la que  $p = \frac{1}{36}$  i  $q = \frac{35}{36}$

$$P(C) = P(Y=0) = \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.4944684538$$

Després de saber la probabilitat del succés  $C$ , i tal com hem fet amb l'altre cas, necessitem calcular la probabilitat del succés contrari a  $C$ , o sigui:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.5055315462$$

Així doncs, podem justificar que s'han de tirar 25 vegades dos daus per tal que la probabilitat d'obtenir algun doble sis sigui més alta que no obtenir-lo, ja que la probabilitat de tira'l 25 vegades i surti és de 0.5055315462 i que no surti és de 0.4944684538, mentre que la probabilitat de tira'l 24 i surti és de 0.4914038761 i que no surti és de 0.5085961239.

## 6.2. Anàlisi dels jocs d'atzar (Càlcul de la probabilitat de guanyar i de l'esperança matemàtica)

En un joc d'atzar es defineix la variable aleatòria:

$X =$  benefici del jugador corresponent en cada partida

si  $x_i =$  diferents valors que pren la variable (diferent quantitat que podem guanyar)

i  $p_i =$  probabilitat de que la variable prengui el valor  $x_i$ .

L'esperança matemàtica ( $\mu$ ) mesura el que el jugador pot esperar guanyar per terme mig si

juga moltes vegades. Per calcular l'esperança s'utilitza aquesta fórmula:  $\mu = \sum_i x_i \cdot p_i$

Si  $\mu > 0$  el jugador pot esperar guanyar-hi en moltes repeticions.

Si  $\mu < 0$  el jugador pot esperar perdre-hi en moltes repeticions.

Si  $\mu = 0$  el joc és equitatiu.

### 6.2.1. EUROMILLONES

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

Nº de casos possibles per triar els números:  $C_{50}^5 = \binom{50}{5} = \frac{V_{50}^5}{5!} = 2.118.760$

Nº de casos possibles per triar les estrelles:  $C_9^2 = \binom{9}{2} = \frac{V_9^2}{2!} = 36$

Nº de casos possibles per omplir una butlleta:  $2.118.760 \times 36 = 76.275.360$

Categoria	Números encertats	Estrelles encertades	Casos favorables	Probabilitat de guanyar
			Casos possibles	
1ª	5	2	$\frac{\binom{5}{5} \binom{2}{2}}{76.275.360}$	0.0000000131
2ª	5	1	$\frac{\binom{5}{5} \binom{2}{1} \binom{7}{1}}{76.275.360}$	0.0000001835
3ª	5	0	$\frac{\binom{5}{5} \binom{7}{2}}{76.275.360}$	0.0000027532
4ª	4	2	$\frac{\binom{5}{4} \binom{45}{1} \binom{2}{2}}{76.275.360}$	0.0000029498
5ª	4	1	$\frac{\binom{5}{4} \binom{45}{1} \binom{2}{1} \binom{7}{1}}{76.275.360}$	0.0000412977
6ª	4	0	$\frac{\binom{5}{4} \binom{45}{1} \binom{7}{2}}{76.275.360}$	0.0000619466
7ª	3	2	$\frac{\binom{5}{3} \binom{45}{2} \binom{2}{2}}{76.275.360}$	0.0001297928
8ª	2	2	$\frac{\binom{5}{2} \binom{45}{3} \binom{2}{2}}{76.275.360}$	0.0018603649
9ª	3	1	$\frac{\binom{5}{3} \binom{45}{2} \binom{2}{1} \binom{7}{1}}{76.275.360}$	0.0018171006
10ª	3	0	$\frac{\binom{5}{3} \binom{45}{2} \binom{7}{2}}{76.275.360}$	0.0027256509
11ª	1	2	$\frac{\binom{5}{1} \binom{45}{4} \binom{2}{2}}{76.275.360}$	0.0097669156
12ª	2	1	$\frac{\binom{5}{2} \binom{45}{3} \binom{2}{1} \binom{7}{1}}{76.275.360}$	0.0260451082
13ª	2	0	$\frac{\binom{5}{2} \binom{45}{3} \binom{7}{2}}{76.275.360}$	0.0390676622

Taula 6.1. Càlcul de la probabilitat de guanyar de l'Euromillones



- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\begin{aligned} \mu = & \left( \frac{32}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0000000131 + \left( \frac{4.8}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0000001835 + \left( \frac{1.6}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot \\ & 0.0000027532 + \left( \frac{0.8}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0000029498 + \left( \frac{0.7}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0000412977 + \\ & \left( \frac{0.7}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0000619466 + \left( \frac{0.5}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0001297928 + \left( \frac{2.3}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot \\ & 0.0018603649 + \left( \frac{2.2}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0018171006 + \left( \frac{3.7}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0027256509 + \\ & \left( \frac{6.5}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0097669156 + \left( \frac{17.6}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot 0.0260451082 + \left( \frac{18}{100} \cdot \frac{50}{100} x - 2 \right) \cdot \\ & 0.0390676622 + (-2) \cdot 0.9184782609 \end{aligned}$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 50% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

### 6.2.2. LOTERIA NACIONAL

- Loteria Nacional del Dijous

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar algun dels premis, primer necessitem saber el nombre de casos possibles que pot tenir cada dècim:

Nº de casos possibles per cada sèrie: 100.000 números

Nº de sèries: 6

Nº de casos possibles per cada dècim:  $100.000 \times 6 = 600.000$  números

Números premiats per sèrie	Total de números premiats	Casos favorables Casos possibles	Probabilitat de guanyar
1 (només d'una sèrie)	1	$\frac{1}{600000}$	0.000001667
1	6	$\frac{6}{600000}$	0.00005
1	6	$\frac{6}{600000}$	0.00005
40	240	$\frac{240}{600000}$	0.0004
1100	6600	$\frac{6600}{600000}$	0.011
3000	18000	$\frac{18000}{600000}$	0.03
2	12	$\frac{12}{600000}$	0.00002

2	12	$\frac{12}{600000}$	0.00002
99	594	$\frac{594}{600000}$	0.00099
99	594	$\frac{594}{600000}$	0.00099
9	54	$\frac{54}{600000}$	0.00009
99	594	$\frac{594}{600000}$	0.00099
999	5994	$\frac{5994}{600000}$	0.00999
9999	59994	$\frac{59994}{600000}$	0.09999
10000	60000	$\frac{60000}{600000}$	0.1
10000	60000	$\frac{60000}{600000}$	0.1

Taula 6.2. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Loteria Nacional del Dijous

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\begin{aligned} \mu = & \left( \frac{9.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.000001667 + \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00005 + \left( \frac{2.86}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot \\ & 0.00005 + \left( \frac{1.43}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.0004 + \left( \frac{7.85}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.011 + \left( \frac{8.57}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.03 + \\ & \left( \frac{0.74}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00002 + \left( \frac{0.42}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00002 + \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00099 + \\ & \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00099 + \left( \frac{0.32}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00009 + \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00099 + \\ & \left( \frac{7.14}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.00999 + \left( \frac{14.28}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.09999 + \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.1 + \\ & \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 3 \right) \cdot 0.1 + (-3) \cdot 0.645398333 \end{aligned}$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 70% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

## - Loteria Nacional del Dissabte

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar algun dels premis, primer necessitem saber el nombre de casos possibles que pot tenir cada dècim:

Nº de casos possibles per cada sèrie: 100.000 números

Nº de sèries: 10

Nº de casos possibles per cada dècim:  $100.000 \times 10 = 1.000.000$  números

Números premiats per sèrie	Total de números premiats	Casos favorables Casos possibles	Probabilitat de guanyar
1 (només d'una sèrie)	1	$\frac{1}{1000000}$	0.000001
1	10	$\frac{10}{1000000}$	0.00001
1	10	$\frac{10}{1000000}$	0.00001
40	400	$\frac{400}{1000000}$	0.0004
1100	11000	$\frac{11000}{1000000}$	0.011
3000	30000	$\frac{30000}{1000000}$	0.03
2	20	$\frac{20}{1000000}$	0.00002
2	20	$\frac{20}{1000000}$	0.00002
99	990	$\frac{990}{1000000}$	0.00099
99	990	$\frac{990}{1000000}$	0.00099
99	990	$\frac{990}{1000000}$	0.00099
999	9990	$\frac{9990}{1000000}$	0.00999
9999	99990	$\frac{99990}{1000000}$	0.09999
10000	100000	$\frac{100000}{1000000}$	0.1
10000	100000	$\frac{100000}{1000000}$	0.1

Taula 6.3. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Loteria Nacional del Dissabte

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\begin{aligned} \mu = & \left( \frac{7}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.000001 + \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.000001 + \left( \frac{2.86}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot \\ & 0.000001 + \left( \frac{1.43}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00004 + \left( \frac{10.71}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.011 + \left( \frac{8.57}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.03 + \\ & \left( \frac{0.57}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00002 + \left( \frac{0.34}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00002 + \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00099 + \\ & \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00099 + \left( \frac{1.41}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00099 + \left( \frac{7.14}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.00999 + \\ & \left( \frac{14.28}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.09999 + \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.1 + \left( \frac{14.29}{100} \cdot \frac{70}{100} x - 6 \right) \cdot 0.1 + \\ & (-6) \cdot 0.645589 \end{aligned}$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 70% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

### 6.2.3. LA PRIMITIVA

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

Nº de casos possibles per triar els números:  $C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{V_{49}^6}{6!} = 13.983.816$

Nº de casos possibles per triar el reintegrament:  $C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$

Nº de casos possibles per omplir la butlleta:  $\binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1} = 139.838.160$

Categoria	Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
Primera categoria	6	$\frac{\binom{6}{6} \cdot 10}{139838160}$	0.000000715
Segona categoria	5 + C	$\frac{\binom{6}{5} \cdot 10}{139838160}$	0.000000429
Tercera categoria	5	$\frac{\binom{6}{5} \binom{42}{1} \cdot 10}{139838160}$	0.000018021

Quarta categoria	4	$\frac{\binom{6}{4}\binom{42}{2} \cdot 10}{139838160}$	0.000923568
Cinquena categoria	3	$\frac{\binom{6}{3}\binom{42}{3} \cdot 10}{139838160}$	0.016418980
-	Reintegrament	$\frac{13983816}{139838160}$	0.1

Taula 6.4. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Primitiva

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\mu = \left(\frac{45}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 01\right) \cdot 0.000000715 + \left(\frac{24}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1\right) \cdot 0.000000429 + \left(\frac{12}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1\right) \cdot 0.000018021 + \left(\frac{19}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1\right) \cdot 0.000923568 + (4 - 1) \cdot 0.016418980 + (0.5 - 1) \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.882638287$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 55% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

#### 6.2.4. BONOLOTO

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

Nº de casos possibles per triar els números:  $C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{V_{49}^6}{6!} = 13.983.816$

Nº de casos possibles per triar el reintegrament:  $C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$

Nº de casos possibles per omplir la butlleta:  $\binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1} = 139.838.160$

Categoria	Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
Primera categoria	6	$\frac{\binom{6}{6} \cdot 10}{139838160}$	0.000000715
Segona categoria	5 + C	$\frac{\binom{6}{5} \cdot 10}{139838160}$	0.000000429
Tercera categoria	5	$\frac{\binom{6}{5}\binom{42}{1} \cdot 10}{139838160}$	0.000018021

Quarta categoria	4	$\frac{\binom{6}{4}\binom{42}{2} \cdot 10}{139838160}$	0.000923568
Cinquena categoria	3	$\frac{\binom{6}{3}\binom{42}{3} \cdot 10}{139838160}$	0.016418980
-	Reintegrament	$\frac{13983816}{139838160}$	0.1

Taula 6.5. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Bonoloto

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\begin{aligned} \mu = & \left( \frac{45}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 0.5 \right) \cdot 0.000000715 + \left( \frac{24}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 0.5 \right) \cdot 0.000000429 + \left( \frac{12}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 0.5 \right) \cdot \\ & 0.000018021 + \left( \frac{19}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 0.5 \right) \cdot 0.000923568 + (4 - 0.5) \cdot 0.016418980 + (0.5 - 0.5) \cdot 0.1 + \\ & (-0.5) \cdot 0.882638287 \end{aligned}$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 55% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

#### 6.2.5. LA QUINIELA

És un joc d'atzar però el resultat no depèn només de l'atzar, sinó que també d'altres factors. La probabilitat de guanyar dependrà de cada possible resultat ja que justificaré que no és equiprobable, és a dir, que no hi ha les mateixes possibilitats que surti un 1, una  $x$  o un 2. Un dels apartats pràctics del meu treball es basa en un estudi més profund d'aquest joc<sup>36</sup>.

#### 6.2.6. LOTTO 6/49

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

Nº de casos possibles per triar els números:  $C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{V_{49}^6}{6!} = 13.983.816$

Nº de casos possibles per triar el reintegrament:  $C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$

Nº de casos possibles per omplir la butlleta:  $\binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1} = 139.838.160$

<sup>36</sup> Veure apartat 6.5 sobre el problema d'investigació de la Quiniela.

Categoria	Número d'encerts	Casos favorables Casos possibles	Probabilitat de guanyar
Primera categoria	6	$\frac{\binom{6}{6} \cdot 10}{139838160}$	0.000000715
Segona categoria	5 + C	$\frac{\binom{6}{5} \cdot 10}{139838160}$	0.000000429
Tercera categoria	5	$\frac{\binom{6}{5} \binom{42}{1} \cdot 10}{139838160}$	0.000018021
Quarta categoria	4	$\frac{\binom{6}{4} \binom{42}{2} \cdot 10}{139838160}$	0.000923568
Cinquena categoria	3	$\frac{\binom{6}{3} \binom{42}{3} \cdot 10}{139838160}$	0.016418980
-	Reintegrament	$\frac{13983816}{139838160}$	0.1

Taula 6.6. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Lotto 6/49

- Càlcul de l'esperança matemàtica

x = recaptació total amb euros

$$\mu = \left( \frac{50}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1 \right) \cdot 0.000000715 + \left( \frac{5}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1 \right) \cdot 0.000000429 + \left( \frac{5}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1 \right) \cdot 0.000018021 + \left( \frac{10}{100} \cdot \frac{55}{100} x - 1 \right) \cdot 0.000923568 + (4 - 1) \cdot 0.016418980 + (1 - 1) \cdot 0.1 + (-0.5) \cdot 0.882638287$$

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu perquè només es destinen un 55% del total de diners recaptats amb premis, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

- Jòquer

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

Nº de casos possibles per triar els números:  $V_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$

Número d'encerts	Casos favorables Casos possibles	Probabilitat de guanyar
6 xifres	$\frac{\binom{6}{6}}{151200}$	0.000006614
5 últimes xifres	$\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{151200}$	0.000026455
4 últimes xifres	$\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{151200}$	0.000165344
3 últimes xifres	$\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{151200}$	0.001190476
2 últimes xifres	$\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{7}{1}\binom{1}{1}}{151200}$	0.009722222
Última xifra	$\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{1}{1}}{151200}$	0.088888889

Taula 6.7. Càlcul de la probabilitat de guanyar del Jòquer

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$x$  = recaptació total amb euros

$$\mu = (100000 - 1) \cdot 0.000006614 + (10000 - 1) \cdot 0.000026455 + (1000 - 1) \cdot 0.000165344 + (100 - 1) \cdot 0.001190476 + (10 - 1) \cdot 0.009722222 + (1 - 1) \cdot 0.088888889 + (-1) \cdot 0.9 = 0.396452709$$

El resultat de l'esperança matemàtica és positiu, però molt petit. Això ens indica que si escollim apostar al Jòquer, després de moltes jugades, podem esperar guanyar un premi més vegades que no pas no guanyar-hi res. De mitjana, podem esperar guanyar uns 0.4 euros per partida.

### 6.2.7. TRIO

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

$$\text{Nº de casos possibles per triar les centenes: } C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$$

$$\text{Nº de casos possibles per triar les desenes: } C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$$

$$\text{Nº de casos possibles per triar les unitats: } C_{10}^1 = \binom{10}{1} = \frac{V_{10}^1}{1!} = 10$$

$$\text{Nº de casos possibles per omplir una butlleta: } 10 \times 10 \times 10 = 1000$$



Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
xxx + Supertrio	$\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{1000}$	0.001
xxx	$\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{1000}$	0.001
xx-	$\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{9}{1}}{1000}$	0.009
-xx	$\frac{\binom{9}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{1000}$	0.009
x-x	$\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{1}\binom{1}{1}}{1000}$	0.009
--x	$\frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}\binom{1}{1}}{1000}$	0.081

Taula 6.8. Càlcul de la probabilitat de guanyar del Trio

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$$\mu = (125 - 0.5) \cdot 0.001 + (2.5 - 0.5) \cdot 0.009 + (2.5 - 0.5) \cdot 0.009 + (2.5 - 0.5) \cdot 0.009 + (0.5 - 0.5) \cdot 0.081 + (-0.5) \cdot 0.891 = -0.267$$

\* Aquest és el resultat de l'esperança matemàtica si el preu de l'aposta és de 0.5 euros, però també es pot calcular quan l'aposta és de 1, 2, 3, 6, 12 i 15 euros.

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu i ens indica que el jugador pot esperar perdre-hi moltes més vegades que no pas guanyar si hi juga moltes vegades.

### 6.2.8. SUPER 10

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta:

$$\text{Nº de casos possibles per triar els 10 números: } C_{68}^{10} = \binom{68}{10} = \frac{V_{68}^{10}}{10!} = 290752384208$$

Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
10 encerts	$\frac{\binom{20}{10}}{\binom{68}{10}}$	0.00000063544

9 encerts	$\frac{\binom{20}{9} \binom{48}{1}}{\binom{68}{10}}$	0.00002772834
8 encerts	$\frac{\binom{20}{8} \binom{48}{2}}{\binom{68}{10}}$	0.00048871193
7 encerts	$\frac{\binom{20}{7} \binom{48}{3}}{\binom{68}{10}}$	0.00461143569
6 encerts	$\frac{\binom{20}{6} \binom{48}{4}}{\binom{68}{10}}$	0.02593932573
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{48}{5}}{\binom{68}{10}}$	0.09130642656
0 encerts	$\frac{\binom{48}{10}}{\binom{68}{10}}$	0.02249582893

Taula 6.9. Càlcul de la probabilitat de guanyar del Super 10

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories marcant l'opció Diana, necessitem saber quina probabilitat hi ha que surti el número Diana. El número Diana s'escull d'entre les 20 boles que s'han extret pel sorteig. Així doncs, la probabilitat de tenir Diana és de  $\binom{20}{1}$ .

Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
10 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{9}}{\binom{68}{10}}$	0.00000031872
9 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{8} \binom{48}{1}}{\binom{68}{10}}$	0.00001247775
8 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{7} \binom{48}{2}}{\binom{68}{10}}$	0.00019548477

7 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{6} \binom{48}{3}}{\binom{68}{10}}$	0.00161400249
6 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{5} \binom{48}{4}}{\binom{68}{10}}$	0.00778179772
5 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{48}{5}}{\binom{68}{10}}$	0.02282660664
4 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{48}{6}}{\binom{68}{10}}$	0.04089767023
3 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{48}{7}}{\binom{68}{10}}$	0.04330341554
2 encerts + Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{48}{8}}{\binom{68}{10}}$	0.02465888940
Diana	$\frac{\binom{48}{9}}{\binom{68}{10}}$	0.00576816126

Taula 6.10. Càlcul de la probabilitat de guanyar del Super 10 amb Diana

- Càlcul de l'esperança matemàtica

$$\begin{aligned} \mu = & (60000 - 0.6) \cdot 0.00000063544 + (1200 - 0.6) \cdot 0.00002772834 + (120 - 0.6) \cdot 0.00048871193 + \\ & (12 - 0.6) \cdot 0.00461143569 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.02593932573 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.09130642656 \\ & + (1.2 - 0.6) \cdot 0.02249582893 + (-0.6) \cdot 0.8551299074 = -0.3017108906 \end{aligned}$$

El càlcul de l'esperança matemàtica amb l'opció Diana és el següent:

$$\begin{aligned} \mu = & (180000 - 1.2) \cdot 0.00000031872 + (3600 - 1.2) \cdot 0.00001247775 + (360 - 1.2) \cdot 0.00019548477 + \\ & (36 - 1.2) \cdot 0.00161400249 + (3.6 - 1.2) \cdot 0.00778179772 + (1.8 - 1.2) \cdot 0.02282660664 + (0.6 - 1.2) \cdot \\ & 0.04089767023 + (0.6 - 1.2) \cdot 0.04330341554 + (1.2 - 1.2) \cdot 0.02465888940 + (6 - 1.2) \cdot 0.00576816126 + \\ & (-1.2) \cdot 0.8529411755 = -0.7854092435 \end{aligned}$$

\*Aquests són els resultats de l'esperança matemàtica si el preu de l'aposta és de 0.6 euros, però també es pot calcular quan l'aposta és de 1, 2 i 3 euros.

El resultat de l'esperança matemàtica és negatiu per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions.

## 6.2.9. LOTO EXPRESS

- Càlcul de la probabilitat de guanyar:

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories, primer necessitem saber el nombre de casos possibles amb els que es pot omplir una butlleta. En aquest joc es pot apostar a 4 números, 5, 6, 7, 8, 9 o 10; per aquest motiu, els nombre de casos possibles per omplir una butlleta varia.

Nº de casos possibles si s'aposta a 4 números:  $C_{70}^4 = \binom{70}{4} = \frac{V_{70}^4}{4!} = 916895$

Nº de casos possibles si s'aposta a 5 números:  $C_{70}^5 = \binom{70}{5} = \frac{V_{70}^5}{5!} = 12103014$

I així successivament fins a l'aposta a 10 números, que és:  $C_{70}^{10} = \binom{70}{10} = \frac{V_{70}^{10}}{10!} = 396704524216$

Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
10 encerts	$\frac{\binom{20}{10}}{\binom{70}{10}}$	0.0000046573
9 encerts	$\frac{\binom{20}{9} \binom{50}{1}}{\binom{70}{10}}$	0.00002116941
8 encerts	$\frac{\binom{20}{8} \binom{50}{2}}{\binom{70}{10}}$	0.00038898788
7 encerts	$\frac{\binom{20}{7} \binom{50}{3}}{\binom{70}{10}}$	0.00383003447
6 encerts	$\frac{\binom{20}{6} \binom{50}{4}}{\binom{70}{10}}$	0.02250145248
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{50}{5}}{\binom{70}{10}}$	0.08280534513
4 encerts	$\frac{\binom{20}{4} \binom{50}{6}}{\binom{70}{10}}$	0.1940750276
0 encerts	$\frac{\binom{50}{10}}{\binom{70}{10}}$	0.02589402828

9 encerts	$\frac{\binom{20}{9}}{\binom{70}{9}}$	0.00000258668
8 encerts	$\frac{\binom{20}{8} \binom{50}{1}}{\binom{70}{9}}$	0.00009685004
7 encerts	$\frac{\binom{20}{7} \binom{50}{2}}{\binom{70}{9}}$	0.00146020064
6 encerts	$\frac{\binom{20}{6} \binom{50}{3}}{\binom{70}{9}}$	0.01168160512
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{50}{4}}{\binom{70}{9}}$	0.05490354405
0 encerts	$\frac{\binom{50}{9}}{\binom{70}{9}}$	0.03852526159
8 encerts	$\frac{\binom{20}{8}}{\binom{70}{8}}$	0.00001334378
7 encerts	$\frac{\binom{20}{7} \binom{50}{1}}{\binom{70}{8}}$	0.00041057796
6 encerts	$\frac{\binom{20}{6} \binom{50}{2}}{\binom{70}{8}}$	0.00502957998
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{50}{3}}{\binom{70}{8}}$	0.03218931188
0 encerts	$\frac{\binom{50}{8}}{\binom{70}{8}}$	0.05687062426
7 encerts	$\frac{\binom{20}{7}}{\binom{70}{7}}$	0.00006466603

6 encerts	$\frac{\binom{20}{6} \binom{50}{1}}{\binom{70}{7}}$	0.00161665071
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{50}{2}}{\binom{70}{7}}$	0.01584317694
0 encerts	$\frac{\binom{50}{7}}{\binom{70}{7}}$	0.0833220774
6 encerts	$\frac{\binom{20}{6}}{\binom{70}{6}}$	0.00029561613
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5} \binom{50}{1}}{\binom{70}{6}}$	0.00591232259
4 encerts	$\frac{\binom{20}{4} \binom{50}{2}}{\binom{70}{6}}$	0.04526621983
0 encerts	$\frac{\binom{50}{5}}{\binom{70}{6}}$	0.1211957489
5 encerts	$\frac{\binom{20}{5}}{\binom{70}{5}}$	0.00128100323
4 encerts	$\frac{\binom{20}{4} \binom{50}{1}}{\binom{70}{5}}$	0.02001567544
0 encerts	$\frac{\binom{50}{5}}{\binom{70}{5}}$	0.1750605263
4 encerts	$\frac{\binom{20}{4}}{\binom{70}{4}}$	0.00528413832
3 encerts	$\frac{\binom{20}{3} \binom{50}{1}}{\binom{70}{4}}$	0.06216633312

0 encerts	$\frac{\binom{50}{4}}{\binom{70}{4}}$	0.2511737985
-----------	---------------------------------------	--------------

Taula 6.11. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Loto Express

Per tal de calcular la probabilitat de guanyar els premis de les diferents categories marcant l'opció Diana, necessitem saber quina probabilitat hi ha que surti el número Diana. Igual que al joc del Trio, el número Diana s'escull d'entre les 20 boles que s'han extret pel sorteig. Així doncs, la probabilitat de tenir Diana és de  $\frac{\binom{20}{1}}{\binom{70}{1}}$ .

Número d'encerts	$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$	Probabilitat de guanyar
10 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{9}}{\binom{70}{10}}$	0.00000023286
9 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{8} \binom{50}{1}}{\binom{70}{10}}$	0.00000952623
8 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{7} \binom{50}{2}}{\binom{70}{10}}$	0.00015559515
7 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{6} \binom{50}{3}}{\binom{70}{10}}$	0.00134051206
6 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{5} \binom{50}{4}}{\binom{70}{10}}$	0.00675043574
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{50}{5}}{\binom{70}{10}}$	0.02070133628
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{6}}{\binom{70}{10}}$	0.03881500553
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{7}}{\binom{70}{10}}$	0.04305530025

2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{8}}{\binom{70}{10}}$	0.02571358209
Diana	$\frac{\binom{50}{9}}{\binom{70}{10}}$	0.00631561665
9 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{8}}{\binom{70}{9}}$	0.00000116220
8 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{7} \binom{50}{1}}{\binom{70}{9}}$	0.00003874002
7 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{6} \binom{50}{2}}{\binom{70}{9}}$	0.00051107022
6 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{5} \binom{50}{3}}{\binom{70}{9}}$	0.00350448154
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{50}{4}}{\binom{70}{9}}$	0.01372588601
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{5}}{\binom{70}{9}}$	0.03156953783
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{6}}{\binom{70}{9}}$	0.04178321183
2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{7}}{\binom{70}{9}}$	0.02918192572
Diana	$\frac{\binom{50}{8}}{\binom{70}{9}}$	0.00825541319
8 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{7}}{\binom{70}{8}}$	0.00000533751



7 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{6} \binom{50}{1}}{\binom{70}{8}}$	0.00014370229
6 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{5} \binom{50}{2}}{\binom{70}{8}}$	0.00138570061
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{50}{3}}{\binom{70}{8}}$	0.00804732797
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{4}}{\binom{70}{8}}$	0.02363902591
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{5}}{\binom{70}{8}}$	0.03837865383
2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{6}}{\binom{70}{8}}$	0.03198221153
Diana	$\frac{\binom{50}{7}}{\binom{70}{8}}$	0.01058058126
7 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{6}}{\binom{70}{7}}$	0.00002263311
6 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{5} \binom{50}{1}}{\binom{70}{7}}$	0.00048499521
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{50}{2}}{\binom{70}{7}}$	0.00396079424
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{3}}{\binom{70}{7}}$	0.01584317694
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{4}}{\binom{70}{7}}$	0.03285129336

2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{5}}{\binom{70}{7}}$	0.03358132210
Diana	$\frac{\binom{50}{6}}{\binom{70}{7}}$	0.01325578504
6 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{5}}{\binom{70}{6}}$	0.00008868484
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4} \binom{50}{1}}{\binom{70}{6}}$	0.00147808065
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{2}}{\binom{70}{6}}$	0.00905324397
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{3}}{\binom{70}{6}}$	0.02556210061
2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{4}}{\binom{70}{6}}$	0.03337274246
Diana	$\frac{\binom{50}{5}}{\binom{70}{6}}$	0.01615943319
5 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{4}}{\binom{70}{5}}$	0.00032025081
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3} \binom{50}{1}}{\binom{70}{5}}$	0.00400313509
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{2}}{\binom{70}{5}}$	0.01730767229
2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{3}}{\binom{70}{5}}$	0.03076919518

Diana	$\frac{\binom{50}{4}}{\binom{70}{5}}$	0.01902831807
4 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{3}}{\binom{70}{4}}$	0.00105682766
3 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{2} \binom{50}{1}}{\binom{70}{4}}$	0.00932494997
2 encerts amb Diana	$\frac{\binom{19}{1} \binom{50}{2}}{\binom{70}{4}}$	0.02538458602
Diana	$\frac{\binom{50}{3}}{\binom{70}{4}}$	0.02137649349

Taula 6.12. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la Loto Express amb Diana

- Càlcul de l'esperança matemàtica

- Si apostes per 10 números:

$$\mu = (30000 - 0.6) \cdot 0.00000046573 + (600 - 0.6) \cdot 0.00002116941 + (60 - 0.6) \cdot 0.00038898788 + (6 - 0.6) \cdot 0.00383003447 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.02250145248 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.08280534513 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.1940750276 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.02589402828 + (-0.6) \cdot 0.670483489 = -0.2551565122$$

- Si apostes per 9 números:

$$\mu = (6000 - 0.6) \cdot 0.00000258668 + (300 - 0.6) \cdot 0.00009685004 + (60 - 0.6) \cdot 0.00146020064 + (6 - 0.6) \cdot 0.01168160512 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.05490354405 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.03852526159 + (-0.6) \cdot 0.8933299519 = -0.2757817026$$

- Si apostes per 8 números:

$$\mu = (3000 - 0.6) \cdot 0.00001334378 + (150 - 0.6) \cdot 0.00041057796 + (18 - 0.6) \cdot 0.00502958998 + (3 - 0.6) \cdot 0.03218931188 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.05687062426 + (-0.6) \cdot 0.9054865621 = -0.2771592162$$

- Si apostes per 7 números:

$$\mu = (900 - 0.6) \cdot 0.00006466603 + (60 - 0.6) \cdot 0.00161665071 + (9 - 0.6) \cdot 0.01584317694 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.0833220774 + (-0.6) \cdot 0.8991534289 = -0.2522196915$$

- Si apostes per 6 números:

$$\mu = (300 - 0.6) \cdot 0.00029561613 + (12 - 0.6) \cdot 0.00591232259 + (3 - 0.6) \cdot 0.04526621983 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.1211957489 + (-0.6) \cdot 0.8273300926 = -0.2318511811$$

- Si apostes per 5 números:

$$\mu = (60 - 0.6) \cdot 0.00128100323 + (9 - 0.6) \cdot 0.02001567544 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.1750605263 + (-0.6) \cdot 0.803642795 = -0.2379624114$$

- Si apostes per 4 números:

$$\mu = (30 - 0.6) \cdot 0.00528413832 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.06216633312 + (0.6 - 0.6) \cdot 0.2511737985 + (-0.6) \cdot 0.6813757301 = -0.2534717715$$

- Si apostes per 10 números amb Diana:

$$\mu = (90000 - 0.6) \cdot 0.00000023286 + (1800 - 0.6) \cdot 0.00000952623 + (180 - 0.6) \cdot 0.00015559515 + (30 - 0.6) \cdot 0.00134051206 + (7.8 - 0.6) \cdot 0.00675043574 + (3.6 - 0.6) \cdot 0.02070133628 + (2.4 - 0.6) \cdot 0.03881500553 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.04305530025 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.02571358209 + (6 - 0.6) \cdot 0.00631561665 + (-0.6) \cdot 0.8571428075 = -0.152922286$$

- Si apostes per 9 números amb Diana:

$$\mu = (18000 - 0.6) \cdot 0.00000116220 + (900 - 0.6) \cdot 0.00003874002 + (150 - 0.6) \cdot 0.00051107022 + (15 - 0.6) \cdot 0.00350448154 + (4.8 - 0.6) \cdot 0.01372588601 + (2.4 - 0.6) \cdot 0.03156953783 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.04178321183 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.02918192572 + (6 - 0.6) \cdot 0.00825541319 + (-0.6) \cdot 0.8714285714 = -0.138644838$$

- Si apostes per 8 números amb Diana:

$$\mu = (9000 - 0.6) \cdot 0.00000533751 + (390 - 0.6) \cdot 0.00014370229 + (42 - 0.6) \cdot 0.00138570061 + (9 - 0.6) \cdot 0.00804732797 + (2.4 - 0.6) \cdot 0.02363902591 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.03837865383 + (1.2 - 0.6) \cdot 0.03198221153 + (6 - 0.6) \cdot 0.01058058126 + (-0.6) \cdot 0.8858374591 = -0.1606429514$$

- Si apostes per 7 números amb Diana:

$$\mu = (2700 - 0.6) \cdot 0.00002263311 + (150 - 0.6) \cdot 0.00048499521 + (18 - 0.6) \cdot 0.00396079424 + (2.4 - 0.6) \cdot 0.01584317694 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.03285129336 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.03358132210 + (6 - 0.6) \cdot 0.01325578504 + (-0.6) \cdot 0.9 = -0.1577099825$$

- Si apostes per 6 números amb Diana:

$$\mu = (900 - 0.6) \cdot 0.00008868484 + (42 - 0.6) \cdot 0.00147808065 + (9 - 0.6) \cdot 0.00905324397 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.02556210061 + (1.8 - 0.6) \cdot 0.03337274246 + (6 - 0.6) \cdot 0.01615943319 + (-0.6) \cdot 0.9142857143 = -0.1735857443$$

- Si apostes per 5 números amb Diana:

$$\mu = (210 - 0.6) \cdot 0.00032025081 + (24 - 0.6) \cdot 0.00400313509 + (3 - 0.6) \cdot 0.01730767229 + (3 - 0.6) \cdot 0.03076919518 + (6 - 0.6) \cdot 0.01902831807 + (-6) \cdot 0.9285714286 = -0.178271577$$

- Si apostes per 4 números amb Diana:

$$\mu = (120 - 0.6) \cdot 0.00105682766 + (6 - 0.6) \cdot 0.00932494997 + (3 - 0.6) \cdot 0.02538458602 + (6 - 0.6) \cdot 0.02137649349 + (-6) \cdot 0.9428571429 = -0.212818262$$

\*Tots els resultats de l'esperança matemàtica estan calculats contant que el preu de l'aposta és de 0.6 euros, però també es pot calcular quan l'aposta és de 1, 2, i 3 euros.

Tant els resultats del càlcul de l'esperança matemàtica quan es juga a la Lotto Express sense participar a la Diana com si s'hi participa són negatius, per aquest motiu el jugador pot esperar a perdre-hi en moltes repeticions. D'altra banda, si comparem els càlculs de l'aposta amb Diana o sense, es pot veure que participant a la Diana es pot esperar perdre-hi menys diners que sense participar a la Diana. Si no s'aposta a l'opció Diana es pot esperar perdre, de mitjana, 0.25 euros; mentre que si s'aposta a l'opció Diana es pot esperar perdre uns 0.16 euros.

### 6.3. Enquesta sobre els jocs d'atzar

#### 6.3.1. DESCRIPCIÓ

Per tal de fer una investigació qualitativa sobre el tema vaig decidir fer una enquesta<sup>37</sup> sobre els jocs d'atzar per poder conèixer el perfil de la gent que aposta als jocs d'atzar, la quantitat de diners que s'aposten setmanalment i també quin és el joc més jugat.

Per això he elaborat un qüestionari format per vuit preguntes, sis de les quals són tancades, i dues que contenen tres subpreguntes (dues tancades i una oberta).

De les sis preguntes tancades, les tres primeres són personals i em permeten conèixer el perfil de la gent, les altres tres em permeten conèixer a quin tipus de joc juguen, quantes vegades hi juguen i els diners que hi aposten.

Amb la primera pregunta triple, que és personal, mitjançant les dues subpreguntes tancades puc conèixer l'estat d'ocupació i el sou mensual i amb la subpregunta oberta puc concretar la ocupació que em servirà per distribuir les respostes obtingudes segons els sectors econòmics.

Amb la segona pregunta triple puc saber si han tingut premi o no, i en cas afirmatiu la quantitat guanyada i en quin joc l'han guanyat.

Vaig portar vint enquestes a set establiments de venda de loteria del Pla de l'Estany, que són els següents:

<sup>37</sup> Veure annex 3, on hi ha el model del qüestionari utilitzat per realitzar l'enquesta.

- quiosc de la Plaça Doctor Rovira (Administració nº 1 Enric Carreras, Plaça Doctor Rovira, S/N, 17820 – Banyoles)
- quiosc de Can Puig (Administració nº 2, Urbanització Can Puig, S/N, 17820 – Banyoles)
- estanc de la Plaça dels Turers (Expenedoria nº 2, Plaça dels Turers, 25, 17820 - Banyoles)
- estanc de la Plaça Major (Expenedoria nº 3, Plaça Major, 8, 17820 – Banyoles)
- estanc de la Vila Olímpica (Expenedoria nº 4, C/ Llibertat, 145, 17820 – Banyoles)
- estanc de St. Pere (Expenedoria nº 5, Passeig Mossèn Lluís Constans, 340, 17820 - Banyoles)
- El Gall de la Sort (Administració de Porqueres, C/ Sant Andreu, 29, 17846 – Porqueres)

i vaig passar a recollir-les al cap d'un mes. La mostra obtinguda per mostreig aleatori només va ser de 44 qüestionaris omplerts dels 140 repartits, un nombre molt menor del que esperava (només un 31,43%). Els venedors em van dir que els hi va ser complicat fer-les omplir, sobretot per la falta de temps dels clients i perquè algunes preguntes les trobaven massa directes i personals.

### 6.3.2. INTERPRETACIÓ

1. SEXE	
HOME	20
DONA	22

Taula 6.13. Dades de la pregunta sobre el sexe

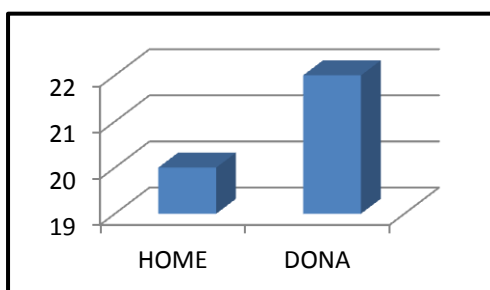


Figura 6.1. Diagrama de barres de les dades sobre el sexe

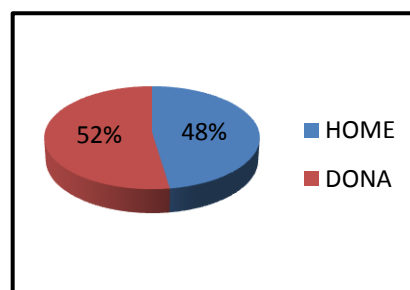


Figura 6.2. Gràfic circular de les dades sobre el sexe

En la primera pregunta trobem que el sexe dels participants no influeix en la participació del joc, no hi ha una diferència significativa entre les dues respostes: un 52% són dones i un 48% homes.

2. EDAT	
ENTRE 18 I 30	5
ENTRE 30 I 50	22
ENTRE 50 I 70	13
MÉS DE 70	2

Taula 6.14. Dades de la pregunta sobre l'edat

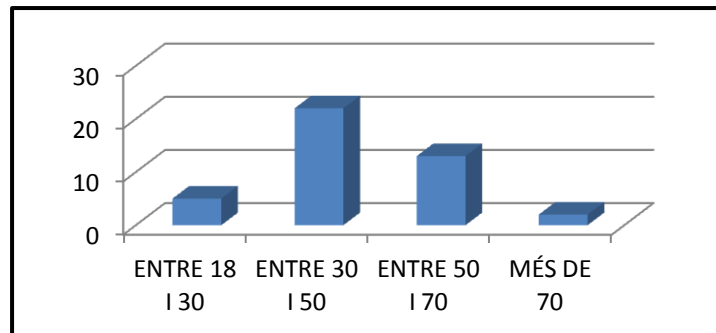


Figura 6.3. Diagrama de barres de les dades sobre l'edat

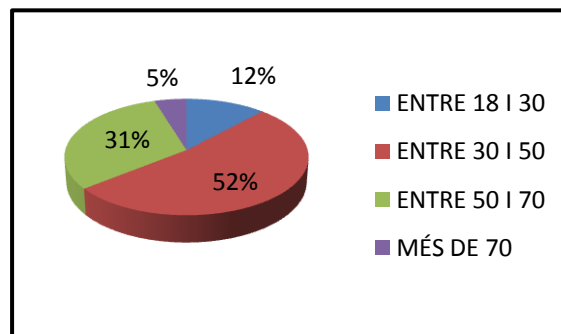


Figura 6.4. Gràfic circular de les dades sobre l'edat

En les respostes de la segona pregunta s'observa que la franja d'edat en que més es juga als jocs d'atzar és la dels 30 als 50 anys (52%). En segon lloc trobem la que va de 50 a 70 anys (31%), i ja en un tant per cent molt baix trobem els joves d'entre 18 i 30 anys (12%) i els més grans de 70 anys (5%).

3. NIVELL D'ESTUDIS	
SENSE ESTUDIS	1
ESTUDIS PRIMARIS	15
ESTUDIS SECUNDARIS	18
ESTUDIS SUPERIORS	8

Taula 6.15. Dades de la pregunta sobre el nivell d'estudis

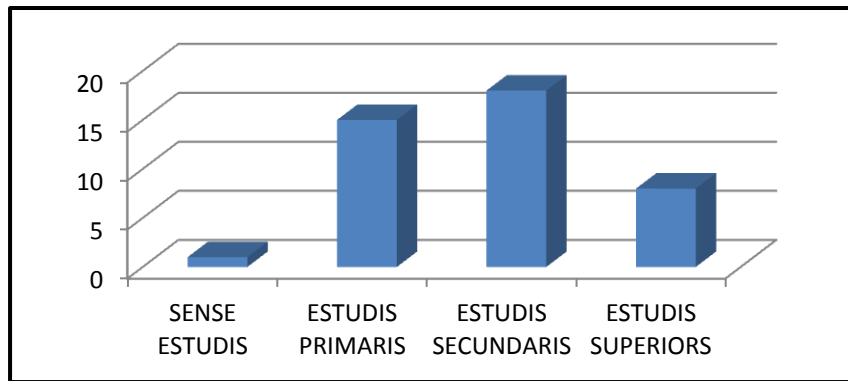


Figura 6.5. Diagrama de barres de les dades sobre el nivell d'estudis

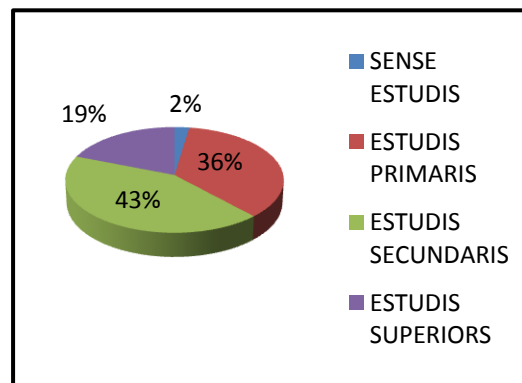


Figura 6.6. Gràfic circular de les dades sobre el nivell d'estudis

Les respostes de la tercera pregunta ens indiquen que la majoria de gent que aposta a les loteries i apostes tenen un nivell d'estudis primaris o secundaris (79% en total). Tot i així, també hi ha un 19% de la població que té un nivell d'estudis superiors. El resultat de la gent sense estudis no és significatiu (2%).

4. OCUPACIÓ		
ESTUDIANT	24	37%
EN ACTIU	31	48%
ATURAT	3	4%
JUBILAT	7	11%

Taula 6.16. Dades de la pregunta sobre l'ocupació

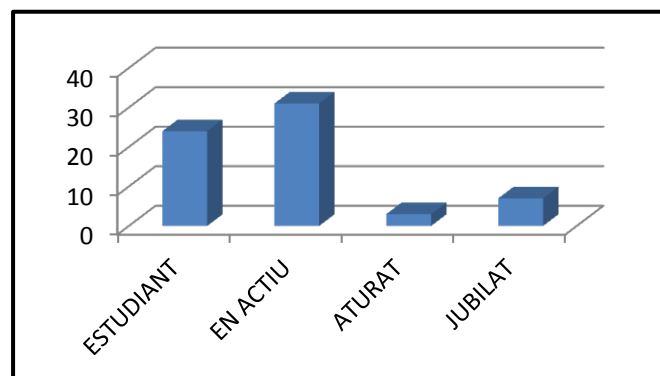


Figura 6.7. Diagrama de barres de les dades sobre l'ocupació



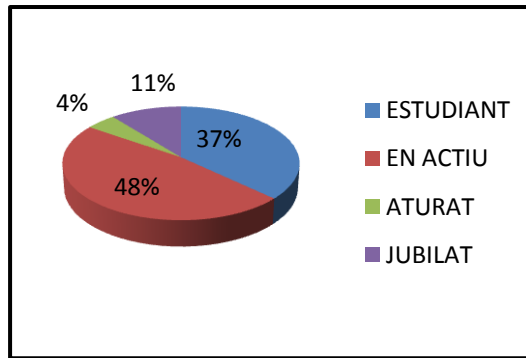


Figura 6.8. Gràfic circular de les dades sobre l'ocupació

En les respostes de la quarta pregunta (pregunta triple personal) veiem que gairebé el 50% de la gent que aposta als jocs d'atzar forma part de la població activa. També hi ha un tant per cent força elevat pel que fa als estudiants (37%), en canvi només el 4% dels que juguen estan aturats i un 11% jubilats.

SECTORS ECONÒMICS		
SECTOR PRIMARI	0	0%
SECTOR SECUNDARI	11	36%
SECTOR TERCIARI	15	48%
SENSE RESPOSTA	5	16%

Taula 6.17. Dades sobre els sectors econòmics

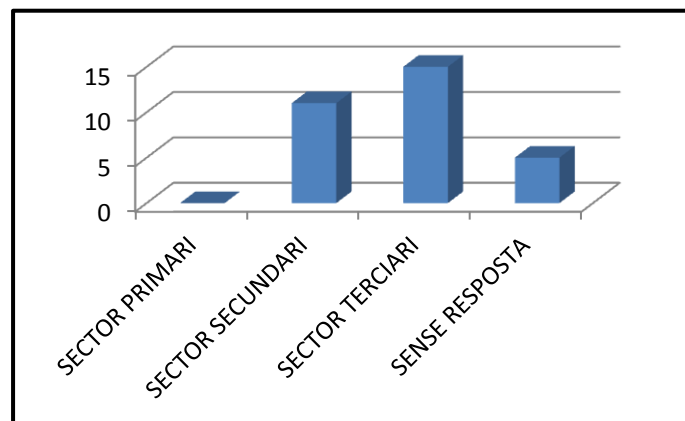


Figura 6.9. Diagrama de barres de les dades sobre els sectors econòmics

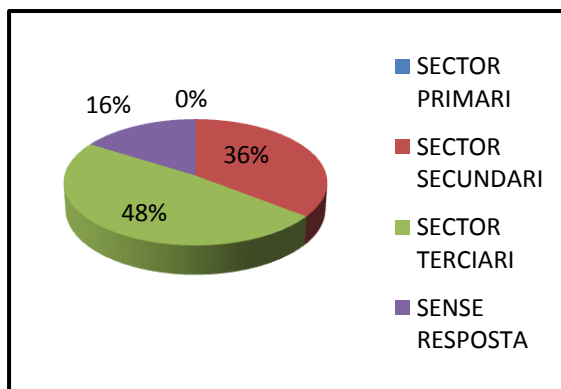


Figura 6.10. Gràfic circular de les dades sobre els sectors econòmics

Entre les persones que formen part de la població activa, gairebé el 50% treballen en el sector terciari, i les feines més destacades són: botiguer, auxiliar de clínica i administratiu. Un 36% forma part del sector secundari, d'entre els quals hi ha paletes, enginyers, un electricista, un mecànic... Pel que fa al sector primari no hi ha ningú i també n'hi ha un 16% que no van respondre a la pregunta de quina ocupació tenen.

SOU MENSUAL		
MENYS DE 1000 EUROS	21	66%
ENTRE 1000 I 2000 EUROS	8	25%
ENTRE 2000 I 3000 EUROS	3	9%
MÉS DE 3000 EUROS	0	0%

Taula 6.18. Dades de la pregunta sobre el sou mensual

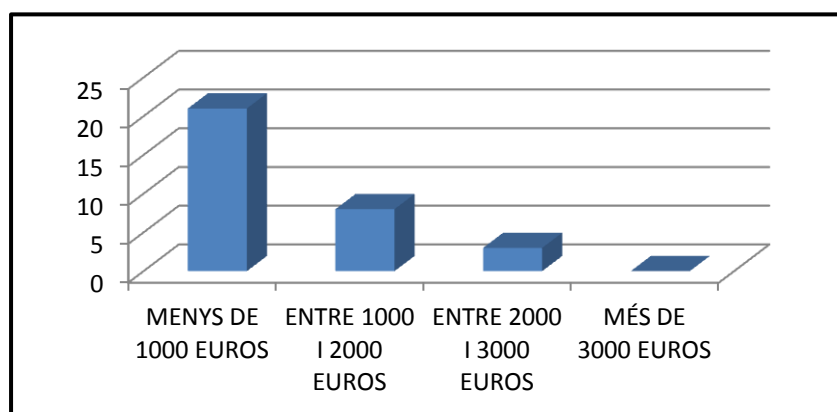


Figura 6.11. Diagrama de barres de les dades sobre el sou mensual

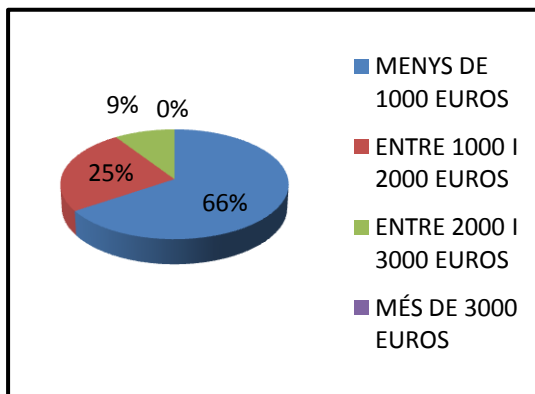


Figura 6.12. Gràfic circular de les dades sobre el sou mensual

En les respostes de la pregunta de quants diners cobres mensualment sabem que la majoria de gent que aposta cobra un sou inferior a 1000 euros (66%). Només el 34% de la població té un salari mensual superior a 1000 euros, dels quals un 9% es troba entre el 2000 i 3000 euros. No hi ha cap participant que cobri més de 3000 euros.

5. JOCS QUE APOSTA				
LOTO RÀPID	3	3%	EUROMILLONES	23 21%
LOTTO 6/49	13	12%	BONOLOTO	9 8%
TRIO	2	2%	EL GORDO	16 14%
SUPER 10	1	1%	LA QUINIELA	3 3%
LOTO EXPRESS	1	1%	EL QUINIGOL	1 1%
SUPERTOC	1	1%	LOTOTURF	1 1%
LOTERIA NACIONAL	6	5%	QUINTUPLE PLUS	1 1%
LA PRIMITIVA	29	26%		

Taula 6.19. Dades de la pregunta sobre els jocs que aposta

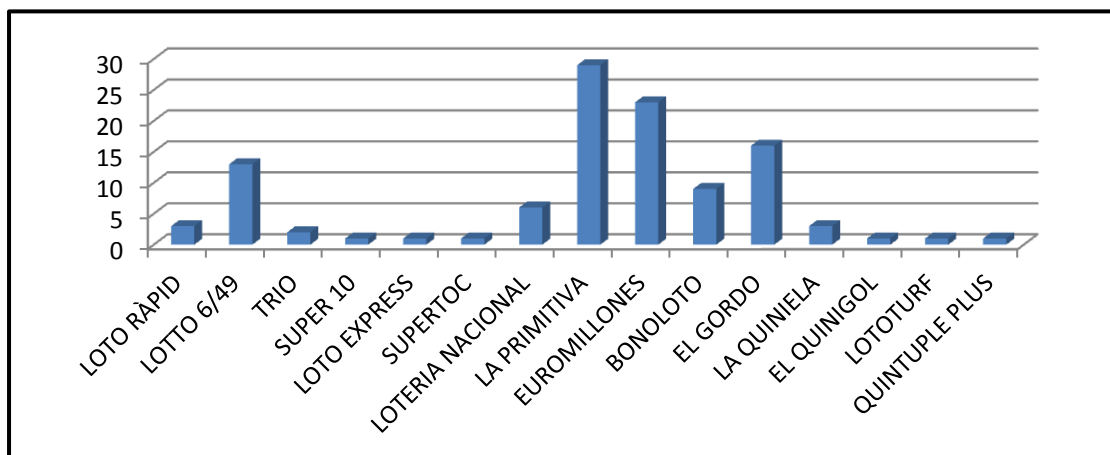


Figura 6.13. Diagrama de barres de les dades sobre els jocs que aposta

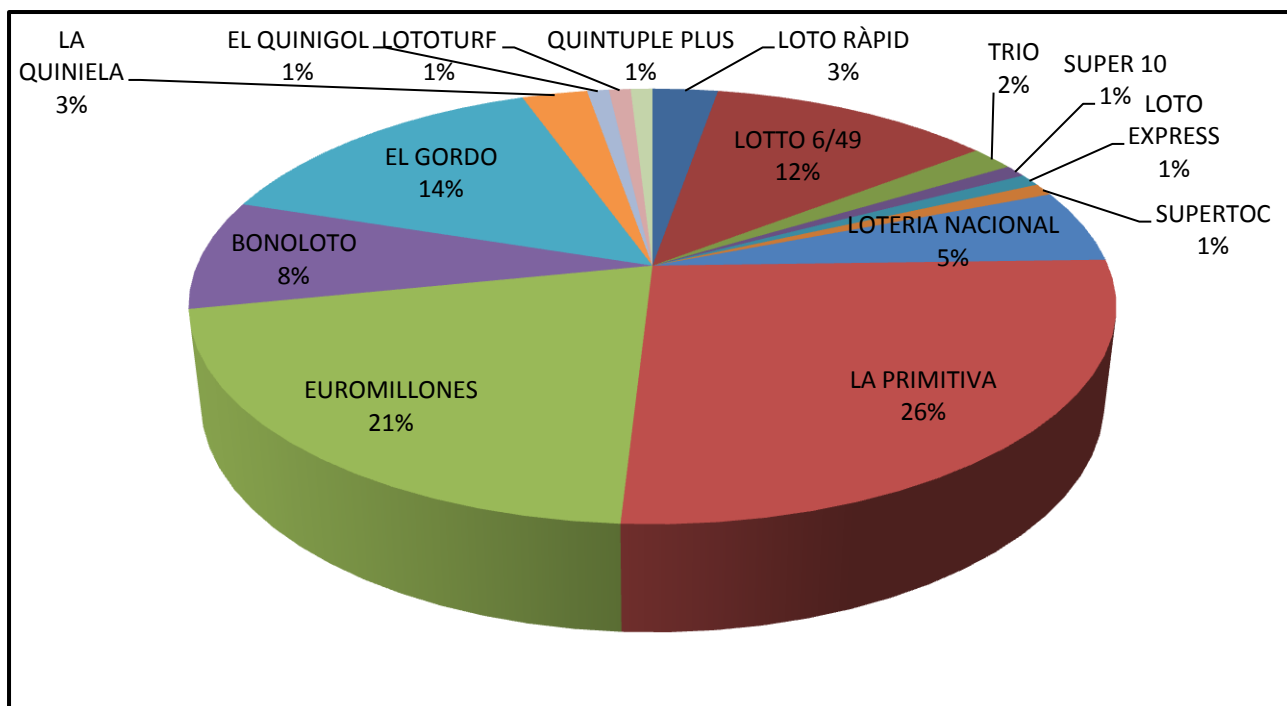


Figura 6.14. Gràfic circular de les dades sobre els jocs que aposta

En la cinquena pregunta sabem que dels quinze jocs que poden participar a Catalunya (europeus, espanyols i catalans), el més apostat és La Primitiva amb un 26%, seguit de l'Euromillones amb un 21%. En tercer lloc hi ha el Gordo de la Primitiva amb un 14%. Pel que fa als sis jocs de Catalunya, el que es troba en primer lloc és la Lotto 6/49 amb un 12%, mentre que els altres cinc (Loto Ràpid, el Trio, el Super 10, la Loto Express i el Supertoc) tenen un total del 8%. Pel que fa a les apostes esportives, La Quiniela és el més jugat amb un 3%.

6. VEGADES QUE JUGA	
ESPORÀDICAMENT	7
1 PER MES	4
2 PER MES	3
3-4 PER MES	20
MÉS DE 4 PER MES	7

Taula 6.20. Dades de la pregunta sobre les vegades que juga

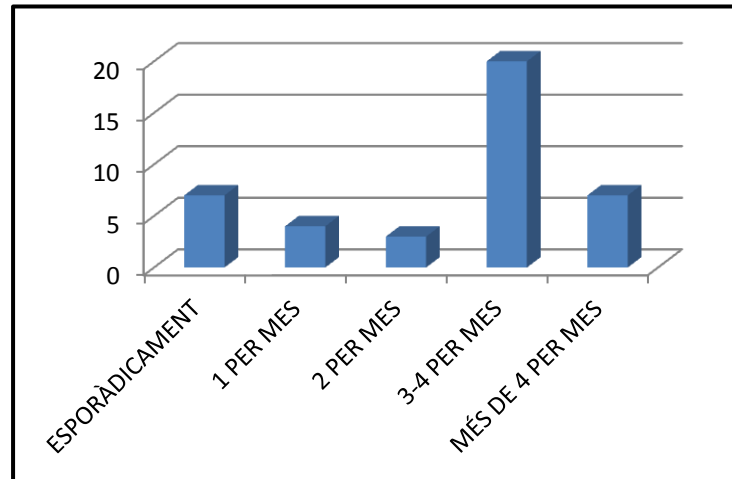


Figura 6.15. Diagrama de barres de les dades sobre les vegades que juga

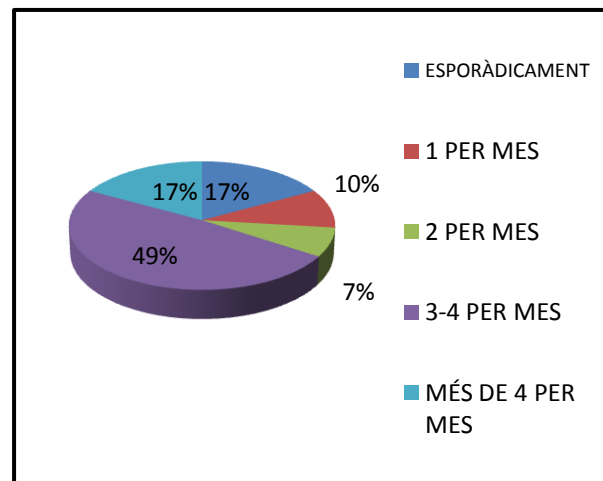


Figura 6.16. Gràfic circular de les dades sobre les vegades que juga

La pregunta número sis ens permet saber les vegades que juguen als diferents jocs. Entre tots els enquestats, un 50% juga de 3 a 4 vegades per mes. El tant per cent restant queda molt repartit: un 17% juguen esporàdicament i també un 17% juguen més de quatre vegades al mes. A més, només un 10% juga una vegada per mes i dues vegades per mes un 7%.

7. QUANTITAT QUE APOSTA		
1-5 EUROS	28	68%
5-10 EUROS	9	22%
10-25 EUROS	3	7%
MÉS DE 25 EUROS	1	3%

Taula 6.21. Dades de la pregunta sobre la quantitat que aposta

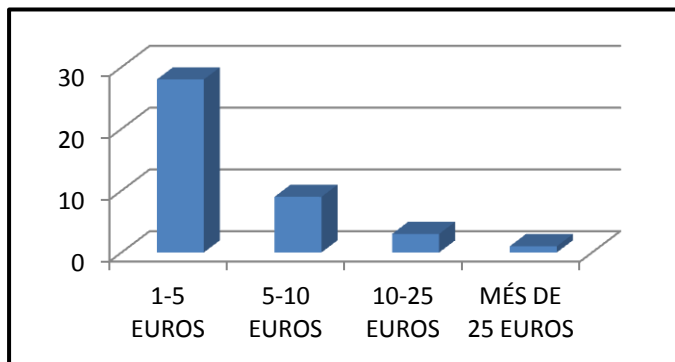


Figura 6.17. Diagrama de barres de les dades sobre la quantitat que aposta

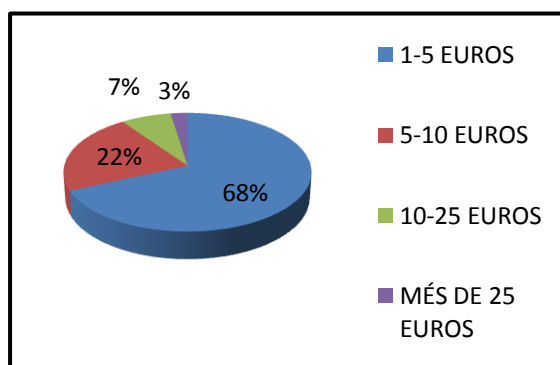


Figura 6.18. Gràfic circular de les dades sobre la quantitat que aposta

La pregunta set fa referència a la quantitat que s’aposta. Amb el gràfic es pot veure que la resposta més freqüent i amb més diferència és la quantitat de 1 a 5 euros (68%), seguida amb un 22% de la quantitat de 5 a 10 euros.

8. HA TINGUT PREMIS	
No	15
Sí	25

Taula 6.22. Dades de la pregunta sobre si ha tingut premis

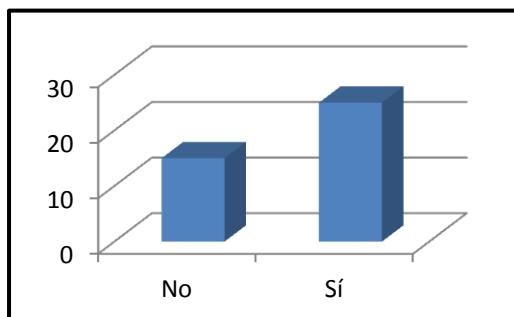


Figura 6.19. Diagrama de barres de les dades sobre si ha tingut premis

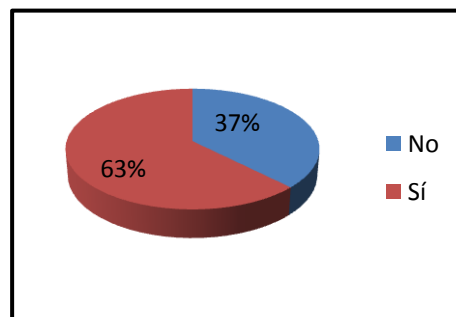


Figura 6.20. Gràfic circular de les dades sobre si ha tingut premis

En la vuitena pregunta (segona pregunta triple) trobem que un 63% de la gent que juga als jocs d'atzar ha obtingut algun premi alguna vegada, mentre que un 37% no ha estat mai premiat.

JOC PREMIAT	
LOTO RÀPID	1
LOTTO 6/49	5
LOTERIA NACIONAL	4
LA PRIMITIVA	8
EUROMILLONES	8
BONOLOTO	2
EL GORDO	2
QUINIELA	2
SENSE RESPOSTA	3

Taula 6.23. Dades de la pregunta sobre a quin joc ha estat premiat

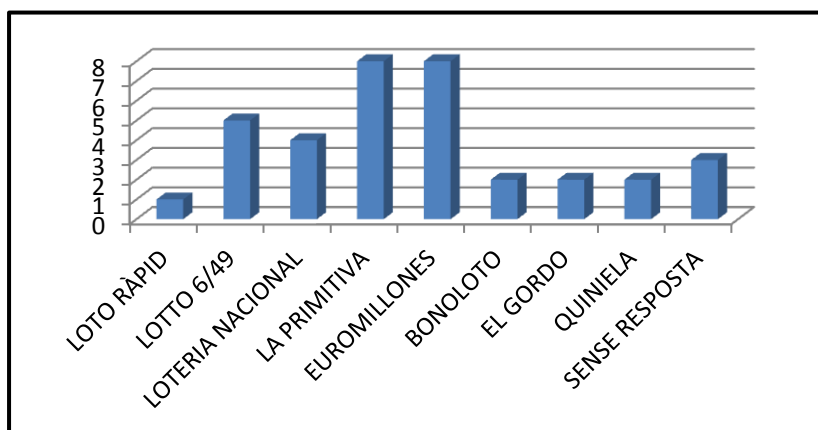


Figura 6.21. Diagrama de barres de les dades sobre a quin joc ha estat premiat

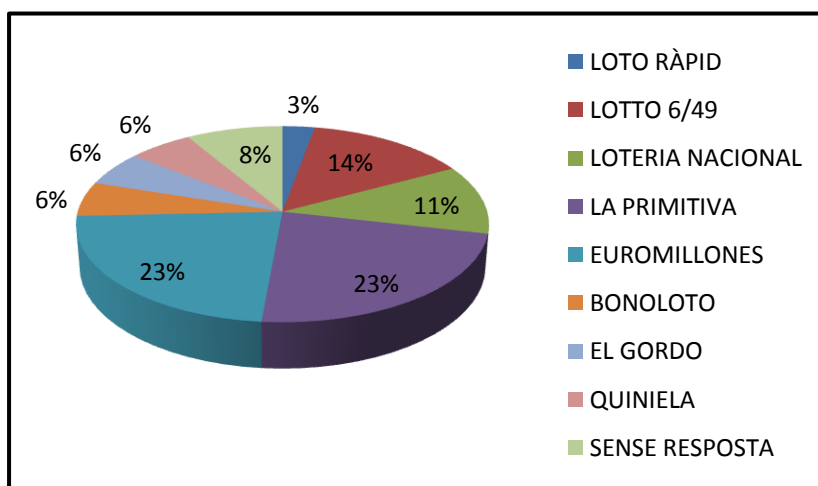


Figura 6.22. Gràfic circular de les dades sobre a quin joc ha estat premiat

Del 68% de persones que han obtingut algun premi, els jocs més premiats han estat La Primitiva i l'Euromillones amb un 23% cada un. Seguidament hi ha la Lotto 6/49 amb un 14% i després la Loteria Nacional amb un 11%. Un 8% dels premiats no han volgut concretar el joc en el que han guanyat. Per últim la Bonoloto, el Gordo i la Quiniela amb un 6%.

DINERS GUANYATS EN TOTAL	
MENYS DE 500 EUROS	20
ENTRE 500 I 2000 EUROS	3
ENTRE 2000 I 6000 EUROS	2
MÉS DE 6000 EUROS	0

Taula 6.24. Dades de la pregunta sobre els diners guanyats en total

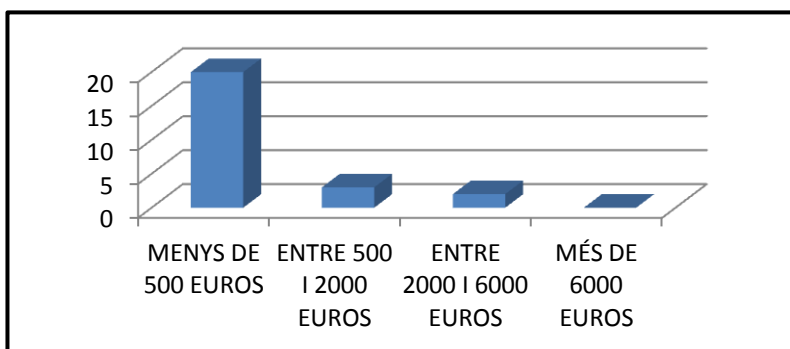


Figura 6.23. Diagrama de barres de les dades sobre els diners guanyats en total

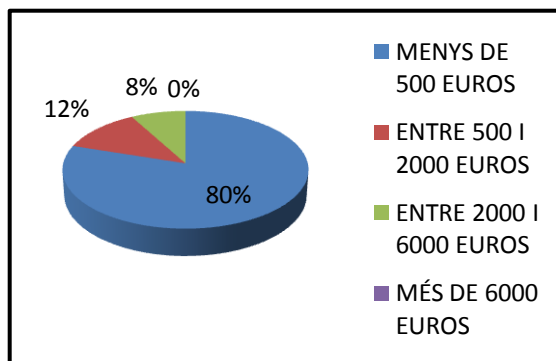


Figura 6.24. Gràfic circular de les dades sobre els diners guanyats en total

Del 68% de premiats, un 80% ha obtingut un premi menor a 500 euros. Un 12% entre 500 i 2000 euros i només un 8% entre 2000 i 6000 euros. No hi ha cap premi superior a 6000 euros.



## 6.4. Anàlisi del joc a Espanya l'any 2009

### 6.4.1. DADES

Dades de les quantitats jugades a nivell nacional durant l'any 2009 distribuïdes per Comunitat Autònoma (euros per habitant)<sup>38</sup>.

	Casinos	Bingos	Màquines	Total	Jocs passius	Jocs actius	Total	ONCE	TOTAL
ANDALUSIA	26,12	47,64	228,03	301,79	84,70	79,92	164,62	56,51	522,92
ARAGÓ	24,95	106,79	357,78	489,52	129,38	81,66	211,04	25,24	725,80
ASTÚRIES	29,71	50,33	246,27	326,31	150,05	110,01	260,06	52,33	638,70
ILLES BALEARS	75,40	55,29	349,15	479,84	77,92	99,58	177,50	59,79	717,13
ILLES CANÀRIES	66,29	125,31	253,52	445,12	79,80	108,79	188,59	56,69	690,40
CANTÀBRIA	41,21	51,68	268,81	361,70	116,52	99,15	215,67	34,67	612,04
CASTELLA I LLEÓ	18,47	51,49	354,56	424,52	165,38	111,44	276,82	27,13	728,47
CASTELLA - LA MANXA	0,00	19,14	283,87	303,01	123,79	84,92	208,71	32,32	544,04
CATALUNYA	66,61	54,32	279,13	400,06	108,47	87,74	196,21	39,68	635,95
VALÈNCIA	45,11	82,77	315,78	443,66	144,04	94,40	238,44	49,48	731,58
EXTREMADURA	37,64	57,34	272,77	367,75	85,28	90,24	175,52	56,27	599,54
GALÍCIA	11,26	34,91	123,99	170,16	97,59	105,53	203,12	25,83	399,11
LA RIOJA	38,73	52,81	525,70	617,24	144,30	97,42	241,72	37,24	896,20
MADRID	71,23	90,46	365,13	526,82	133,46	103,79	237,25	29,22	793,29
MÚRCIA	40,68	42,76	352,07	435,51	141,39	80,03	221,42	76,58	733,51
NAVARRA	0,00	45,18	269,82	315,00	97,53	81,46	178,99	29,20	523,19
PAIS BASC	32,96	53,67	284,77	371,40	138,39	104,15	242,54	27,73	641,67
CEUTA	92,53	222,69	34,95	350,17	31,14	115,92	147,06	39,15	536,38
MELILLA	118,84	27,50	45,47	191,81	30,77	100,87	131,64	49,69	373,14
CANAL INTERNET	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,63	0,63	0,00	0,63
MITJANA	41,89	63,60	260,58	366,07	104,00	91,8825	195,88	40,24	602,18

Taula 6.25. Valor mitjà de les quantitats jugades l'any 2009, per habitant i any distribuïdes per jocs i Comunitats Autònomes

A partir de les dades d'aquesta taula, he elaborat i analitzat:

- un diagrama de barres sobre el valor mitjà de les quantitats jugades distribuïdes per jocs a Espanya.
- un diagrama circular de les quantitats jugades distribuïdes per jocs a Catalunya.
- un diagrama de barres sobre el valor mitjà de les quantitats jugades a Espanya.
- un diagrama de barres comparatiu del valor mitjà de les quantitats jugades entre Espanya i Catalunya.

<sup>38</sup> Dades obtingudes de l'*Informe Anual del Juego en España 2009*, pàgina 18.

#### 6.4.2. ANÀLISI DEL VALOR MITJA DE LES QUANTITATS JUGADES AL 2009 PER HABITANT I ANY, DISTRIBUÏDES PER JOCS A ESPANYA

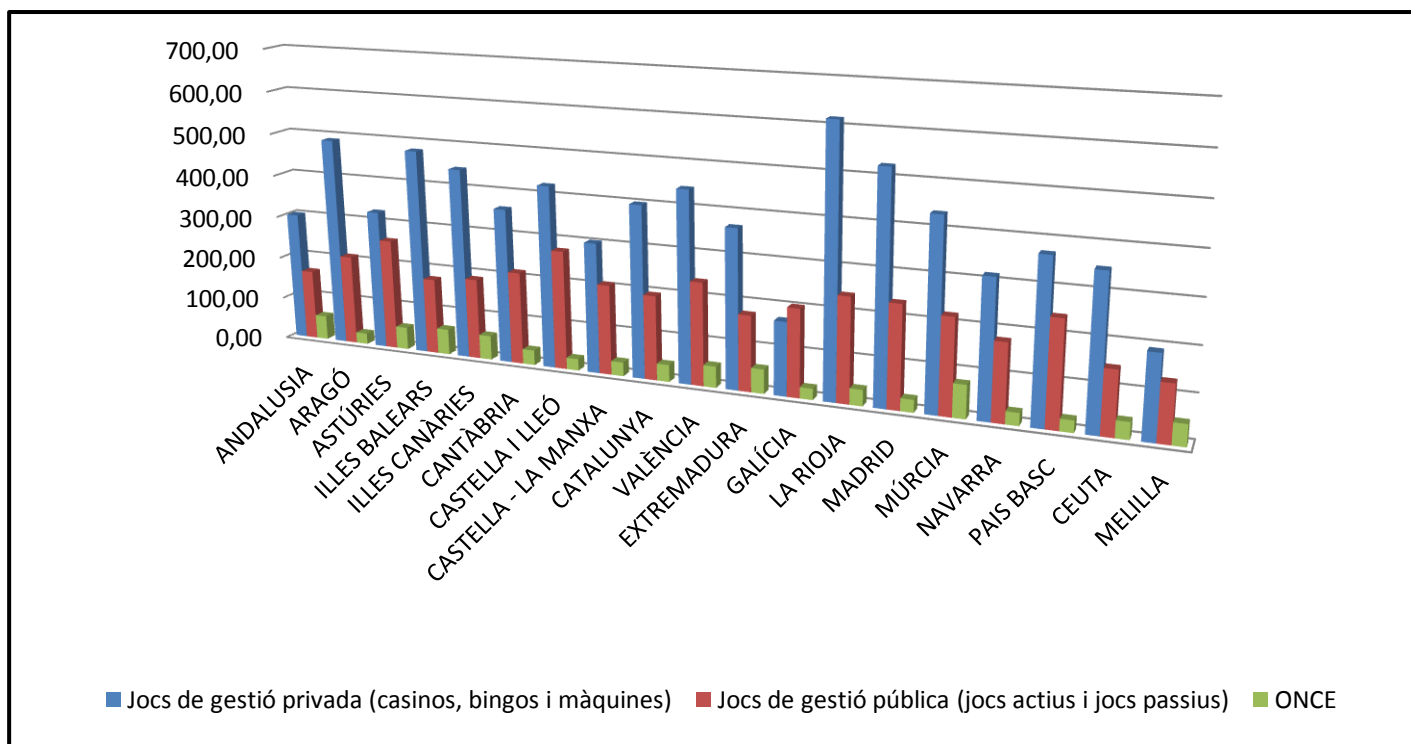


Figura 6.25. Diagrama de barres comparatiu del valor mitjà de les quantitats jugades al 2009 per habitant i any, distribuïdes per jocs a Espanya

El gràfic ens mostra les quantitats jugades distribuïdes per jocs de cada Comunitat Autònoma. Tal com es mostra a la llegenda, els jocs de gestió privada són els casinos, bingos i màquines escurabutxaques, mentre que els jocs de gestió pública fan referència als jocs actius (Quiniela, Quinigol, Lototurf, Primitiva, Quintuple Plus) i els jocs passius (Loteria Nacional). A més hi ha la ONCE<sup>39</sup>, que és una corporació sense ànim de lucre que té la missió de millorar la qualitat de vida dels cecs i els deficients visuals greus de tot Espanya.

Com es pot veure al gràfic, a totes les Comunitats Autònomes es destinen més diners als jocs de gestió privada que no pas als de gestió pública o a l'ONCE.

Pel que fa a les quantitats jugades als jocs de gestió privada, en destaca La Rioja amb més de 600 euros a l'any per habitant, seguit de Madrid que es troba per sobre dels 500 euros. Essent Galícia i Melilla les Comunitats amb menys quantitats jugades (menys de 200 euros). En canvi, ens els jocs de gestió pública es troba Castella i Lleó en la primera posició (276 euros) i Astúries en la segona (260 euros), i Ceuta i Melilla són les Comunitats que menys diners hi destinen. Referent a l'ONCE, la Comunitat Autònoma que més hi juga es Múrcia amb 76 euros, seguida

<sup>39</sup> Organització Nacional dels Cecs d'Espanya.

de les Illes Balears amb 59 euros. Aragó i Galícia són les dues Comunitats que menys diners destinen a l'Once (menys de 26 euros).

Cal destacar que les dades són la mitjana dels euros per any que destinen els habitants a cadascun dels jocs. Així doncs, si dividim la mitjana de totes les Comunitats Autònomes entre els dotze mesos que té l'any, surt que cada espanyol hi destina uns 50 euros al mes.

#### 6.4.3. ANÀLISI DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT I ANY DISTRIBUÏDES PER JOCS A CATALUNYA

	Casinos	Bingos	Màquines	Jocs passius	Jocs actius	ONCE	Total
Quantitat (€)	66,61	54,32	279,13	108,47	87,74	39,68	635,94
Percentatge (%)	10,47	8,54	43,89	17,06	13,80	6,24	100

Taula 6.26. Quantitats jugades per habitant i any distribuïdes per jocs a Catalunya

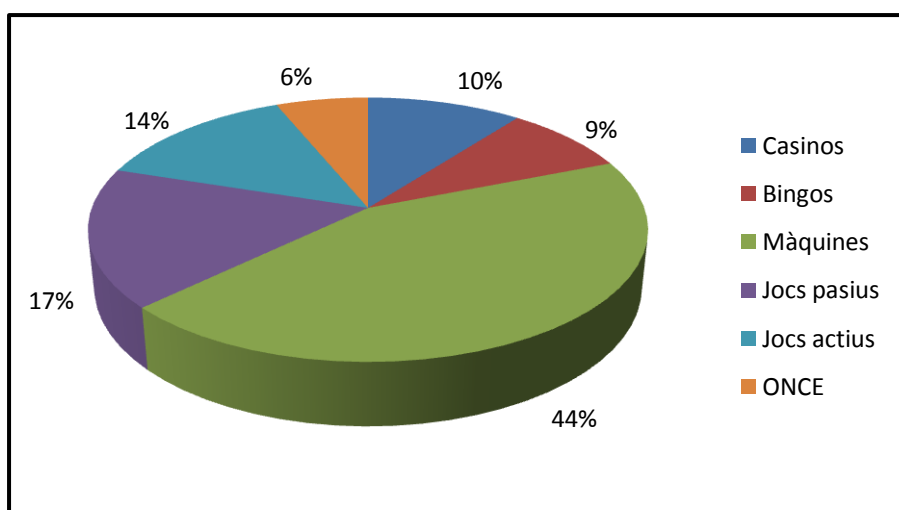


Figura 6.26. Gràfic circular de les quantitats jugades per habitant i any distribuïdes per jocs a Catalunya

En el gràfic hi ha representades les quantitats mitjanes anuals distribuïdes per jocs que destina cada habitant de Catalunya.

Tal com veiem en el gràfic, gairebé el 50% de les quantitats jugades es destina a les màquines escurabutxaques (280 euros anuals). En el segon lloc, amb un 17%, hi trobem els jocs passius (Loteria Nacional) en els quals, a diferència de les màquines, només s'hi destinen uns 110 euros anuals. Seguidament, i amb una diferència menor que entre la del primer i el segon joc, hi trobem els jocs actius (Quiniela, Quinigol, Lototurf, Primitiva, Quintuple Plus) amb un 14%, és a dir, uns 90 euros anuals. Després segueixen els casinos (10%) i els bingos (9%), amb una quantitat de 66 i 55 euros anuals respectivament. En l'últim lloc, al igual que la resta de Comunitats Autònomes, hi trobem l'ONCE amb un 6%, que equival a una quantitat anual d'uns 40 euros.

Catalunya destina uns 400 euros als jocs privats, i es troba una mica per sobre respecte la mitjana d'Espanya que hi destina uns 366 euros. El mateix passa amb els jocs passius, Catalunya hi destina uns 108 euros i Espanya 104. En canvi, en els jocs actius, Catalunya està per sota (87 euros) respecte Espanya (92 euros). El mateix passa amb l'ONCE, però amb una diferència menor, Catalunya (39 euros) i Espanya (40 euros).

Com a resultat d'aquestes dades, la mitjana mensual de la quantitat mitjana destinada als jocs de Catalunya és de 53 euros, i es troba una mica per sobre de la d'Espanya que està als 50 euros.

#### 6.4.4. VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT A ESPANYA

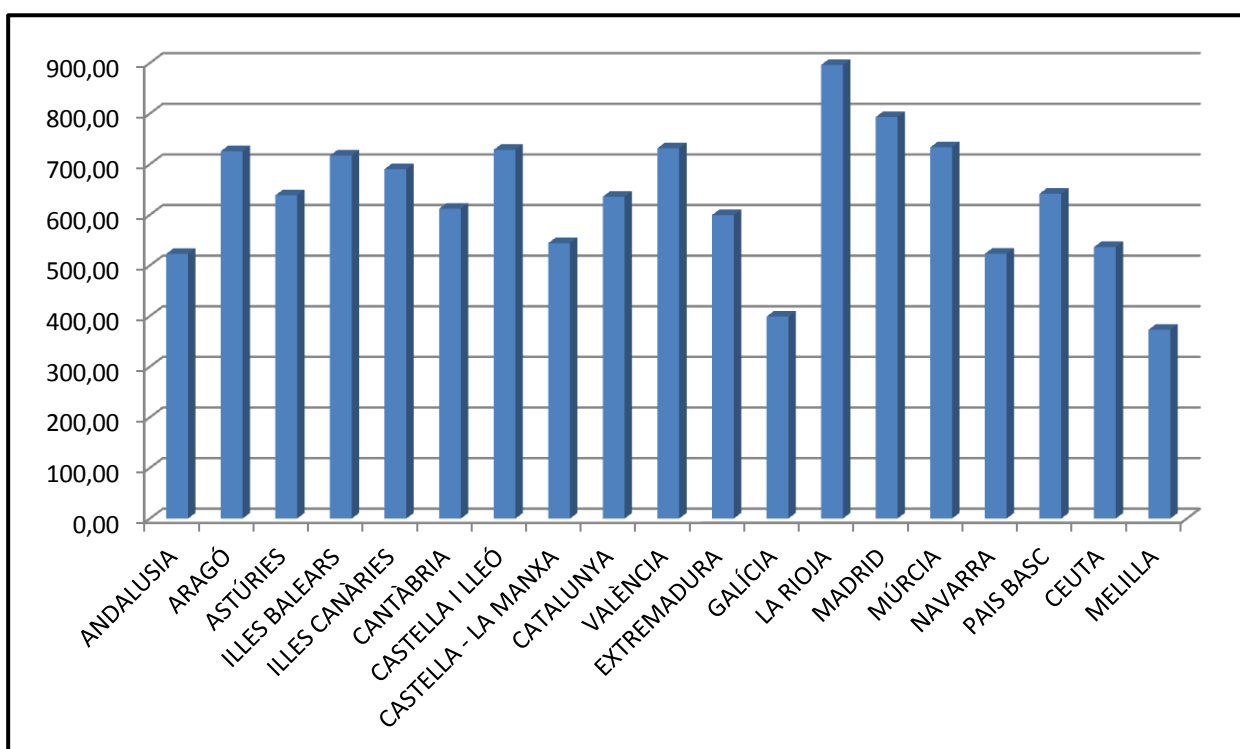


Figura 6.27. Diagrama de barres comparatiu del valor mitjà de les quantitats jugades per habitant a Espanya

En el gràfic hi ha representat el valor mitjà de les quantitats jugades per habitant a les diferents Comunitats Autònomes.

La Rioja és la Comunitat Autònoma que més diners destina al joc (uns 900 euros anuals), seguida de Madrid amb uns 800 euros anuals, essent també aquestes Comunitats les que més diners destinen als jocs privats. Llavors la segueixen Aragó, les Illes Balears, Castella i Lleó, València i Múrcia que troben pel voltant dels 700 euros anuals. Les Comunitats Autònomes que menys juguen, amb una diferència bastant important amb les que més ho fan, són Galícia i Melilla, amb 400 i 370 euros respectivament, i també són aquestes les Comunitats que menys diners destinen als jocs de gestió privada.

Un cop analitzades aquestes dades, es demostra que la quantitat jugada no depèn del nivell de població de cada Comunitat, ja que Andalusia, Catalunya i Madrid són les Comunitats més poblades i en canvi no són les que més diners destinen al joc. A més, les quantitats jugades tampoc es poden relacionar amb els ingressos per habitant. El País Basc, Madrid i Navarra són les Comunitats Autònomes amb una renda per càpita més alta, mentre que aquests territoris no són els que més diners destinen als jocs.

#### 6.4.5. COMPARACIÓ DEL VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT DE CATALUNYA AMB EL DE LES ALTRES COMUNITATS AUTÒNOMES

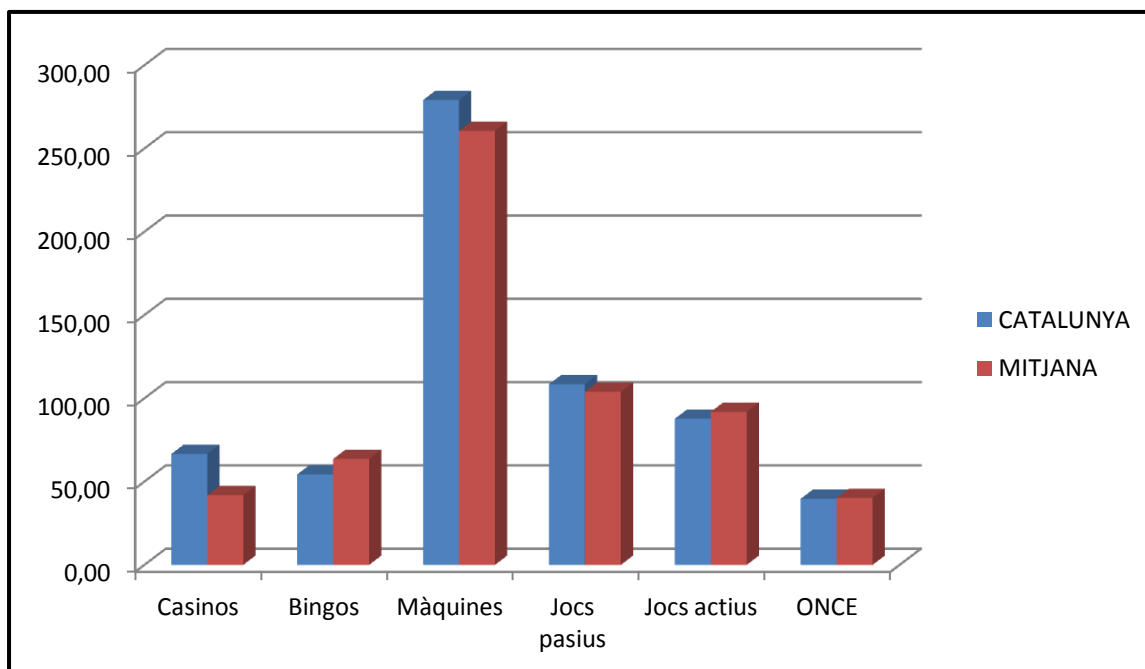


Figura 6.28. Diagrama de barres comparatiu del valor mitjà de les quantitats jugades per habitant de Catalunya amb el de les altres Comunitats Autònomes

A partir del gràfic podem comparar les quantitats jugades a Catalunya distribuïdes per joc amb la mitjana de les quantitats de totes les Comunitats Autònomes.

Es pot veure que tant als casinos, com a les màquines escurabutxaques, com als jocs passius (Loteria Nacional), Catalunya es troba per sobre que la mitjana de tot Espanya. Pel que fa als bingos i als jocs actius (Quiniela, Quinigol, Lototurf, Primitiva, Quintuple Plus), Catalunya es troba una mica per sota de la resta d'Espanya. En referència a l'ONCE, la quantitat que s'hi destina a Catalunya és més o menys la mateixa que la mitjana de totes les Comunitats Autònomes.

La diferència més significativa pel que fa a la quantitat jugada és amb els casinos i les màquines escurabutxaques, ja que Catalunya es troba força més per sobre que la mitjana d'Espanya.

## 6.5. El problema d'investigació

### 6.5.1. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

Després de descriure i analitzar els jocs de loteries i apostes més comuns a Espanya, em centro amb el de La Quiniela. Un cop llegit l'estudi *La travessa com a joc d'atzar* fet per Josep Lluís Cañadilla, em vaig proposar seguir la investigació i ampliar-la.

Ell va realitzar l'estudi amb els resultats de les travesses de la temporada 1992-1993 fins a la 2001-2002. Jo he estudiat les últimes deu jornades de La Quiniela (2001-2010) per tal de poder confirmar que realment no hi havia les mateixes probabilitats de que sortís un 1, una x o un 2 al resultat. A partir de les dades obtingudes n'he extret conclusions de per què podem considerar que La Quiniela no és un joc d'atzar com tots els altres.

### 6.5.2. ANÀLISI I INTERPRETACIÓ DE DADES

He obtingut els resultats de les Quinieles de les últimes deu temporades de la pàgina web de Loteries i Apostes de l'Estat Espanyol, i els he ordenat per temporades amb diferents taules<sup>40</sup>. A més, també he utilitzat els resultats de les 9 temporades anteriors (1992-2000) extrets del treball *La travessa com a joc d'atzar*. A continuació, he comparat els resultats de totes les jornades estudiades i, més o menys, es repeteixen sempre els mateixos percentatges: 45-49% d'uns, 25-29% d'ixs i 24-27% de dosos.

A la taula següent es mostren els percentatge d'uns, d'ixs i de dosos de les últimes 19 temporades (1992-2011) de la Quiniela i també la mitjana total d'uns, d'ixs i de dosos d'aquests anys.

Temporada	Jornades	1	x	2
1992-93	41	45,37%	29,92%	24,72%
1993-94	36	47,22%	29,81%	22,96%
1994-95	40	45,33%	31,17%	23,50%
1995-96	38	43,68%	28,95%	27,37%
1996-97	42	47,14%	26,35%	26,51%
1997-98	40	46,83%	29,33%	23,83%
1998-99	42	45,87%	28,73%	25,40%
1999-00	41	45,37%	29,76%	24,88%
2000-01	42	48,57%	27,30%	24,13%
2001-02	43	44,03%	29,30%	26,70%
2002-03	43	42,95%	31,16%	25,89%
2003-04	42	45,41%	27,38%	27,21%
2004-05	40	46,07%	27,68%	26,25%
2005-06	43	44,19%	27,75%	28,06%

<sup>40</sup> Veure annex 4, on hi ha les taules dels resultats de les quinieles de l'any 2001 al 2010.

2006-07	42	46,98%	25,71%	27,30%
2007-08	48	46,67%	26,39%	26,94%
2008-09	55	47,39%	25,45%	27,15%
2009-10	61	47,98%	26,01%	26,01%
2010-11	59	49,60%	24,29%	26,10%
	<b>MITJANA</b>	46,14%	28,02%	25,84%

Taula 6.27. Percentatges d'uns, d'ixs i de dosos de les últimes 19 jornades i mitjana total

Amb aquest resultat es demostra que és cert que no hi ha les mateixes probabilitats de que surti un 1, una x o un 2. Per aquest motiu no he pogut calcular la probabilitat de guanyar de La Quiniela com ho he fet amb altres jocs, és a dir, calculant-la com si les probabilitats d'obtenir els diferents valors fossin equiprobables. He aproximat els percentatges a la mitjana de tots els anys trobats:

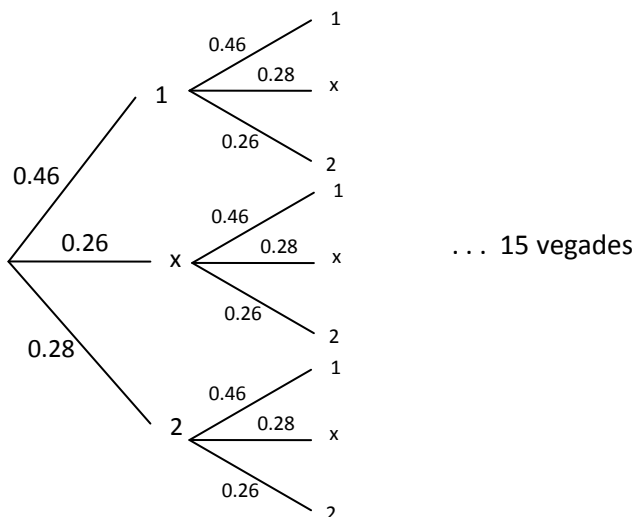
$$P(1) \cong 0.46$$

$$P(2) \cong 0.26$$

$$P(x) \cong 0.28$$

Així doncs, com que la probabilitat de guanyar a la travessa depèn dels resultats, es podria estudiar, per exemple:

- Quina probabilitat tinc que surti una travessa amb 3 uns, 7 dosos i 5 ixes? Es pot fer un quadre resum en un diagrama d'arbre per obtenir el resultat.

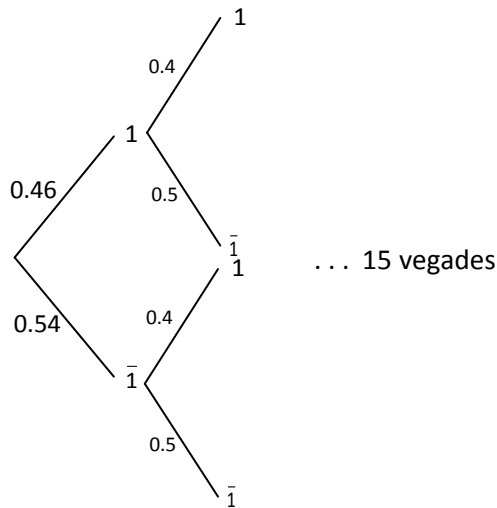


$$P(3 \text{ uns, } 5 \text{ ixes i } 7 \text{ dosos}) = (0.46)^3 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^7 \cdot \underbrace{\frac{15!}{3! \cdot 5! \cdot 7!}}_{\text{n}^\circ \text{ de branques}} = 0.004848569953$$

- Quina probabilitat tinc que surti la travessa "1 1 x x 2 1 1 x x 1 2 2 2 x 1" ordenada de la mateixa manera?

$$P = (0.46)^6 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^4 = 0.000000074513$$

- Quina probabilitat tinc que surtin 10 uns? Igual que al problema anterior, es pot fer un diagrama d'arbre per tal de trobar el resultat.



$$P(10 \text{ uns}) = \underbrace{\binom{15}{10}}_{\text{n}^\circ \text{ de branques}} \cdot (0.46)^{10} \cdot (0.54)^5 = 0.05849280498$$

En aquests exemples es veu que aquesta distribució segueix una binomial, per això he decidit fer un estudi més acurat d'aquesta situació<sup>41</sup>.

D'altra banda, l'estudi de l'esperança del jugador a guanyar-hi diners també dependrà de la travessa que hagi sortit. Per exemple, si ha sortit la travessa anterior (1 1 x x 2 1 1 x x 1 2 2 2 x 1) i considerem que el preu de la travessa és d'1 euro, el càlcul de l'esperança matemàtica és el següent:

$$P(\text{sortir la travessa}) = (0.46)^6 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^4 \longrightarrow \text{Premi: } x \text{ €}$$

$$P(\text{no sortir la travessa}) = 1 - ((0.46)^6 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^4) \longrightarrow \text{Premi: } 0 \text{ €}$$

$$\mu = (0.46)^6 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^4 \cdot (x - 1) + [1 - (0.46)^6 \cdot (0.28)^5 \cdot (0.26)^4] \cdot (-1)$$

A més, també he pensat en realitzar un simulador utilitzant les dades de les jornades estudiades<sup>42</sup>.

### 6.5.3. ELABORACIÓ D'UN SIMULADOR

#### 6.5.3.1. Concepte de simulador

Segons l'IEC, un simulador és un *dispositiu, mecanisme o programa informàtic que permet representar artificialment un funcionament real*. La simulació és, doncs, la imitació d'alguna cosa real, de l'estat de coses o d'un procés. Per dur-la a terme és necessària l'adquisició d'una font d'informació vàlida sobre la selecció pertinent de les principals característiques i

<sup>41</sup> Veure apartat 6.5.4 sobre el descobriment de la Campana de Gauss.

<sup>42</sup> Veure apartat 6.5.3 sobre l'elaboració del simulador.



comportaments, la utilització de la simplificació de les aproximacions i suposicions dins de la simulació i la fidelitat i la validesa dels resultats de la simulació.

En el meu treball utilitzo la simulació per ordinador, que és un programa informàtic la finalitat del qual és crear una simulació d'un model abstracte d'un determinat sistema.

#### 6.5.3.2. Programa GeoGebra

He utilitzat el programa GeoGebra per elaborar el simulador. És un programari lliure i de codi obert que combina geometria, àlgebra i càlcul. Me l'he descarregat gratuïtament a la seva pàgina oficial<sup>43</sup>.

El GeoGebra va néixer l'any 2002 com a part del projecte de la tesis doctoral de Markus Hohenwarter a la Universitat de Salzburg. Es volia crear combinant característiques dels programes de geometria existents en aquell moment i els sistemes d'àlgebra computacional, per tal de fer-lo útil per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

La versió actual del GeoGebra permet realitzar moltes representacions d'objectes matemàtics enllaçats dinàmicament mitjançant la visualització en la zona gràfica, la finestra algebraica i el full de càlcul. A més, també incorpora uns *applets*<sup>44</sup> que permeten la creació de pàgines web interactives. Està traduït a 52 idiomes i ha rebut alguns premis importants tant a Europa com als Estats Units. El nombre de visitants de la pàgina web del programa ha augmentat considerablement: al 2004 tenia uns 7.000 visitants per mes mentre que actualment n'hi ha uns 600.000.

A finals de l'any 2007 es va crear l'*International GeoGebra Institute* (IGI). És una organització sense ànim de lucre té com a objectius oferir formació i suport al professorat, desenvolupar el programari i crear materials per a l'ensenyament, impulsar la recerca i també arribar a les comunitats menys afavorides. L'IGI funciona com a orientadora dels *Instituts GeoGebra locals* (GI), que tenen els mateixos objectius que l'IGI però els adapten segons les necessitats, interessos i prioritats de la zona geogràfica en què es troba. Actualment n'hi ha 42 en 32 països, i no només creen projectes a nivell local, sinó també per a tota la comunitat del GeoGebra. A més, s'està estudiant com crear grups de treball en GI locals en països en vies de desenvolupament, per així poder ampliar la xarxa internacional que permetrà un millor intercanvi de propostes i experiències en el camp de l'educació.

Degut al creixement de la comunitat i a l'augment de recursos i propostes didàctiques que alumnes i professors han compartit, es va crear el *GeoGebra Tube*. L'objectiu del qual és crear

---

<sup>43</sup> [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

<sup>44</sup> Segons l'IEC, aplicació simple amb una única funció específica, que no s'emmagatzema a la memòria de l'ordinador i que cal baixar cada vegada que es vol utilitzar.

una plataforma en línia que permeti compartir, valorar i comentar creacions i pàgines web elaborades amb el GeoGebra d'una manera ràpida i eficaç.

En definitiva, el Geogebra és una organització internacional que ha ajudat a crear una nova manera d'ensenyar i aprendre les matemàtiques gràcies a milers de voluntaris.

### 6.5.3.3. Característiques del simulador

El simulador havia de complir unes quantes condicions:

- 1) Havia d'aproximar-se als percentatges trobats de uns, ixs, i dosos per any.
- 2) Havia d'adaptar-se al nombre de jornades de l'any i per tant el nombre de tirades havia de ser variable.
- 3) S'haurien de distribuir els resultats de 1, X, 2 en jornades de quinze resultats.

(El programa no acceptava un valor no numèric en una sentència, per això el número 3 de cada jornada representa la X).

Vaig pensar que seria interessant que els resultats fossin visuals, per aquest motiu vaig dissenyar una capsa quadrada on cada resultat que es trobés a l'atzar es visualitzés per un punt. A més, vaig aconseguir que aquests punts tinguessin un color diferent segons si a la tirada a l'atzar sortís un 1, una X, o un 2.

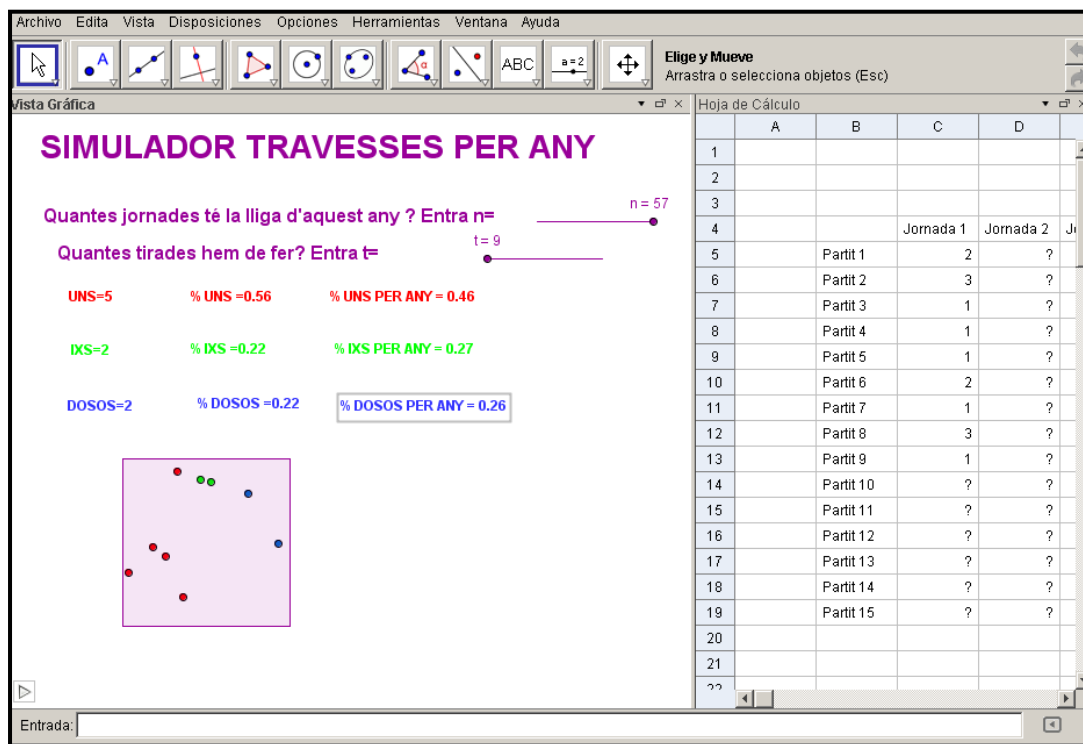


Figura 6.29. Imatge del simulador amb nou tirades

A la figura 6.29 es veu el simulador després d'haver fet nou tirades. Les 5 boles de color vermell representen els 5 uns que han sortit, i l'ordre en el qual han sortit queda reflectit a la taula de la dreta: partit 3, partit 4, partit 5, partit 7 i partit 9. Els dosos, són les boles de color verd i han sortit en els partits 1 i 6, mentre que les ixs, són les boles de color blau i han sortit en els partits 2 i 8.

Evidentment, amb només nou tirades els percentatges d'uns, ixs i dosos poden tenir una aproximació força allunyada dels percentatges trobats, però a mesura que es va augmentant el nombre de tirades, aquests percentatges s'aproximen cada vegada més. Es pot comprovar a la figura 8.3, quan s'han realitzat les 665 tirades.

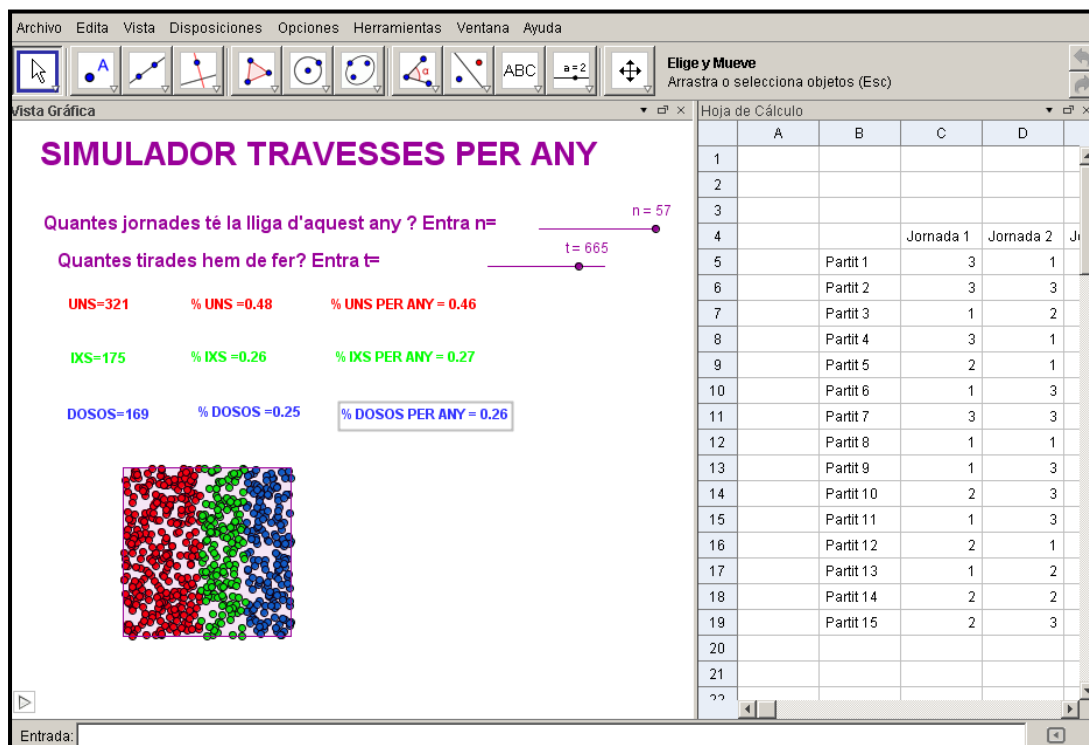


Figura 6.30. Imatge del simulador amb les tirades de tots els partits de lliga d'un any

#### 6.5.3.4. Passos per a l'elaboració del simulador

##### - Construcció de la capsa

S'ha de dibuixar una capsa on la longitud del costat fos d'una unitat seguint una sèrie de passos. Primer de tot, cal dibuixar el punt  $A(0,0)$  i  $B(1,0)$  (vèrtexs inferiors del quadrat). Tot seguit, amb l'eina Polígon  $[A,B,4]$ , s'ha de dibuixar un polígon regular de quatre costats (quadrat). El programa, automàticament, assigna noms als segments que formen el quadrat, però no els veiem perquè hem desactivat l'opció "muestra rótulo".

A la figura 6.31 es pot veure el “protocolo de la construcción” amb els punts i el polígon regular:

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número t		t = 665
2	Punto A		A = (0, 0)
3	Punto B		B = (1, 0)
4	Cuadrilátero poligo...	Polígono[A, B, 4]	polígono1 = 1
4	Segmento a	Segmento [A, B] de Cuadrilátero polígono1	a = 1
4	Segmento b	Segmento [B, C] de Cuadrilátero polígono1	b = 1
4	Segmento c	Segmento [C, D] de Cuadrilátero polígono1	c = 1
4	Segmento d	Segmento [D, A] de Cuadrilátero polígono1	d = 1

Figura 6.31. “Protocolo de la construcción” del simulador dels punts i el polígon regular

#### - Visualització de les boles a l'atzar

Nº	Nombre	Definición	Valor
8	Lista L	Secuencia[random(), random(), i, 1, t]	L = {(0.66, 0.67), (0.59, 0.66), (0.33, 0.26), (0.66, 0.9...}
9	Texto text2		"Quantes tirades hem de fer? Entra t"
10	Lista AbscissesL	Secuencia[x(Elemento[L, i]), i, 1, t]	AbcissesL = {0.66, 0.59, 0.33, 0.66, 0.85, 0.05, 0.5...}
11	Número uns	CuentaSi[x ≤ 0.46, AbcissesL]	uns = 321
12	Número ix	CuentaSi[0.46 < x ≤ 0.74, AbcissesL]	ixs = 175
13	Número dosos	CuentaSi[x > 0.74, AbcissesL]	dosos = 169

Figura 6.32. “Protocolo de la construcción” del simulador de la llista L i la llista AbscissesL

Tal com es veu a la figura 6.32, cal crear una llista de números a l'atzar utilitzant dues sentències. La primera de les quals és per crear llistes: “Secuencia [ ]”, i la segona és per triar a l'atzar un número entre 0 i 1: “Funció random ( )”. Utilitzant aquestes dues sentències hem creat la llista L, formada per punts (x,y) trobats a l'atzar. El motiu pel qual hi ha dues sentències random és perquè hi ha el punt de les abscisses (x) i el de les ordenades (y). D'aquesta manera,

si es visualitzen els punts de la llista grans (“tamaño 3”) poden semblar boles que es mouen dins el quadrat.

D'altra banda, la llista AbscissesL conté només el valor de les abscisses de la llista L, que són els que utilitzarem per tal de transformar-los en uns, ixs o dosos.

En la figura també es veu que s'ha entrat el text “Quantes tirades hem de fer? (variable t)” i el recompte del nombre d'uns, ixs i dosos amb la sentència “CuentaSI[ ]”.

Tot seguit s'han de crear quatre noves llistes: la Llista Final1, la Llista Final2, la Llista Finalx i la Llista Finaltotal, on es guarden els elements de les llistes creades a l'atzar on hi havia 1, x, 2 (figura 6.33). La llista FinalTotal és la que utilitzarem per situar els resultats en el full de càlcul.

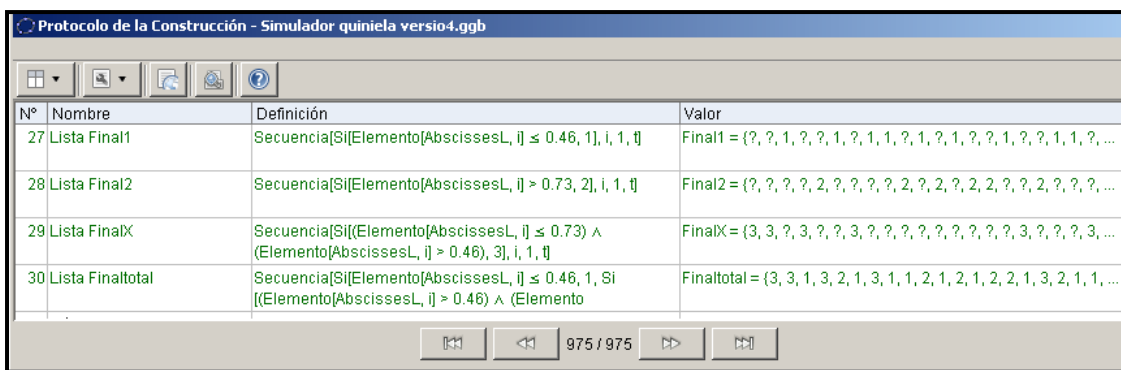


Figura 6.33. “Protocolo de la construcción” del simulador de la llista Final1, la llista Final2, la llista Finalx i la llista Finaltotal

- Recomptes d'uns, ixs i dosos

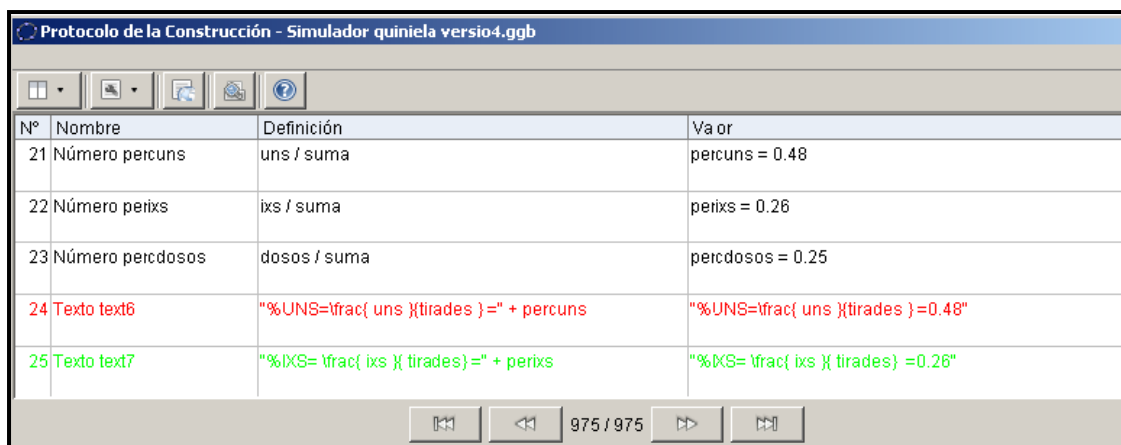
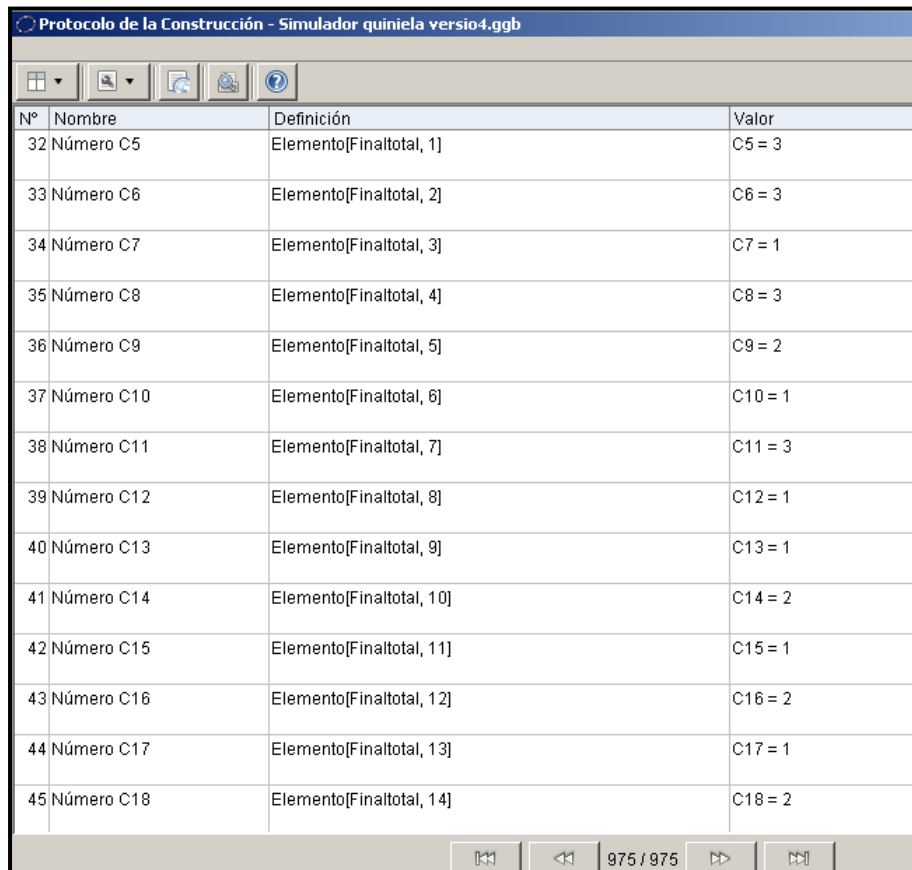


Figura 6.34. “Protocolo de la construcción” del simulador de les variables percuns, perixs i percdosos

Tal com es mostra a la figura 6.34, s'han d'introduir les variables percuns, perixs, percdosos que fan el recompte dels percentatges que han sortit. En la figura, també s'hi poden veure els textos que apareixeran al costat del simulador (color vermell i verd) per tal d'observar com varien els percentatges a mesura que es van fent les diferents tirades.

- Elaboració de la taula de les jornades amb els resultats

Per últim, s'han d'introduir els resultats a les caselles del full de càlcul utilitzant els elements corresponents de la llista Finaltotal. A la figura 6.35 es poden veure els valors dels 14 partits de la primera jornada, que corresponen al nom "Número C5" fins el "Número C18". Aquests valors són els que s'han d'introduir a les caselles del full de càlcul. S'ha de seguir el mateix procés que el de la Jornada 1 amb totes les jornades restants per elaborar la taula completa.



N°	Nombre	Definición	Valor
32	Número C5	Elemento[Finaltotal, 1]	C5 = 3
33	Número C6	Elemento[Finaltotal, 2]	C6 = 3
34	Número C7	Elemento[Finaltotal, 3]	C7 = 1
35	Número C8	Elemento[Finaltotal, 4]	C8 = 3
36	Número C9	Elemento[Finaltotal, 5]	C9 = 2
37	Número C10	Elemento[Finaltotal, 6]	C10 = 1
38	Número C11	Elemento[Finaltotal, 7]	C11 = 3
39	Número C12	Elemento[Finaltotal, 8]	C12 = 1
40	Número C13	Elemento[Finaltotal, 9]	C13 = 1
41	Número C14	Elemento[Finaltotal, 10]	C14 = 2
42	Número C15	Elemento[Finaltotal, 11]	C15 = 1
43	Número C16	Elemento[Finaltotal, 12]	C16 = 2
44	Número C17	Elemento[Finaltotal, 13]	C17 = 1
45	Número C18	Elemento[Finaltotal, 14]	C18 = 2

Figura 6.35. Valor dels catorze partits de la primera jornada obtinguts amb el simulador

#### 6.5.4. DESCOBRIMENT DE LA CAMPANA DE GAUSS (DISTRIBUCIÓ NORMAL)

##### 6.5.4.1. Gràfic de la distribució del nombre d'uns per jornada

Després de comptar el nombre d'uns que hi van haver al resultat de les deu jornades estudiades (2001-2011)<sup>45</sup> he realitzat el gràfic que es mostra a continuació, en el que s'hi observa que les dades segueixen, d'una manera més o menys ajustada, la forma d'un gràfic de distribució binomial, és a dir, té forma de campana. Per realitzar el gràfic he utilitzant la taula següent en la que hi ha calculada la freqüència relativa ( $f_i\%$ ):

<sup>45</sup> Veure annex 5, on hi ha la taula del recompte d'uns de les quinielles de l'any 2001 al 2010.

Número d'uns ( $x_i$ )	$n_i$	fi %
0	0	0%
1	1	0,2100840%
2	1	0,2100840%
3	8	1,6806723%
4	50	10,5042017%
5	50	10,5042017%
6	102	21,4285714%
7	79	16,5966387%
8	92	19,3277311%
9	51	10,7142857%
10	31	6,5126050%
11	8	1,6806723%
12	2	0,4201681%
13	1	0,2100840%
TOTAL	476	100%

Taula 6.28. Freqüències absolutes i freqüències relatives en % del nombre d'uns per jornada

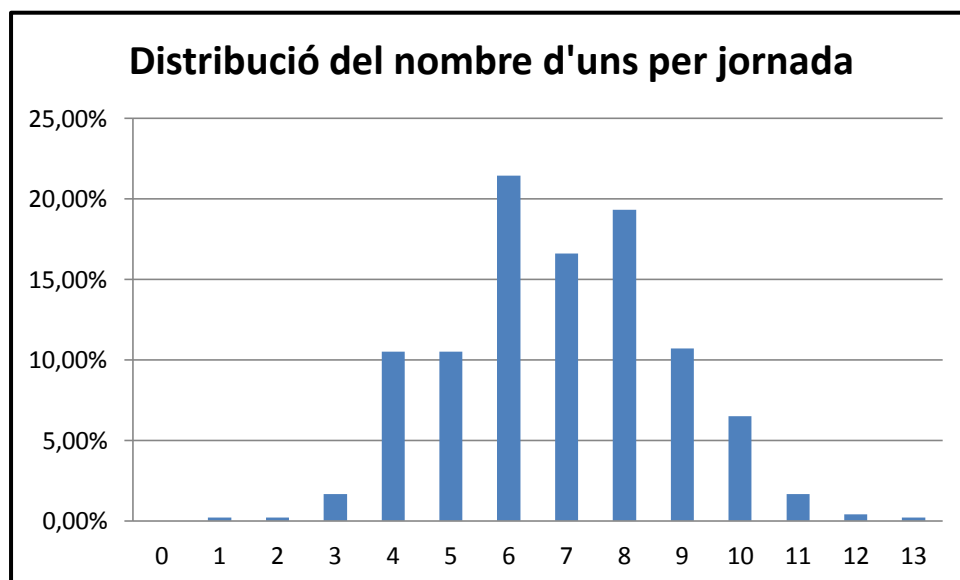


Figura 6.36. Distribució del nombre d'uns per jornada

#### 6.5.4.2. Distribució binomial

Un experiment de Bernoulli<sup>46</sup> és un experiment aleatori que es caracteritza per ser dicotòmic, és a dir, només són possibles dos resultats, uns dels quals s'anomena èxit i té una probabilitat d'ocurrència  $p$  i l'altre, fracàs, amb una probabilitat  $q = 1 - p$ . La distribució binomial és

<sup>46</sup> Jakob Bernoulli (1654 – 1705) va néixer a Basilea (Suïssa) i fou un matemàtic i científic suís.

una distribució de probabilitat discreta que mesura el nombre d'èxits en una seqüència de  $n$  experiments independents de Bernoulli amb una probabilitat fixa  $p$  d'ocurrència de l'èxit entre els esdeveniments.

Per representar una distribució binomial de paràmetres  $n$  i  $p$  s'escriu  $X \sim B(n, p)$ , on:

$X = n^\circ$  d'èxits obtinguts al repetir  $n$  vegades un experiment

$n = n^\circ$  de vegades que repetim l'experiment

$p = P(\text{èxit})$

$q = P(\text{fracàs})$

La funció de probabilitat d'una distribució binomial és:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

A partir d'això, podem calcular la distribució binomial del recompte d'uns de cada jornada simbolitzada per  $X \sim B(15, 0.46)$ , en la que:

$p = P(\text{sortir 1})=0,46$

$q = P(\text{no sortir 1})=0,54$

$n = n^\circ$  de partits d'una jornada=15

$X = n^\circ$  d'uns al realitzar 15 vegades l'experiment

Per poder realitzar el gràfic de la distribució binomial, primer de tot, hem de calcular les probabilitats:

$k$	$P(X=k)= P_i$	$f_i$	$ f_i - P_i $ Error absolut	$\frac{ f_i - P_i }{P_i}$ Error relatiu
0	$P(X=0) = \binom{15}{0} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^0 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{15} = 0.000096807$	0	0.000096807	100%
1	$P(X=1) = \binom{15}{1} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{14} = 0.001237729$	0.002100840	0.000863111	69.73%
2	$P(X=2) = \binom{15}{2} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{13} = 0.007376049$	0.002100840	0.005275209	71.52%
3	$P(X=3) = \binom{15}{3} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{12} = 0.027227641$	0.016806723	0.010420918	38.27%
4	$P(X=4) = \binom{15}{4} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^4 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{11} = 0.069581748$	0.105042017	0.035460269	50.96%
5	$P(X=5) = \binom{15}{5} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^{10} = 0.130401350$	0.105042017	0.025359333	19.48%
6	$P(X=6) = \binom{15}{6} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^6 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^9 = 0.18513772$	0.214284714	0.029146994	15.74%



7	$P(X=7) = \binom{15}{7} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^7 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^8 = 0.202769883$	0.165966387	0.036803496	18.15%
8	$P(X=8) = \binom{15}{8} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^8 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^7 = 0.172729901$	0.193277311	0.02054741	11.90%
9	$P(X=9) = \binom{15}{9} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^9 \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^6 = 0.114442445$	0.107142857	0.007299588	6.38%
10	$P(X=10) = \binom{15}{10} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^{10} \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^5 = 0.058492805$	0.065126051	0.006633246	10.18%
11	$P(X=11) = \binom{15}{11} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^{11} \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^4 = 0.022648729$	0.016806723	0.005842006	25.79%
12	$P(X=12) = \binom{15}{12} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^{12} \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^3 = 0.006431121$	0.004201681	0.00222944	34.67%
13	$P(X=13) = \binom{15}{13} \cdot \left(\frac{46}{100}\right)^{13} \cdot \left(\frac{54}{100}\right)^2 = 0.001264237$	0.002100840	0.000836603	39.82%

Taula 6.29. Càlcul de les probabilitats de la distribució binomial. Error absolut i error relatiu

Llavors, amb les dades de la taula anterior, podem construir el gràfic:

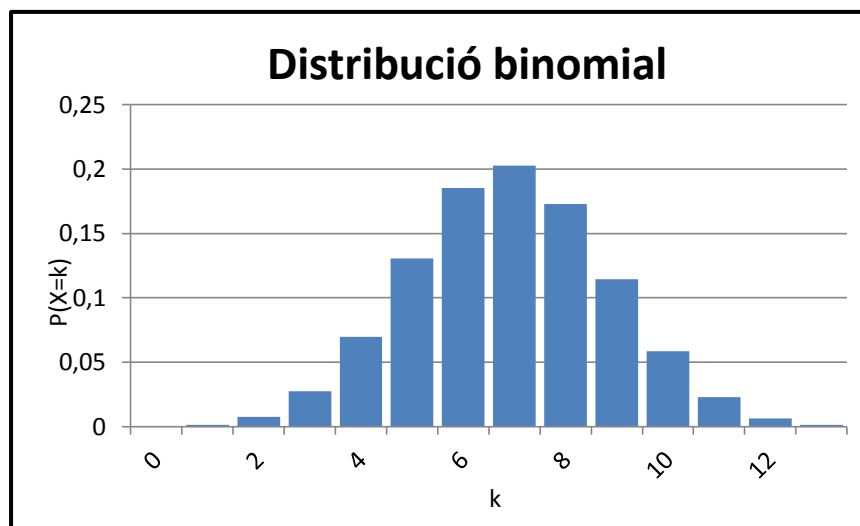


Figura 6.37. Distribució binomial

Per tal de comparar el primer gràfic experimental del recompte d'uns amb el de la distribució binomial, he calculat els errors relatius i absoluts entre les freqüències ( $f_i$ ) i les probabilitats ( $P_i$ ).

Els majors errors relatius es troben als extrems de la taula, és a dir, quan surten pocs uns a les jornades (0, 1, 2, 3, 4) o quan en surten molts (11, 12, 13), això és degut a que són les jornades més imprevisibles. Els errors relatius quan hi ha 5, 6, 7, 8, 9 o 10 uns per jornada, podem considerar que són prou petits com per valorar l'ajust com a raonablement bo. Per aquest

motiu, he decidit elaborar un estudi amb dades centrades, és a dir, elaborar la distribució normal.

Conèixer la funció de probabilitat d'una distribució binomial, en aquest cas, per exemple, ens és molt útil per calcular en quina probabilitat encertaríem el nombre d'uns si en els 15 partits d'una jornada en marquessim 6, 7, 8 o 9. Prenc aquests valors perquè, tal com es mostra al gràfic primer, són els que tenen un percentatge més elevat de jornades que s'han repetit.

Per calcular aquesta probabilitat s'ha de realitzar la següent operació:

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = 0.18513772 + 0.202769883 + 0.172729901 + 0.114442445 = 0.675079058$$

Aquest resultat ens indica que si marquessim 6, 7, 8 o 9 uns en una quiniela, tindríem un 67.5% de possibilitats d'encertar la quantitat d'uns marcada.

Aquest problema resolt anteriorment és només un exemple dels molts que es poden fer utilitzant el càlcul de les probabilitats d'una distribució binomial. En el meu estudi són molt útils per conèixer quines són les millors possibilitats d'omplir una quiniela per tal d'obtenir premis.

#### 6.5.4.3. Aproximació de la distribució binomial per la distribució normal

Una distribució normal és una família de distribucions de probabilitat contínues, en la que cada membre de la família queda definit per dos paràmetres: la mitjana  $\mu$  i la desviació estàndard  $\sigma$ , i es denota per  $N(\mu, \sigma)$ . Un cas particular és la distribució normal estàndard, que la seva mitjana és 0 i la desviació estàndard és 1.

Totes les distribucions binomials es poden convertir en distribucions normals, que ens permeten descriure probabilísticament fenòmens estadístics en què els valors més habituals s'agrupen al voltant d'un de central i els valors extrems són escassos.

Després d'aquesta base teòrica, podem convertir la distribució binomial de l'apartat anterior en una de normal. Primer de tot necessitem saber que:

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q}\end{aligned}$$

Així doncs, podem substituir l'estudi de la distribució binomial  $B(n, p)$  pel de  $N(np, \sqrt{npq})$ .

Partint de la distribució binomial  $B(15, 0.46)$ , la distribució normal és  $N(6.9, 1.93)$ .

Per poder dibuixar el gràfic necessitem la funció de densitat. Una variable aleatòria contínua de  $X$  segueix una distribució normal de paràmetres  $\mu$  i  $\sigma$ , que simbolitzarem per  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , si la seva funció de densitat és:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si representem la funció de densitat pels valors de  $x=\{0, 1, 2, 3, \dots, 13\}$ , obtenim la gràfica següent:

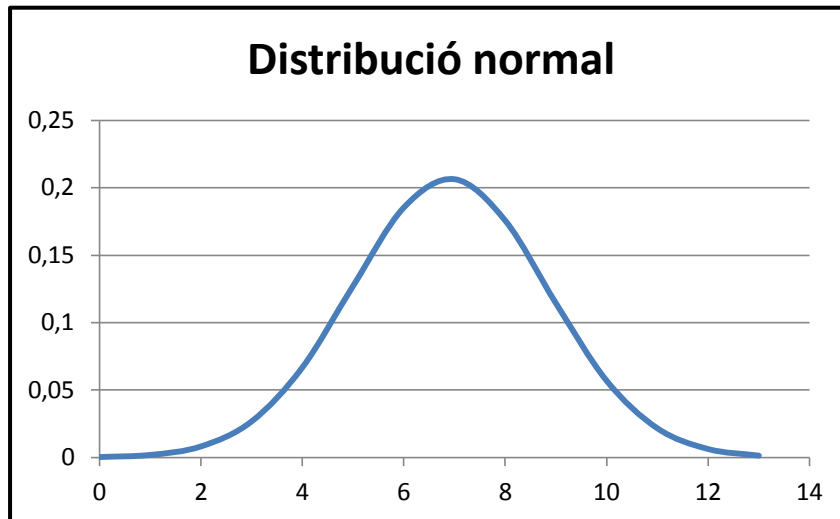


Figura 6.38. Distribució normal

Per tal de calcular el mateix problema resolt a l'apartat anterior amb distribució binomial, utilitzarem la distribució normal estandarditzada,  $N(0,1)$ .

Si  $X$  és una variable aleatòria que segueix una distribució normal  $N(\mu, \sigma)$ , aleshores la variable aleatòria  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  segueix una distribució normal estandarditzada  $N(0,1)$ .

Així doncs, qualsevol probabilitat expressada en termes de  $X$  es pot trobar en termes de  $Z$  utilitzant la taula de distribució normal estandarditzada.

En el cas que estudiem, per trobar amb quina probabilitat encertaríem el nombre d'uns si en els 15 partits d'una jornada en marquéssim 6, 7, 8 o 9, hem de trobar el valor de  $P(6 \leq X \leq 9)$  quan  $X \sim N(0,1)$ .

Primer de tot necessitem saber que encara que una distribució binomial s'assembli molt a la normal, una distribució discreta mai no s'arriba a convertir en contínua. Per això hem de tenir en compte un ajust en el càlcul de la probabilitats, anomenat correcció de Yates, vàlida si:

$$n \cdot p \geq 5, n \cdot q \geq 5$$

$$n \cdot p = 15 \cdot 0.46 = 6.9$$

$$n \cdot q = 15 \cdot 0.54 = 8.1$$

que consisteix en afegir o restar 0,5 a la variable en qüestió. En el nostre cas la probabilitat que hem de calcular  $P(6 \leq X \leq 9)$  passarà a ser  $P(5.5 \leq X \leq 9.5)$ .

A continuació, hem de trobar la probabilitat expressada en termes de  $X$  en termes de  $Z$  fent el següent càlcul:

$$P(5.5 \leq X \leq 9.5) = P(z_1 \leq Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$

Si  $X=N(6.9, 1.93)$ , on  $\mu=6.9$  i  $\sigma=1.93$ :

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{5.5 - 6.9}{1.93} = -0.73$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{9.5 - 6.9}{1.93} = 1.35$$

Tot seguit s'ha de substituir  $z_1$  i  $z_2$  a la fórmula abans donada, i consultar la taula de la distribució normal estandarditzada per obtenir el resultat:

$$P(-0.73 \leq Z \leq 1.35) = P(Z \leq 1.35) - P(Z \leq -0.73) = P(Z \leq 1.35) - [1 - P(Z \leq 0.73)] = 0.9115 - (1 - 0.7673) = 0.9115 - 0.2327 = 0.6788$$

Si comparem el resultat obtingut amb la distribució normal estandarditzada (0.6788) amb el de la distribució binomial (0.6751) observem que la diferència és mínima. Així es demostra que la importància de transformar una distribució binomial amb una normal es deu a la freqüència amb la que diferents variables associades a fenòmens naturals i quotidians segueixen, aproximadament, aquesta funció.

#### 6.5.4.4. Càlcul dels intervals centrats a la mitjana

Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  és una variable aleatòria amb distribució normal, es compleix que:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68 \text{ (aproximadament hi hem de trobar el 68\% de les dades)}$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95 \text{ (aproximadament hi hem de trobar el 95\% de les dades)}$$

S'anomenen intervals centrats a la mitjana i a continuació comprovarem si amb el cas que estudio també es verifica aquesta propietat. Si  $X=N(6.9, 1.93)$ , on  $\mu=6.9$  i  $\sigma=1.93$ :

$$P(6.9 - 1.93 \leq X \leq 6.9 + 1.93) = P(4.97 \leq X \leq 8.83) = P(z_1 \leq Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{4.97 - 6.9}{1.93} = -1$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{8.83 - 6.9}{1.93} = 1$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq -1)] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.8413 - 0.1587 = \mathbf{0.6826}$$

$$P(6.9 - 2(1.93) \leq X \leq 6.9 + 2(1.93)) = P(3.04 \leq X \leq 10.76) = P(z_1 \leq Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{3.04 - 6.9}{1.93} = -2$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{10.76 - 6.9}{1.93} = 2$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq -2)] = 0.9772 - (1 - 0.9772) = 0.9772 - 0.0228 = \mathbf{0.9544}$$

Tal com es veu als càlculs, en aquest cas també s'afirma la propietat que he esmentat al principi de l'apartat.

A continuació, calcularé els intervals centrats a la mitjana utilitzant les freqüències d'uns que he obtingut de l'estudi de les diferents jornades<sup>47</sup>, per tal de comparar-los amb els de la distribució normal. Per fer-ho necessito la següent taula estadística, en la que hi ha els valors de la variable ( $x_i$ ), la freqüència absoluta ( $n_i$ ), la freqüència absoluta acumulada ( $N_i$ ), la freqüència relativa acumulada ( $F_i\%$ ), els valors de la variable al quadrat ( $x_i^2$ ) i els valors de la variable al quadrat multiplicats per la freqüència absoluta ( $x_i^2 \cdot n_i$ ). Aquests valors em serveixen per calcular la mitjana i la desviació tipus, el resultat de les quals està sota la taula.

Número d'uns ( $x_i$ )	$n_i$	$N_i$	$F_i\%$	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0,21	1	1	1
2	1	2	0,42	2	4	4
3	8	10	2,10	24	9	72
4	50	60	12,61	200	16	800
5	50	110	23,11	250	25	1250
6	102	212	44,54	612	36	3672
7	79	291	61,13	553	49	3871
8	92	383	80,46	736	64	5888
9	51	434	91,18	459	81	4131
10	31	465	97,69	310	100	3100
11	8	473	99,37	88	121	968
12	2	475	99,79	24	144	288
13	1	476	100,00	13	169	169
<b>TOTAL</b>	476	-	-	3272	-	24214

Taula 6.30. Taula estadística amb els valors del recompte d'uns

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=1}^k x_i \cdot n_i}{N} = \frac{3272}{476} = 6.87394958$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{x=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{24214}{476} - 6.87^2} = 1.90225264$$

Tal i com hem vist a la distribució normal, els intervals mitjana es calculen sabent que:

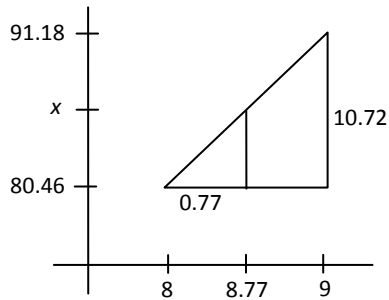
$$\sigma = 68\% \quad 2\sigma = 95\%$$

$$\% \text{ interval } = P_1 - P_0$$

<sup>47</sup> Veure annex 5, on hi ha la taula del recompte d'uns de les quinielles de l'any 2001 al 2010.

Així doncs, en el aquest cas, si  $\sigma=1.90$  i  $\bar{x}=6.87$ , i vull saber l' interval mitjana quan  $\sigma=68\%$ , cal fer el següent càlcul:

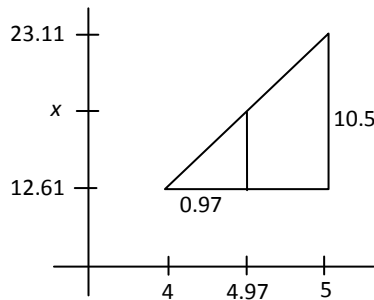
$$\bar{x} + \sigma = 6.87 + 1.90 = 8.77$$



$$x = 10.72 \cdot 0.77 = 8.2544$$

$$P_1 = 80.46 + 8.2544 = 88.7144\%$$

$$\bar{x} - \sigma = 6.87 - 1.90 = 4.97$$



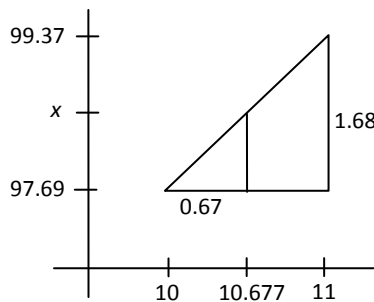
$$x = 10.5 \cdot 0.97 = 10.185$$

$$P_0 = 12.61 + 10.185 = 22.795\%$$

$$\% \text{ interval} = P_1 - P_0 = 88.7144 - 22.795 = \mathbf{65.9194\%}$$

Per tal de calcular l'interval mitjana quan  $2\sigma=95\%$ , he de seguir els mateixos passos:

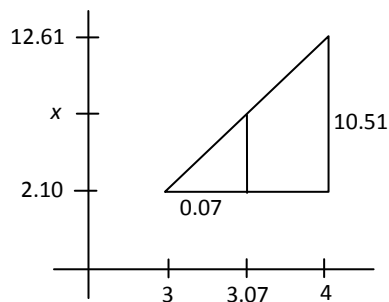
$$\bar{x} + 2\sigma = 6.87 + 3.80 = 10.67$$



$$x = 1.68 \cdot 0.67 = 1.1256$$

$$P_1 = 97.69 + 1.1256 = 98.8156\%$$

$$\bar{x} - \sigma = 6.87 - 3.80 = 3.07$$



$$x = 10.51 \cdot 0.07 = 0.7357$$

$$P_0 = 2.10 + 0.7357 = 2.8357\%$$

$$\% \text{ interval} = P_1 - P_0 = 98.8156 - 2.8357 = \mathbf{95.9799\%}$$

El resultat obtingut en els dos casos s'apropa molt al de la distribució normal. Per aquest motiu, encara que els resultats dels errors relatius extremals calculats anteriorment (apartat 6.5.4.2.) fossin bastant elevats, es pot considerar que el total de freqüències d'uns per jornada segueix una distribució normal.

## 7. CONCLUSIONS I PROSPECTIVA

Després de la realització del treball pràctic: resolució de dues pràctiques referents a la Història de la Probabilitat, anàlisi dels jocs d'atzar que es juguen a Catalunya, interpretació de les dades dels resultats de l'enquesta, anàlisi del joc a Espanya l'any 2009, anàlisi i interpretació dels resultats de les quinielles dels últims deu anys, elaboració d'un simulador i construcció de la Campana de Gauss; he obtingut diferents coneixements que abans no sabia, i he arribat a les següents conclusions:

- Els problemes històrics estudiats van ser d'una gran importància perquè van permetre l'origen de la Teoria de la Probabilitat. Es va tardar molt temps en trobar la solució correcta, però aquest fet és el que va permetre el naixement de la probabilitat.
- La ludopatia és una malaltia que afecta a més persones de les que pensem i durant els últims anys el percentatge de gent afectada ha augmentat considerablement. Com totes les addiccions, és difícil de detectar i de tractar.
- La probabilitat de guanyar algun dels jocs d'atzar que es juguen a Catalunya, tal com em suposava, és gairebé insignificant. El joc que tens més possibilitats de guanyar és el Trio, amb una probabilitat del 0.001 de guanyar el primer premi.
- En tots els jocs que he analitzat, l'esperança matemàtica és negativa, la qual cosa significa que el jugador pot esperar perdre amb el joc encara que hi aposti moltes vegades. Aquest fet és degut a que tots els diners que s'aposten a un joc no són destinats als premis, sinó que una bona part d'ells se'ls queden les entitats responsables.
- Les persones entre 30 i 50 anys són les que més juguen als jocs d'atzar, seguides de les que tenen entre 50 i 70 anys. Aquest resultat ens mostra que els jocs interessen més als adults que als joves, i dins els adults, juguen més les persones de mitjana edat que les més grans.
- La majoria de gent que aposta a les loteries té un nivell d'estudis primaris o secundaris, això indica que tot i ser conscients que tenen moltes més possibilitats a perdre que a guanyar, juguen igualment.
- Gairebé el 50% de persones que juguen a les loteries i apostes formen part de la població activa, d'altra banda, els jubilats i els estudiants també tenen un pes important. Aquesta proporció ens indica que el fet d'apostar o no està molt lligat amb si cobres mensualment. D'altra banda, però, un 70% de la gent que juga cobra un sou mensual inferior a 1000 euros, fet que indica que necessiten diners i els esperen obtenir d'una manera fàcil i ràpida.

- El 70% de la gent que juga als jocs d'atzar ho sol fer cada setmana o, fins i tot, més de 4 vegades al mes. Aquesta regularitat és perquè la majoria de sorteigs es realitzen un o dos cops per setmana, i la gent agafa com a rutina el fet d'anar al quiosc per veure si ha tret i llavors comprar un altra butlleta. A més, la majoria solen destinar-hi de 1 a 5 euros cada vegada. D'aquesta xifra en podem extreure la conclusió que la gran majoria té el costum de fer dues apostes diferents, ja que cada joc sol valer uns 2 euros.
- El que sobta més de les dades obtingudes a partir de l'enquesta, és que un 60% dels jugadors ha obtingut algun premi alguna vegada. Així mateix, un 80% d'aquests jugadors ha acumulat menys de 500 euros en el total de premis guanyats. Aquests fets ens indiquen que treure un premi de baix valor no és difícil, mentre que guanyar una important quantitat de diners en una sola aposta, és molt complicat.
- Els habitants d'Espanya van destinar uns 50 euros cada mes en jocs d'atzar l'any 2009, quantitat molt elevada si es té en compte la crisi econòmica en què ens trobem.
- La Rioja i la Comunitat de Madrid són les comunitats autònomes que més diners destinen anualment al joc, seguides d'Aragó i les Illes Balears. Aquest fet que coincideix amb que totes són comunitats autònomes que es troben entre les sis primeres amb un producte interior brut (PIB) per habitant més alt.
- No és veritat que en els jocs d'atzar la sort sigui l'únic factor que determina la probabilitat de guanyar un premi. Per exemple, les boles del bombo no tenen exactament la mateixa mida ni el mateix pes. Tot i així, aquests factors són molt poc significatius i per tant, els considerem jocs d'atzar.
- La Quiniela és el joc en el que es veu més clar que la sort no és l'únic motiu pel que guanyes un premi. Aquest fet es dona perquè la probabilitat de guanyar ve determinada pels partits guanyats a casa (1), a fora (2) o empatats (x), i aquestes probabilitats no són equiprobables.
- El simulador construït permet fer prediccions de jornades de La Quiniela utilitzant el factor atzar i el percentatge de uns, ixs i dosos de les jornades estudiades.
- La importància de la distribució binomial és deu a que ens permet calcular la probabilitat d'ocurrència d'un esdeveniment que representa un resultat esperat, en el treball he calculat la probabilitat d'encertar el nombre d'uns si en els 15 partits d'una jornada en marquessim 6, 7, 8 o 9.
- La distribució normal és molt utilitzada en aplicacions estadístiques degut a la freqüència en les diferents variables associades a fenòmens naturals i quotidians que tendeixen a seguir el comportament d'aquesta distribució.



Després de fer aquest treball m'he plantejat tres noves possibles vies de recerca per les que es podria seguir i, en certa manera, complementar el meu treball.

Un treball seria fer una investigació més àmplia de la Història de la Probabilitat, és a dir, explicar més detalladament els seus inicis fins arribar a l'actual Teoria Moderna de la Probabilitat. Així mateix, es podria aprofundir més en els problemes històrics que van permetre el desenvolupament de la Probabilitat i entendre les diferents solucions que s'han anat proposant al llarg del temps.

Un altre possible treball seria continuar l'anàlisi d'altres jocs d'atzar. Es podria calcular la probabilitat de guanyar i l'esperança matemàtica de jocs de daus, de la ruleta francesa, del pòquer, del bingo, de màquines escurabutxaques... D'altra banda, també es podria investigar si realment la sort és l'únic factor que influeix en guanyar o no un premi fent un estudi dels resultats obtinguts en els darrers anys, tal com he fet jo amb La Quiniela.

Per últim, es podria fer un treball que consistís en continuar l'estudi de les distribucions de probabilitat. És a dir, elaborar la distribució binomial i normal del recompte de dosos i ixs de cada jornada. A més, també es podrien veure més a fons aquestes dues distribucions amb d'altres estudis. El seu objectiu seria comprendre a la perfecció els fonaments de la Teoria de la Probabilitat.

He començat aquest treball amb una frase sobre l'atzar de Voltaire i el vull acabar amb una altra frase del mateix autor: "Sort és el que succeeix quan la preparació i l'oportunitat es troben i es fusionen". En definitiva, no utilitzar les matemàtiques és una decisió personal, però les podem fer servir per conèixer les probabilitats i així augmentar la sort per guanyar.

## 8. FONTS D'INFORMACIÓ

### 8.1. Bibliografia

- BERGASA LIBERAL, Javier. *Laplace, el matemàtic de los cielos*. Tres Cantos: Nivola libros ediciones, juny de 2003.
- LLUIS CAÑADILLA, Josep. *La travessa com a joc d'atzar*. Biaix, núm. 20, desembre 2002.
- MARAVALL CASESNOVES, Dario. *Filosofia de las matematicas*. Madrid: Editorial Dossat S.A., 1961.
- *Matemàtiques I aplicades a les Ciències Socials*. Barcelona: Grup Edebé, 2008.
- CORBALÁN, Fernando – SANZ, Gerardo. *La conquista del azar*. Barcelona: RBA Coleccionables S.A., 2010.

### 8.2. Webgrafia

Totes aquestes pàgines han estat consultades diverses vegades des del maig del 2011 fins al setembre del 2011:

1. El joc (Consulta 17-05-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Joc>
2. El joc d'atzar (Consulta 20-05-2011)  
<http://gospelway.com/spanish/gambling-spa.htm>
3. Loteries i apostes de l'Estat, ONLAE (Consulta 20-05-2011)  
<http://www.loteriasyapuestas.es/>
4. Enciclopèdia Catalana (Consulta 20-05-2011)  
<http://www.enciclopedia.cat/>
5. Ministeri d'Economia i Hisenda d'Espanya (Consulta 05-06-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Ministeri\\_d%27Economia\\_i\\_Hisenda\\_d%27Espanya](http://ca.wikipedia.org/wiki/Ministeri_d%27Economia_i_Hisenda_d%27Espanya)
6. Entitat Autònoma de Jocs i Apostes (Consulta 10-06-2011)  
[http://www10.gencat.cat/sac/AppJava/organisme\\_fitxa.jsp?codi=893](http://www10.gencat.cat/sac/AppJava/organisme_fitxa.jsp?codi=893)
7. L'euromillones (Consulta 12-06-2011)  
<http://www.euromillones.com.es/>
8. Normativa del repartiment de premis de l'Euromillones (Consulta 12-06-2011)  
<http://ganarenloterias.com/tag/euromillones/>
9. La Primitiva (Consulta 13-06-2011)  
<http://www.loteria-primitiva.com/historia-primitiva.html>

10. Història de la Loteria Nacional (Consulta 13-06-2011)  
<http://www.rtve.es/noticias/20081126/loteria-nacional-189-anos-historia/199096.shtml>
11. Marquès de Esquilache (Consulta 13-06-2011)  
[http://www.elpais.com/articulo/espana/Vuelve/marques/Esquilache/elpepiesp/19850922elpepinac\\_10/Tes](http://www.elpais.com/articulo/espana/Vuelve/marques/Esquilache/elpepiesp/19850922elpepinac_10/Tes)
12. Loteria de Catalunya (Consulta 15-06-2011)  
<http://www.loteriadecatalunya.cat/>
13. Distribució dels premis de la Lotto 6/49 (Consulta 15-06-2011)  
[http://www.gencat.cat/diari\\_c/5433/09208009.htm](http://www.gencat.cat/diari_c/5433/09208009.htm)
14. La Bonoloto (Consulta 16-06-2011)  
<http://bonoloto.combinacionganadora.com/>
15. Història de la Quiniela (Consulta 18-06-2011)  
<http://www.suite101.net/content/historia-de-la-quiniela-1x2-a47509>
16. CORTÉS DE ABAJO, Enrique; CEREZO GALLEGOS, Pedro; JIMÉNEZ HERRERO, Jesús. *Informe anual del juego en España, 2009*. Madrid: Ministeri del interior i AKASA, S.L., juliol 2010. (Consulta 20-06-2011)  
<http://www.mir.es/file/11/11264/11264.pdf>
17. Càlcul de la probabilitat de guanyar del Super 10 (Consulta 26-06-2011)  
<http://www.legitimidad.com/gencat14.htm>
18. Els inicis de la teoria de la probabilitat. Els jocs d'atzar (Consulta 05-08-2011)  
[http://www.xtec.cat/formaciotic/dvdformacio/materials/tdcdec/bloc\\_ma/modul\\_2\\_m\\_a/practica\\_2.html](http://www.xtec.cat/formaciotic/dvdformacio/materials/tdcdec/bloc_ma/modul_2_m_a/practica_2.html)
19. Galileu Galilei, Sobre els jocs de daus (Consulta 10-08-2011)  
<http://revoluciocientifica.blogspot.com/2009/04/galileu-galilei-sobre-el-joc-de-daus.html>
20. Carta de Pascal a Fermat del 29 de juliol del 1654 (Consulta 12-08-2011)  
<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/7cartas/pascalfermat.htm>
21. Carta de Pascal a Fermat del 29 de juliol de 1654, amb anglès (Consulta 12-08-2011)  
<http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>
22. Institut d'Estudis Catalans (Consulta 20-08-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Institut\\_d'Estudis\\_Catalans](http://ca.wikipedia.org/wiki/Institut_d'Estudis_Catalans)

23. *Jugar i gaudir, projecte educatiu per conscienciar els joves estudiants de 4t d'ESO i 1r de batxillerat sobre la pràctica del joc responsable*. Barcelona: Direcció General de Joc i d'Espectacles (DGJE) i Departament d'Educació, llibre del professorat. (Consulta 22-08-2011)  
[http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/file.php?file=docs/ESO/orientacions/Jugar%20i%20Gaudir/LLIBRE\\_DEL\\_PROFESSORAT.pdf](http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/file.php?file=docs/ESO/orientacions/Jugar%20i%20Gaudir/LLIBRE_DEL_PROFESSORAT.pdf)
24. La ludopatia (Consulta 22-08-2011)  
[http://www.ludopatia.org/web/index\\_cat.htm](http://www.ludopatia.org/web/index_cat.htm)
25. Programa geogebra (Consulta 07-09-2011)  
<http://www.geogebra.org>
26. Calendari Quiniela temporada 2011-2012 (Consulta 07-09-2011)  
[http://www.loteriasyapuestas.es/uploads/documentos/documentos\\_CALENDARIO-Quiniela-11-12\\_c4136254.pdf](http://www.loteriasyapuestas.es/uploads/documentos/documentos_CALENDARIO-Quiniela-11-12_c4136254.pdf)
27. VEGA-AMAYA, Oscar. *Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad*. Apuntes de historia de las matemáticas, vol. 1, núm. 1, gener 2002. (Consulta 10-09-2011)  
<http://www.cipri.info/resources/HIST-1-1-6-probabilidad.pdf>
28. PLA I CARRERA, Josep. *Una aproximació història a temes de probabilitat. Dels jocs d'atzar a la probabilitat*. Barcelona: Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona i Facultat d'Econòmiques de la Universitat Pompeu Fabra, novembre 2007. (Consulta 10-09-2011)  
[http://www.dmsec-upf.cat/historia/dmsec2\\_SESSI.pdf](http://www.dmsec-upf.cat/historia/dmsec2_SESSI.pdf)
29. Addició (Consulta 15-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Addició>
30. Organització Mundial de la Salut (Consulta 16-09-2011)  
<http://www.who.int/es/>
31. Història de la probabilitat (Consulta 20-09-2011)  
[http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20p robabilidad.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20p robabilidad.pdf)
32. Assíria (Consulta 21-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Ass%C3%ADria>
33. Sumer (Consulta 21-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Sumer>
34. Cristianisme (Consulta 21-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Cristianisme>

35. Edat Mitjana (Consulta 22-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Edat\\_mitjana](http://ca.wikipedia.org/wiki/Edat_mitjana)
36. Constantinoble (Consulta 22-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Constantinoble>
37. Renaixement (Consulta 22-09-2011)  
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Renaixement>
38. Richard de Fournival, amb anglès (Consulta 22-09-2011)  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Richard\\_de\\_Fournival](http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_de_Fournival)
39. Luca Pacioli (Consulta 22-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Luca\\_Pacioli](http://ca.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli)
40. Girolamo Cardano (Consulta 23-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo\\_Cardano](http://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano)
41. Niccolo Fontana Tartaglia (Consulta 23-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo\\_Fontana\\_Tartaglia](http://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia)
42. Galileu Galilei (Consulta 23-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei](http://ca.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei)
43. Antoine Gombaud (Consulta 23-09-2011)  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Antoine\\_Gombaud](http://es.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud)
44. Blaise Pascal (Consulta 24-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Blaise\\_Pascal](http://ca.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal)
45. Pierre de Fermat (Consulta 24-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_de\\_Fermat](http://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat)
46. Christiaan Huygens (Consulta 24-09-2011)  
[http://ca.wikipedia.org/wiki/Christiaan\\_Huygens](http://ca.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens)

**ÍNDEX DE TAULES**

TAULA 3.1. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE L'EUROMILLONES .....	8
TAULA 3.2. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA LOTERIA NACIONAL DEL DIJOURS .....	11
TAULA 3.3. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA LOTERIA NACIONAL DEL DISSABTE .....	12
TAULA 3.4. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA PRIMITIVA.....	13
TAULA 3.5. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA BONOLOTO .....	15
TAULA 3.6. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA QUINIELA .....	16
TAULA 3.7. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA LOTTO 6/49 .....	18
TAULA 3.8. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DEL JÒQUER.....	18
TAULA 3.9. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DEL COMBI 3.....	18
TAULA 3.10. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DEL TRIO .....	20
TAULA 3.11. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DEL SUPER 10 .....	21
TAULA 3.12. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DEL SUPER 10 AMB DIANA .....	21
TAULA 3.13. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA LOTO EXPRESS .....	23
TAULA 3.14. DISTRIBUCIÓ DELS PREMIS DE LA LOTO EXPRESS AMB DIANA .....	24
TAULA 6.1. Càlcul de la probabilitat de guanyar de l'EUROMILLONES .....	38
TAULA 6.2. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la LOTERIA NACIONAL DEL DIJOURS .....	39
TAULA 6.3. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la LOTERIA NACIONAL DEL DISSABTE .....	41
TAULA 6.4. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la PRIMITIVA.....	42
TAULA 6.5. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la BONOLOTO .....	43
TAULA 6.6. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la LOTTO 6/49 .....	45
TAULA 6.7. Càlcul de la probabilitat de guanyar del JÒQUER.....	46
TAULA 6.8. Càlcul de la probabilitat de guanyar del TRIO .....	47
TAULA 6.9. Càlcul de la probabilitat de guanyar del SUPER 10 .....	47
TAULA 6.10. Càlcul de la probabilitat de guanyar del SUPER 10 AMB DIANA .....	48
TAULA 6.11. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la LOTO EXPRESS .....	50
TAULA 6.12. Càlcul de la probabilitat de guanyar de la LOTO EXPRESS AMB DIANA .....	53
TAULA 6.13. Dades de la pregunta sobre el sexe .....	60
TAULA 6.14. Dades de la pregunta sobre l'EDAT.....	61
TAULA 6.15. Dades de la pregunta sobre el nivell d'estudis.....	61
TAULA 6.16. Dades de la pregunta sobre l'OCUPACIÓ .....	62
TAULA 6.17. Dades sobre els sectors econòmics .....	63

TAULA 6.18. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE EL SOU MENSUAL.....	64
TAULA 6.19. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE ELS JOCS QUE APOSTA .....	65
TAULA 6.20. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE LES VEGADES QUE JUGA .....	66
TAULA 6.21. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE LA QUANTITAT QUE APOSTA .....	67
TAULA 6.22. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE SI HA TINGUT PREMIS .....	68
TAULA 6.23. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE A QUIN JOC HA ESTAT PREMIAT .....	69
TAULA 6.24. DADES DE LA PREGUNTA SOBRE ELS DINERSE GUANYATS EN TOTAL.....	70
TAULA 6.25. VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES L'ANY 2009, PER HABITANT I ANY DISTRIBUÏDES PER JOCS I COMUNITATS AUTÒNOMES .....	71
TAULA 6.26. QUANTITATS JUGADES PER HABITANT I ANY DISTRIBUÏDES PER JOCS A CATALUNYA.....	73
TAULA 6.27. PERCENTATGE D'UNS, D'IXS I DE DOSOS DE LES ÚLTIMES 19 JORNADES I MITJANA TOTAL .....	76
TAULA 6.28. FREQUÈNCIA ABSOLUTA I FREQUÈNCIA RELATIVA EN % DEL NOMBRE D'UNS PER JONADA.....	85
TAULA 6.29. Càlcul de les probabilitats de la distribució binomial. Error absolut i error relatiu .....	86
TAULA 6.30. TAULA ESTADÍSTICA AMB ELS VALORS DEL RECOMPTE D'UNS.....	91

**ÍNDIX DE FIGURES I GRÀFICS**

FIGURA 3.1. BITLLET DE L'EUROMILLONES FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	9
FIGURA 3.2. BITLLET DE L'EUROMILLONES OMLERT MANUALMENT .....	9
FIGURA 3.3. DÈCIM DE LOTERIA NACIONAL .....	12
FIGURA 3.4. BITLLET DE LA PRIMITIVA FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	13
FIGURA 3.5. BITLLET DE LA PRIMITIVA OMLERT MANUALMENT .....	14
FIGURA 3.6. BITLLET DIARI DE LA BONOLOTO OMLERT MANUALMENT .....	15
FIGURA 3.7. BITLLET DE LA BONOLOTO FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	15
FIGURA 3.8. BITLLET SETMANAL DE LA BONOLOTO OMLERT MANUALMENT .....	15
FIGURA 3.9. BUTLLETA DE LA QUINIELA .....	17
FIGURA 3.10. BITLLET DE LA LOTTO 6/49 FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	19
FIGURA 3.11. BITLLET DE LA LOTTO 6/49 OMLERT MANUALMENT .....	19
FIGURA 3.12. BUTLLETA DEL TRIO OMLERTA MANUALMENT .....	20
FIGURA 3.13. BITLLET DEL TRIO FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	20
FIGURA 3.14. BUTLLETA DEL SUPER 10 OMLERTA MANUALMENT .....	22
FIGURA 3.15. BITLLET DEL SUPER 10 FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	22
FIGURA 3.16. BUTLLETA DE LA LOTO EXPRESS OMLERTA MANUALMENT .....	25
FIGURA 3.17. BITLLET DE LA LOTO EXPRESS FET DE MANERA AUTOMÀTICA .....	25
FIGURA 5.1. ASTRÀGALS .....	30
FIGURA 5.2. LUCA PACIOLI .....	31
FIGURA 5.3. GIROLAMO CARDANO .....	31
FIGURA 5.4. NICCOLO TARTAGLIA .....	32
FIGURA 5.5. GALILEO GALILEI .....	32
FIGURA 5.6. CAVALLER DE MÉRÉ .....	33
FIGURA 5.7. BLAISE PASCAL .....	33
FIGURA 5.8. PIERRE FERMAT .....	33
FIGURA 5.9. CHRISTIAAN HUYGENS .....	34
FIGURA 6.1. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE EL SEXE .....	60
FIGURA 6.2. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE EL SEXE .....	60
FIGURA 6.3. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE L'EDAT .....	61
FIGURA 6.4. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE L'EDAT .....	61
FIGURA 6.5. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE EL NIVELL D'ESTUDIS .....	62
FIGURA 6.6. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE EL NIVELL D'ESTUDIS .....	62
FIGURA 6.7. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE L'OCUPACIÓ .....	62
FIGURA 6.8. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE L'OCUPACIÓ .....	63



FIGURA 6.9. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE ELS SECTORS ECONÒMICS.....	63
FIGURA 6.10. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE ELS SECTORS ECONÒMICS.....	64
FIGURA 6.11. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE EL SOU MENSUAL.....	64
FIGURA 6.12. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE EL SOU MENSUAL.....	65
FIGURA 6.13. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE ELS JOCS QUE APOSTA .....	65
FIGURA 6.14. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE ELS JOCS QUE APOSTA .....	66
FIGURA 6.15. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE LES VEGADES QUE JUGA .....	67
FIGURA 6.16. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE LES VEGADES QUE JUGA .....	67
FIGURA 6.17. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE LA QUANTITAT QUE APOSTA .....	68
FIGURA 6.18. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE LA QUANTITAT QUE APOSTA.....	68
FIGURA 6.19. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE SI HA TINGUT PREMIS .....	68
FIGURA 6.20. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE SI HA TINGUT PREMIS .....	68
FIGURA 6.21. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE A QUIN JOC HA ESTAT PREMIAT ..	69
FIGURA 6.22. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE A QUIN JOC HA ESTAT PREMIAT .....	69
FIGURA 6.23. DIAGRAMA DE BARRES DE LES DADES SOBRE ELS DINERS GUANYATS EN TOTAL .....	70
FIGURA 6.24. GRÀFIC CIRCULAR DE LES DADES SOBRE ELS DINERS GUANYATS EN TOTAL .....	70
FIGURA 6.25. DIAGRAMA DE BARRES COMPARATIU DEL VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES AL 2009 PER HABITANT I ANY, DISTRIBUÏDES PER JOCS A ESPANYA ...	72
FIGURA 6.26. GRÀFIC CIRCULAR DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT I ANY DISTRIBUÏDES PER JOCS A CATALUNYA .....	73
FIGURA 6.27. DIAGRAMA DE BARRES COMPARATIU DEL VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT A ESPANYA.....	74
FIGURA 6.28. DIAGRAMA DE BARRES COMPARATIU DEL VALOR MITJÀ DE LES QUANTITATS JUGADES PER HABITANT DE CATALUNYA AMB EL DE LES ALTRES COMUNITATS AUTÒNOMES.....	75
FIGURA 6.29. IMATGE DEL SIMULADOR AMB NOU TIRADES .....	80
FIGURA 6.30. IMATGE DEL SIMULADOR AMB LES TIRADES DE TOTS ELS PARTITS DE LLIGA D'UN ANY .....	81
FIGURA 6.31. "PROTOCOLO DE LA CONSTRUCCIÓN" DEL SIMULADOR DELS PUNTS I EL POLÍGON REGULAR.....	82
FIGURA 6.32. "PROTOCOLO DE LA CONSTRUCCIÓN" DEL SIMULADOR DE LA LLISTA L I LA LLISTA ABSCISSES.....	82
FIGURA 6.33. "PROTOCOLO DE LA CONSTRUCCIÓN" DEL SIMULADOR DE LA LLISTA FINAL1, LA LLISTA FINAL2, LA LLISTAFINALX I LA LLISTA FINALTOTAL.....	83

FIGURA 6.34. "PROTOCOLO DE LA CONSTRUCCIÓN" DEL SIMULADOR DE LES VARIABLES PERCUNS, PERIXS I PERCDOSOS .....	83
FIGURA 6.35. VALOR DELS CATORZE PARTITS DE LA PRIMERA JORNADA OBTINGUTS AMB EL SIMULADOR.....	84
FIGURA 6.36. DISTRIBUCIÓ DEL NOMBRE D'UNS PER JORNADA.....	85
FIGURA 6.37. DISTRIBUCIÓ BINOMIAL .....	87
FIGURA 6.38. DISTRIBUCIÓ NORMAL .....	89

## **ANNEXOS**

**ANNEXOS**

ANNEX 1: LLIBRE “*SOPRA LE SCOPERTE DEI DADI*” DE GALILEU.....2

ANNEX 2: CARTA DE PASCAL A FERMAT DEL DIMECRES 29 DE JULIOL DE 1654 .....9

ANNEX 3: ENQUESTA SOBRE ELS JOCS D’ATZAR .....22

ANNEX 4: TAULES DELS RESULTATS DE LES QUINIELES DE L’ANY 2001 AL 2010.....24

ANNEX 5: TAULA DEL RECOMPTE D’UNS DE LES QUINIELES DE L’ANY 2001 AL 2010....35

ANNEX 6: CD AMB EL SIMULADOR I EL TREBALL (VERSIÓ PDF) .....36

ANNEX 1: LLIBRE "SOPRA LE SCOPERTE DEI DADI" DE GALILEU

"Sopra Le Scoperte Dei Dadi" (text original)<sup>1</sup>

Che nel gioco de dadi alcuni punti non s'han vantaggio di altri in  
 la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter loro più facile  
 o più infrequente scovirsi: ~~che~~ <sup>quelli</sup> ~~il 6. il 7. dipende~~  
~~dall'essere delle facce formate da più sort di numeri.~~ Onde  
 il 3. e l'8. come punti che in un sol m.<sup>o</sup> si possono ad 3. ~~facce~~ nume-  
 re scovire, cioè questo ad 3. <sup>666</sup> e quello ad 3. <sup>111</sup> e ad altri, più dif-  
 ficili sono a scovirsi che v.gr. il 6. o il 7. li quali in più manie-  
 re si scovono, cioè il 6. con ~~1.2.3.4.5.6.~~ <sup>1.2.3.4.5.6.</sup> et ad 2.2.2. et il  
 7. ad ~~1.1.5. 1.2.4. 1.3.3. 2.2.3.~~ <sup>1.1.5. 1.2.4. 1.3.3. 2.2.3.</sup> tuttavia ancor il 9. e il 10.  
 in altrettante maniere ~~e diverse di numeri~~ si scovono in qua-  
 si il 10. o. 11. <sup>130</sup> di eguale stima deuran esser reputati, si  
 vede no dimeno che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori  
 più vantaggiosi scovarsi il 10. e l'11. che l'9. e l'12. Et che il 9.  
 e il 10. <sup>130</sup> quel che di questi si dice intendasi de lor sortoni 12. e 11)  
 si formano da più diversità di numeri è manifesto, imperò che il  
 9. si scovono ad. 126. 135. 144. 225. 234. 333. che son: sei  
 triplicità, et il 10. ad. 136. 145. 226. 235. 244. 334. e no  
 altri modi che sur sono 6. combinazioni. Hora io si venire a chi mi  
 ha comandato che io deua produr ciò che sopra tal difficoltà mi sa-  
 riani, ehorò il mio pensiero, e mirandola et no volendo di scovire  
 questo dubbio ma di aprir la strada a poter puntualissimamente scoper  
 le ragioni per le quali tutte le particolarità del gioco sono scate et  
 grande ammendato e giudizio scovate, e aggiustate. Et adurmi  
 da la maggior chiarezza che io possa al mio fine, comincio a considerare  
 come essendo il dado terminato da 6. facce, sopra ciascuna delle quali  
 gettato, ogni suo indifferente formarsi 6. vengono ad essere le sue sco-  
 tte, e no più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo  
 gettarsi il 2.<sup>o</sup> dado, che pure ha altre 6. facce, potremo far 36. scop-  
 te tra di loro differenti, avvenza che ogni faccia de 1.<sup>o</sup> dado ha scop-  
 tiars ad conseguenza del secondo, et in conseguenza per 6. scopte diverse  
 et essendo 6. facce del 1.<sup>o</sup> dado per 6. ~~scopte diverse~~ <sup>scopte diverse</sup> ad consequenza  
 de 36. <sup>scopte diverse</sup> ~~scopte diverse~~ <sup>scopte diverse</sup> è manifesto tali combinazioni esser 36.

<sup>1</sup> Text extret del llibre Història de la Teoria de la Probabilitat, Galileu Galileu, Sobre el joc de daus.

Et se noi aggiungeremo il 3.<sup>o</sup> dado, per ciascheduna delle sue 6. facce  
 suo accoppiarsi ad ciascuna delle 36. scoppe delli altri 2. dadi, hauremo  
 la sorte di 3. dadi esser 6. volte 36. cioè 216. tutte tradiscono diffe-  
 renti. Ma i punti delle scoppe di 3. dadi sono 108. cioè 3. 4. 5. 6. sino  
 a 18. segue non che un punto solo e necessario sopra che si acciano  
 che ad alcuni di essi non combino molti. Et noi retroveremo molti ne facciamo per ciascheduno  
~~il numero e un solo punto. Et noi retroveremo molti ne facciamo per ciascheduno~~  
~~caremo aperta la strada di metter in notizia di quello che abbiamo~~  
~~non appropinquando quanto ne toccano di ciascheduno; e vastera per~~  
 tale investigatione dal 3. sino al 10. per quello che sopra si usò di  
 questi numeri conuerà ancora al suo uso sopra. Tre particolarità si  
 devono notare, e chiara intelligenza di quello che resta. La prima  
 è che quel punto de i 3. dadi la cui esposizione risulta da 3. nu-  
 simili non si può trovare se non da una sola scoperta, ouer tiro  
 di dadi; e con il 3. non si può formare se non dalle 3. facce d'istesso  
 asse; et il 6. quando si doue espor ad 3. dadi non si farebbe  
 se non da una sola scoperta. Seconda, il punto che si espone da  
 i tre n.<sup>o</sup> due de quali sieno i medesimi e l'altro diuerso, si potrà  
 produrre da 3. scoppe; come v.g. il 4. che nasce dal 2. e da  
 li 2. altri può farsi da tre scoppe diuerso; cioè quando il 1.<sup>o</sup> dado  
 mostra 2. e l'2.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> <sup>mostrano</sup> ciascuno 2. quando il 2.<sup>o</sup> dado mostra 2.  
 et il 3.<sup>o</sup> 2. e finalm quando il 3.<sup>o</sup> dado mostra 2. et il 1.<sup>o</sup>  
 e 2.<sup>o</sup> 2. così v.g. l'8. inquanto risulta da 3. 3. 2. può prodursi  
 per i 3. modi; cioè scoprendo il 1.<sup>o</sup> dado 2. e i altri 3. 3. 2.  
 e scoprendo il 2.<sup>o</sup> dado 2. et il 1.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> 3. 2. o finalm scoprendo  
 il 3.<sup>o</sup> 2. et il 1.<sup>o</sup> e 2.<sup>o</sup> 3. Terza quel n.<sup>o</sup> di tutti che si espone di  
 3. numeri different. può prodursi i 6. maniere; come per esse;  
 l'8. mentre si espone da 1. 3. 4. si può fare da 6. scoppe diuersi  
 fa quando il 1.<sup>o</sup> dado faccia 1. il 2.<sup>o</sup> 3. et il 3.<sup>o</sup> 4. o quando il 1.<sup>o</sup>  
 faccia 1. ma il 2.<sup>o</sup> 4. et il 3.<sup>o</sup> 3. 3.<sup>a</sup> quando il 2.<sup>o</sup> dado faccia  
 1. et il 1.<sup>o</sup> 3. et il 3.<sup>o</sup> 4. 4.<sup>a</sup> facendo il 1.<sup>o</sup> dado 1. et il 2.<sup>o</sup> 3. et  
 il 3.<sup>o</sup> 3. quinta quando ~~il 1.<sup>o</sup> dado faccia 1. et il 2.<sup>o</sup> 4. et il 3.<sup>o</sup> 4.~~  
 faccia 3. et il 2.<sup>o</sup> 4. sesta quando sopra l'1. del 3.<sup>o</sup> dado il 1.<sup>o</sup> 3.  
 4. et il 2.<sup>o</sup> 3. Hauiamo dunque in qui dichiarato questi 3. ordani  
 altri molti

la triplicitat, cioè il n.º delle scoperte: e i 3. dadi che si coprono da 3. n.º eguali, non si producono se non i 6. m.º solo. La triplicitat che nascono da 2. n.º eguali, e dal 3.º differente, si producono i 3. maniere. Le 3.º che nascono da 3. n.º tutti differenti si formano in 6. maniere. Da quest'fondam.º generali, racconteremo in quatti modi, si voglia dire in quante scoperte differenti si possono formare tutti i n.º de i 3. dadi; e che oggetto per la seguente tavola comodam. si comprende: in tutte quelle quali sono notati i punti de i tiri dal 10. in qui fino al 3. e sotto essi la triplicitat differenti dalle quali ciascuno di essi può risultare, accanto alle quali ~~si nota~~ si nota co' posti in.º. e sotto i quali ciascuna triplicitat si può descrivere, sotto i quali è messa l'ultima la somma di tutti i modi possibili a produrre essi dadi; come l'esempio nella tavola capella

10	9	8	7	6	5	4	3
631 6	621 6	611 3	511 3	411 3	311 3	211 3	111 1
622 3	531 6	521 6	421 6	321 6	221 3		3
541 6	522 3	431 6	331 3				6
532 6	441 3	422 3	322 3	10			10
442 3	432 6	332 3					15
433 3	333 1		21				21
27	25						25
							100

raccontare il punto 10. et sotto di esso 6. triplicitat di numeri differenti quali ogni si può coprire; che sono 631. 622. 541. 532. 442. 433. Et che la 1.ª triplicitat 631. è coposta di 3. n.º diversi, può (come di sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. tiri di dadi differenti; però accanto ad essa triplicitat 631. si nota 6. Et essendo la 2.ª 622. coposta di due numeri eguali, et di un altro diverso; non può prodursi se non in 3. scoperte; però sopra nota accanto 3. La terza triplicitat 541. è coposta di 3. n.º diversi, può farsi da 6. scoperte onde si nota co' n.º 6. e così delle altre tutte; e finalm. appie dalla colonna de n.º delle scoperte ~~si nota~~ <sup>si nota</sup> e ~~raccontare~~ <sup>raccontare</sup> la somma di tutti; e que si vede come il punto 10. può farsi da 27. scoperte di dadi differenti; ma il punto 9. da 25. sciam. 6.º da 21. il 7.º da 15. il 6.º da 10. il 5.º da 6. il 4.º da 3. e finalm. il 3.º da 1. le quali

tutte ~~scelte~~ sommate insieme ascendono al n.º di 108. Et essendo acci-  
tate le scelte de i sortatori, cioè de i futi 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. si rac-  
coglie la somma di tutte le scelte possibili a farsi ed la facce de 13. dadi  
che sono 216. Et da questa tavola potrà ogn'uno che intenda il giu-  
co, benissimo andar puntualissimamente componendo tutti i vantaggi  
e minimi che sieno delle sorte de gl'incontri, e di qualunq. altra in-  
dicolar regola, e terminare che in esso giuoco si offerisca.



Traducció del text original (italià) al català<sup>2</sup>

### SOBRE EL JOC DE DAUS

Que en el joc de daus hi hagi alguns punts que siguin més avantatjosos que els altres, té la seva raó en el fet que es poden formar amb més tirades i, per tant, poden sortir més fàcilment i més freqüentment. Així, el 3 i el 18, que solament es poden formar aquest amb 6.6.6 i l'altre amb 1.1.1, i no d'una altra manera, més difícilment poden sortir que el 6 o el 7, els quals es poden formar de diferents maneres, el 6 amb 1.2.3, 2.2.2 i 1.1.4 i el 7 amb 1.1.5, 1.2.4, 1.3.3, i 2.2.3. Malgrat tot, encara que el 9 i el 12 es poden compondre en forma semblant que el 10 i el 11, motiu pel qual haurien de ser considerats de comportament igual, pot veure's que una llarga observació ha fet que entre els jugadors es considerin més avantatjosos el 10 i el 11 que el 9 i el 12.\* És evident que el 9 i el 10 (el que d'aquests es diu és també veritat pels números 12 i 11) es formen amb una semblant diversitat de números: el 9 es pot formar amb 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, i 3.3.3, que són sis triplicitats; i el 10 amb 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, i 3.3.4, i no d'una altra manera, que són en conseqüència sis combinacions. Ara jo, per servir a qui m'ha encomanat això que em comporta aquesta dificultat, exposaré el meu parer, amb l'esperança de no tan sols resoldre aquest dubte, sinó també d'obrir el camí per poder mostrar puntualíssimament les raons per les quals totes particularitats del joc han estat amb gran previsió i judici compartides i ajustades.

I per conduir-me fins el meu objectiu amb la major claredat, començo a considerar com, essent un dau format per sis cares sobre cadascuna de les quals, llançat, pot indiferentment aturar-se, sis esdevenen les seves tirades possibles i no més, cada una diferent de l'altra. Però si nosaltres al mateix temps que el primer llencem un segon dau, que també té sis cares, podem fer 36 tirades diferents entre elles, esdevenint que cada cara del primer dau pot sumar-se amb cadascuna del segon, i en conseqüència fer 6 tirades diverses; de la qual cosa és evident, que les esmentades combinacions són 6 vegades 6, això és 36. I si nosaltres afegim un tercer dau, de manera que cadascuna de les seves 6 cares pugui sumar-se a cadascuna de les 36 tirades dels altres dos daus, tindrem que les tirades de 3 daus seran 6 vegades 36, això és 216, totes elles diferents. Però ja que els punts de les tirades de 3 daus no són sinó 16, això és 3, 4, 5, etc fins a 18, entre les quals s'han de compartir les esmentades 216 tirades, és necessari que algunes d'aquestes n'hi toquin moltes; i si nosaltres trobem quantes en toquen a cadascuna, haurem obert el camí per arribar al coneixement d'allò que busquem: n'hi haurà prou de fer tal investigació del 3 fins al 10, perquè allò que farà referència a qualsevol d'aquests números, farà referència els que són més grans que aquests.

Tres particularitats s'han d'esmentar per comprendre clarament el que resta. La primera és aquell punt de tres daus, la composició del qual resulta de tres números idèntics, no pot produir-se si no és per una sola tirada: i així el 3 no es pot

<sup>2</sup> Text extret del llibre *Història de la Teoria de la Probabilitat, Galileu Galileu, Sobre el joc de daus.*

formar si no és per les tres cares de l'as; i el 6 quan s'ha de formar amb tres dosos, no es pot fer sinó d'una sola tirada. Segona: el punt que sigui compost per tres números, dos dels quals siguin idèntics i el tercer diferent, és pot produir per tres tirades: com, per exemple, el 4, que neix del 2 i dels 2 asos, pot fer-se amb tres tirades diferents; això és, quan el primer dau descobreixi 2, i el segon i el tercer asos; quan el segon dau mostri el 2, i el primer i el tercer l'as; i finalment quan el tercer dau mostri el 2 i el primer i el segon l'as. I així, per exemple, el 8, quan resulta de 3.3.2 pot produir-se semblantment de tres maneres: això és, descobrint el primer dau 2, i el segon i el tercer 3; o descobrint el primer dau i el segon 2 i el tercer 3; o finalment, descobrint el tercer 2, i el primer i el segon 3. Tercera: aquell punt que es compona de 3 números diferents, pot produir-se de 6 maneres: com per exemple, el 8, sempre que es componi de 1.3.4 es pot fer amb 6 tirades diferents: primera, quan el primer dau mostri 1, el segon 3 i el tercer 4; segona, quan el primer dau mostri 1, el segon 4, i el tercer 3; tercera, quan el segon dau mostri 1, i el primer 3, i el tercer 4; quarta, mostraran el segon dau 1, i el primer 4, i el tercer 3; quinta, quan mostri el tercer dau 1, el primer mostri 3, i el segon 4; sisena, quan el tercer dau mostri 1, el primer mostrarà 4, i el segon 3.

Hem, doncs, mostrat fins ara aquests tres fonaments: primer, que la triplicitat, això és el número de les tirades dels tres daus, que es compona de tres números iguals, tan sols es pot produir d'una sola manera; segon, la triplicitat que es produeix per dos números iguals i un tercer diferent, es pot produir de tres maneres diferents; tercer, aquelles que surten de tres números tots diferents, es formen de sis maneres. A partir d'aquests fonaments fàcilment sabrem de quantes maneres, o millor dit en quantes tirades diferents, es poden formar tots els números de tres daus, la qual cosa gràcies al quadre següent es pot comprendre fàcilment: a la part superior del qual estan apuntats els punts de les tirades del 10 en avall fins el 3, i sota d'aquests les diferents triplicitats, mitjançant les quals cadascun d'aquests números pot resultar; al costat de les quals s'hi han posat els números segons els quals es pot diversificar cadascuna de les triplicitats; sota de les quals s'ha recollit finalment la suma de totes les maneres possibles en que es poden produir aquestes tirades.

10	9	8	7	6	5	4	3									
6.3.1.	6	6.2.1.	6	6.1.1.	3	5.1.1.	3	4.1.1.	3	3.1.1.	3	2.1.1.	3	1.1.1.	1	1
6.2.2.	3	5.3.1.	6	5.2.1.	6	4.2.1.	6	3.2.1.	6	2.2.1.	3					3
5.4.1.	6	5.2.2.	3	4.3.1.	6	3.3.1.	3	2.2.2.	1							10
5.3.2.	6	4.4.1.	3	4.2.2.	3	3.2.2.	3									15
4.4.2.	3	4.3.2.	6	3.2.2.	3											21
4.3.3.	3	3.3.3.	1													25
																27
	27		25		21		15		10		6					108

Com, per exemple, en la primera casella tenim el punt 10, i sota d'aquest 6 triplicitats de números amb les quals es pot compondre, que són 6.3.1, 6.2.2, 5.4.1, 5.3.2, 4.4.2, 4.3.3, i com que la primera triplicitat 6.3.1, està composta per tres números diferents, pot (com ja he dit abans) ser feta per 6 tirades diferents de daus; en conseqüència al costat d'aquesta triplicitat 6.3.1, s'hi anota 6: i essent la segona 6.2.2, composta per dos números iguals i un altre diferent, no es pot produir sinó amb 3 tirades diferents llavors se li anota al costat 3: la tercera triplicitat 5.4.1, composta per 3 números diferents, pot fer-se amb 6 tirades; en conseqüència s'hi anota al costat 6: i així amb la resta. I finalment al peu de la columneta del número de les tirades s'hi fa la suma de totes: amb això es veu com el número 10 es pot fer amb 27 tirades diferents de daus; però el punt 9 solament amb 25, el 8 amb 21, el 7 amb 15, el 6 amb 10, el 5 amb 6, el 4 amb 3, i finalment el 3 amb 1: les quals sumades totes conjuntament resulten 108; i essent respectivament iguals les tirades dels números superiors, això és dels punts 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 i 18, pot recollir-se la suma de totes les tirades possibles que es poden fer amb les cares de 3 daus, que són 216. I amb aquesta taula cadascú que compregui el joc, podrà puntualíssimament anar considerant tots els avantatges, per mínims que siguin, de l'enfrontament o de qualsevol altra regla particular o general que s'observi en aquest joc.

Galileu Galilei

Nota:\* La probabilitat d'obtenir un 10 amb tres daus és  $27/216 = 0,125$  i la d'obtenir un 9 és  $25/216 = 0,116$ . La diferència és  $0,125 - 0,116 = 0,009$ . Una diferència tan petita és pràcticament impossible de detectar experimentalment i menys amb els daus utilitzats en aquella època o abans. La referència de Galileu a que aquesta diferència havia estat detectada pels jugadors resulta difícil de creure i es pot entendre com un tribut a un tòpic tradicional que encara es conserva avui dia. La mena de problema que Galileu va resoldre era de naturalesa teòrica. Que aquests resultats teòrics puguin ser utilitzats en jocs d'atzar és merament accidental. Un possible treball és determinar mitjançant un programa d'ordinador quantes tirades aleatòries es necessitarien per detectar aquesta diferència.

**ANNEX 2 : CARTA DE PASCAL A FERMAT DEL DIMECRES 29 DE JULIOL DE 1654**

Carta de Pascal a Fermat (text original)

*Quarta-feira 29 de Julho 1654*

*1. A impaciencia tomou conta de mim, bem como de si, e, embora eu ainda esteja acamado, não posso evitar de lhe dizer que recebi a sua carta respeitante ao problema dos pontos<sup>3</sup>, ontem à noite, das mãos de Sr. Carcavi e que estou mais admirado do que lhe posso contar. Não ousou escrevê-lo por extenso mas, numa palavra, o Sr. encontrou as duas divisões dos pontos e do dado com toda a justiça.*

*Admiro o seu método para o problema dos pontos mais do que para o do dado. Vi soluções para o problema do dado de várias pessoas, tais como a do Sr. Cavaleiro de Mére que me colocou a questão, e também a do Sr. Roberval. O Sr. de Mére nunca foi capaz de encontrar o valor exacto dos pontos, nem foi capaz de encontrar um método de derivação, pelo que eu sou o único que conhece esta proporção.*

*2. O seu método é muito bom e foi o primeiro que me ocorreu durante estas pesquisas. Mas, devido ao facto de as combinações serem excessivas, eu encontrei um atalho e, na realidade, outro método mais curto e claro, o qual lhe passo a descrever em poucas palavras; pelo que gostaria de lhe abrir o meu coração daqui para a frente, se tal me é permitido, visto ter sido enorme o prazer que tive com o nosso acordo. Claramente vejo que a VERDADE é a mesma em Toulouse e em Paris.*

*Este é o caminho que tomo para saber o valor de cada parte quando 2 jogadores jogam, por exemplo 3 lançamentos, e quando cada um aposta 32 pistolas (dinheiro da época).*

*Suponhamos que o primeiro tem 2 (pontos) e o outro 1(ponto). Eles jogam agora uma vez na qual as hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, ele ganhará a totalidade do que está apostado, ou seja, 64 pistolas. Se o outro ganhar eles ficarão 2 para 2 e, conseqüentemente, se pretenderem dividir acontecerá que cada um retirará o valor da sua aposta, ou seja, 32 pistolas.*

*Considere então Sr. que se o primeiro ganha 64, serão dele. Se perder, 32 serão dele.*

*Então, se eles não quiserem jogar este ponto e queiram dividir, sem o fazer, o primeiro*

---

<sup>3</sup> Os editores destas cartas fazem notar que a palavra *parti* significa a divisão da aposta entre dois jogadores no caso em que o jogo é interrompido antes de acabar. *Parti des dés* significa que o jogador que detém o dado concorda em lançar um certo número de lançamentos. Para clarificar, nesta tradução, o primeiro destes casos será denominado *problema dos pontos*, um termo que tem tido uma certa aceitação na História da Matemática, enquanto que o segundo pode ser analogamente denominado por *problema do dado*.

*jogador deverá dizer: «Eu tenho 32 pistolas, porque, mesmo que perca elas serão minhas. Quanto às outras 32, talvez as venha a ganhar ou talvez você as ganhe, o risco é igual. Assim, vamos dividir as 32 pistolas a meias, e eu fico com as 32 que são realmente minhas». Ele terá então 48 e o outro 16.*

*Agora suponhamos que o primeiro tinha 2 pontos e o outro nenhum, e que jogavam para 1 ponto. As hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, levará a totalidade da aposta, 64 pistolas. Se o outro ganhar, tenha em atenção de que eles voltarão à situação atrás descrita, na qual o primeiro tem 2 pontos e o segundo 1 ponto.*

*Neste caso, já demonstrámos que 48 serão do que tem 2 pontos. Portanto, se eles não quiserem jogar este ponto ele deverá dizer: «Se eu ganhar fico com tudo, ou seja, com 64 pistolas. Se eu perder, 48 serão legitimamente minhas. Portanto, dê-me as 48 que me pertencem de certeza mesmo que eu perca e, vamos dividir as outras 16 ao meio pois temos as mesmas hipóteses de as ganhar». Então, ele terá  $48 + 8$  que são 56.*

*Vamos agora imaginar que o primeiro tem apenas 1 ponto e o outro nenhum. Repare Sr., que se eles iniciarem uma nova jogada as hipóteses serão tais que, caso o primeiro ganhe, ele terá 2 pontos e o outro 0 e dividindo, como na situação anterior, 56 serão dele. Se ele perder, eles ficarão empatados e 32 serão dele. Ele deverá dizer então: «Se não quer jogar dê-me as 32 pistolas que são de certeza minhas e, vamos dividir o resto das 56 ao meio. De 56 tira 32 ficam 24. Depois, divida 24 ao meio dá 12 para si e 12 para mim, que com 32 dará 44».*

*Como vê, por este meio, por simples subtracção, pela primeira jogada ele terá 12 do outro, pela segunda mais 12 e pela terceira 8.*

*Mas, para não tornar isto mais misterioso, uma vez que você deseja ver tudo a descoberto, e como não tenho outro objectivo que não seja o de ver se estou errado, o valor (quero dizer, apenas o valor da aposta do outro jogador) da última jogada de 2 é o dobro do da última jogada de 3 e quatro vezes o da última jogada de 4 e 8 vezes o da última jogada de 5, etc.*

*3. Mas, o ratio das primeiras jogadas não é tão fácil de encontrar. Como não pretendo esconder nada, aqui fica o método e aqui está o problema que considere em tantos casos, como tive o prazer de o fazer: «sendo considerado qualquer número de jogadas que alguém pretenda, encontrar o valor da primeira».*

*Por exemplo, suponhamos que o número de jogadas é 8. Tomam-se os primeiros 8 números pares e os primeiros 8 números ímpares, assim:*

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

e

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

*Multiplica-se os números pares desta forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, o seu produto pelo quarto, o seu produto pelo quinto, etc.; multiplica-se os números ímpares da mesma forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, etc.*

*O último produto dos números pares é o denominador e o último produto dos números ímpares é o numerador da fracção, que exprime o valor da primeira jogada de 8. Isto quer dizer que, se cada um joga o número de pistolas iguais ao produto dos números pares, pertencer-lhe-ão (quem perder a jogada) a quantia da aposta do outro, expressa pelo produto dos números ímpares. Isto pode ser provado mas, com muita dificuldade devido às combinações, tais como você imaginou, e eu não conseguí prová-lo por este outro método que agora lhe vou explicar mas, apenas pelo das combinações. Eis aqui os teoremas que conduzem a este, os quais são proposições aritméticas correctas, no que diz respeito às combinações nas quais eu encontrei tantas propriedades bonitas:*

*4. Se de qualquer número de letras, como 8 por exemplo,*

A, B, C, D, E, F, G, H,

*você formar todas as combinações possíveis de 4 letras, depois todas as combinações de 5 letras, depois as de 6 depois as de 7, de 8, etc. e tomar todas as combinações possíveis, eu digo que, se você adicionar metade das combinações de 4 com cada uma das combinações mais altas, a soma será um número igual ao número da progressão quaternária começando com 2, o qual é metade do número total.*

*Por exemplo, utilizarei o latim visto o Francês não servir para nada:*

*Se qualquer número de letras, por exemplo 8,*

A, B, C, D, E, F, G, H,

*or somado em todas as combinações possíveis, de 4,5,6 até 8, eu afirmo que, se você somar metade das combinações de 4, que são 35 (metade de 70) a todas as combinações de 5, que são 56, e todas as combinações de 6, a saber 28, e todas as combinações de 7, a saber 8, e todas as combinações de 8, a saber 1, a soma é o quarto número da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2. Eu digo que o quarto número para 4 é metade de 8.*

*Os números da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2 são*

2, 8, 32, 128, 512, etc.,

dos quais 2 é o primeiro, 8 o segundo, 32 o terceiro, e 128 o quarto. Destes o 128 é igual:

+35 (metade das combinações de 4 letras)

+ 56 (as combinações de 5 letras)

+ 28 (as combinações de 6 letras)

+ 8 (as combinações de 7 letras)

+ 1 (a combinação de 8 letras)

5. Este é o primeiro teorema, o qual é puramente aritmético. O outro diz respeito à teoria dos pontos e é assim:

É necessário dizer primeiro que: se um (jogador) tem um ponto de 5, por exemplo, apesar de perder 4, o jogo será definitivamente decidido em 8 jogadas, que são o dobro de 4.

O valor da primeira jogada de 5, na aposta do outro, é a fracção que tem como numerador metade da combinação de 4 das 8 (tomei 4 porque é igual ao número de pontos que ele perdeu e 8 porque é o dobro de 4) e para denominador, o mesmo numerador somado a todas as mais altas combinações.

Assim, se eu tiver 1 ponto de 5,  $35/128$  da aposta do meu opositor pertence-me. Isto quer dizer que, se ele tiver apostado 128 pistolas eu tirarei 35 e deixá-lo-ei com o resto, 93.

Mas, esta fracção,  $35/128$ , é a mesma que  $105/384$  que é o resultado da multiplicação dos números pares para o denominador e da multiplicação dos números ímpares para o numerador.

O Sr. verá tudo isto sem qualquer dúvida se se der ao trabalho, por isso acho desnecessário discutir mais consigo acerca disto.

6. Contudo, enviar-lhe-ei uma das minhas antigas tabelas; não tenho tempo para copiá-la mas mencioná-la-ei.

Você verá aqui, como sempre, que o valor da primeira jogada é igual ao da segunda, algo que será facilmente provado pelas combinações.

Verá também que os números da primeira linha estão sempre a crescer; os da segunda igualmente, bem como os da terceira.

Mas, após isto, os da quarta linha diminuem, bem como os da quinta. Isto é ímpar.

*Se cada um apostar 256 pistolas*

	6 lançamentos	5 lançamentos	4 lançamentos	3 lançamentos	2 lançamentos	1 lançamento
Primeiro lançamento	63	70	80	96	128	256
Segundo lançamento	63	70	80	96	128	
Terceiro lançamento	56	60	64	64		
Quarto lançamento	42	40	32			
Quinto lançamento	24	16				
Sexto lançamento	8					

*Se cada um apostar 256 pistolas*

	6 lançamentos	5 lançamentos	4 lançamentos	3 lançamentos	2 lançamentos	1 lançamento
Primeiro lançamento	63	70	80	96	128	256
Segundo lançamento	126	140	160	192	256	
Terceiro lançamento	182	200	224	256		
Quarto lançamento	224	240	256			
Quinto lançamento	248	256				
Sexto lançamento	256					

7. Não tenho tempo para lhe enviar a prova de um ponto difícil que muito espantou o Sr. De Mére, pois ele tem competência mas não é um geometra (o que é como sabe um grande defeito), e ele ainda não compreende que uma linha matemática é infinitamente divisível e está firmemente convencido que é composta por um número finito de pontos. Nunca consegui tirar-lhe essa ideia. Se você conseguisse isso torná-lo-ia perfeito.

*Ele diz-me, então, que encontrou um erro nos números, por esta razão:*

*Se alguém aceitar jogar um 6 com um dado, a vantagem de aceitar fazer isso em 4, está como 671 para 625.*

*Se alguém aceitar jogar um doble de 6 com 2 dados, a desvantagem de acertar é 24.*

*Mas, contudo, 24 está para 36 (que é o número de faces de 2 dados)<sup>4</sup> como 4 está para 6 (que é o número de faces de um dado).*

*Este foi o seu grande escândalo que o fez dizer, altivamente, que os teoremas não eram consistentes e que a aritmética era de loucos. Mas, o Sr. verá facilmente a razão, pelos princípios que possui.*

<sup>4</sup> Claramente, o número de combinações possíveis para os dois dados.



*Devo pôr em ordem tudo o que já fiz, quando acabar o Tratado sobre Geometria<sup>5</sup>, no qual tenho vindo a trabalhar à já algum tempo.*

8. *Também fiz algo com aritmética e peço-lhe para me dar o seu conselho sobre tal assunto.*

*Propus o seguinte lema, que toda a gente aceitou: a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão contínua partindo da unidade, como*

$$1, 2, 3, 4,$$

*multiplicada por 2 é igual ao último termo, 4, multiplicado pelo termo seguinte, 5. Isto equivale a dizer que a soma dos inteiros até  $A$ , multiplicada por 2 é igual ao produto*

$$A \times (A + 1).$$

*Chego agora ao meu teorema:*

*«Se um for subtraído à diferença dos cubos de quaisquer dois números consecutivos, o resultado é seis vezes todos os números contidos na raiz do menor deles».*

*Deixemos as duas raízes,  $R$  e  $S$ , diferirem por uma unidade. Digo que  $R^3 - S^3 - 1$  é igual a seis vezes a soma dos números contidos em  $S$ .*

*Tomemos  $S$  como  $A$ , então  $R$  é  $A + 1$ . Portanto, o cubo da raiz  $R$  ou  $A + 1$  é*

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

*O cubo de  $S$ , ou  $A$ , é  $A^3$  e a diferença disto é  $R^3 - S^3$ ; portanto, se subtrairmos uma unidade  $3A^2 + 3A$  é igual a  $R^3 - S^3 - 1$ . Mas, pelo lema, o dobro da soma dos números contidos em  $A$  ou  $S$  é igual a  $A(A + 1)$ ; isto é,  $A^2 + A$ . Portanto, seis vezes a soma dos números em  $A$  é igual a  $3A^2 + 3A$ . Mas,  $3A^2 + 3A$  é igual a  $R^3 - S^3 - 1$ . Então,  $R^3 - S^3 - 1$  é igual a seis vezes a soma dos números contidos em  $A$  ou  $S$ . Quod erat demonstrandum<sup>6</sup>. Ninguém me colocou nenhuma dificuldade em relação ao que foi dito atrás mas, disseram-me que ninguém o fez porque todos estão acostumados a este método. Em relação a mim próprio, e digo isto sem estar a fazer nenhum favor a mim próprio, deveriam admitir isto como um excelente tipo de demonstração. Contudo, aguardo pelo seu comentário, com deferência. Tudo o que já provei em aritmética é desta natureza.*

9. *Aqui estão duas dificuldades (posteriores ou suplementares): provei um teorema simples fazendo uso do cubo de uma linha comparado com o cubo de outra. Com isto quero dizer, que isto é puramente geométrico e de grande rigor. Assim, resolvi o problema: «Dados quaisquer 4 planos, 4 pontos e 4 esferas, encontrar a esfera que,*

<sup>5</sup> Talvez o manuscrito que Leibniz viu, mas que já não existe.

<sup>6</sup> Está demonstrado.

*tocando nas esferas dadas, passa pelos pontos dados e deixa nos planos segmentos, nos quais podem ser inscritos certos ângulos» e este: «Dados quaisquer 3 círculos, 3 pontos e 3 rectas, encontrar o círculo que toca nos círculos dados e nos pontos, e que deixa nas rectas um arco onde um dado ângulo pode ser inscrito».*

*Resolvi estes problemas no plano, usando nada mais na sua construção a não ser círculos e rectas mas, na demonstração fiz uso de cónicas, parábolas e hipérbolas. Contudo, uma vez que a construção é no plano, mantenho a minha solução no plano, e é assim que ela deve passar.*

*Este é um pobre reconhecimento da honra que me deu ao apresentar o meu discurso, que o tem vindo a afligir à tanto tempo. Nunca pensei que lhe deveria ter dito duas palavras e, se eu lhe dissesse o que me predomina no meu coração - quanto melhor o conheço, mais o honro e o admiro - e, se quisesse ver a que grau corresponde isto, permitiria um lugar na sua amizade para aquele que é, Sr., o seu...*

*Pascal*

Carta de Pascal a Fermat (text traduït del portuguès al català per Eva Bramon)

*Dimecres, 29 de juliol, 1654*

1. *La impaciència s'ha apoderat de mi igual que tu, i tot i que encara estic al llit, no puc evitar dir-li que ahir a la tarda vaig rebre la seva carta sobre el problema dels punts<sup>7</sup> de la mà de M. Carcavi, i que estic més sorprès del que li puc explicar. No tinc temps per escriure amb detalls, però, amb una paraula, ha trobat les dues divisions dels punts i dels daus amb la perfecta justícia.*

*Admiro el seu mètode pel problema dels punts fins i tot més que pel dels daus. He vist solucions del problema dels daus de diferents persones, com el Cavaller de Méré, que va proposar-me la qüestió a mi, i el Senyor Roberval. El Cavaller de Méré no va ser mai capaç de trobar el valor exacte dels punts ni tampoc el mètode de derivació, de manera que jo sóc l'únic que coneix aquesta proporció.*

2. *El seu mètode és molt bo i ha sigut el primer que se'm va ocórrer en aquestes investigacions. No obstant això, degut a que les combinacions eren excessives, he trobat un altre mètode més breu i clar, el qual et voldria descriure amb poques paraules; així que a partir d'ara, m'agradaria obrir-li el meu cor, si m'és permès, ja que ha estat un plaer arribar fins aquest acord amb vostè. Clarament veig que la veritat és la mateixa tant a Toulouse com a Paris.*

*Aquest és el camí que prenc per saber el valor de cada part quan dos jugadors juguen, per exemple, tres llançaments, i cadascun d'ells aposta 32 pistoles (diners de l'època).*

*Suposem que el primer té 2 punts i l'altre 1, i que juguen una tirada en la que si guanya el primer, guanya tot el que aposta, és a dir, 64 pistoles. En canvi, si guanyés l'altre anirien 2 a 2 i, en conseqüència, si es volguessin dividir l'aposta es quedarien amb el valor de la seva aposta inicial, o sigui, 32 pistoles.*

*Considerem doncs, Senyor, que si el primer guanya, 64 pistoles són seves. Si perd, només en tindrà 32. Si decidissin no continuar jugant en aquest punt i separessin els diners, el primer hauria de dir: "Estic segur que 32 pistoles són per mi, ja que fins hi tot si perdés em tocarien. Les altres 32, potser les guanyo jo o potser les guanya vostè, les possibilitats són les mateixes. Així doncs, dividim les 32 pistoles en dues parts i doni'm les 32 que sabem segur que són per mi". Llavors ell en tindrà 48 i l'altre 16.*

---

<sup>7</sup> Els editors d'aquestes cartes afirmen que la paraula *parti* significa la divisió d'una aposta entre els dos jugadors en el cas que el joc quedi interromput abans d'acabar. *Parti des dés* significa que el jugador que té el dau està d'acord en llançar-lo un nombre determinat de vegades. Per ser més clars, en aquesta traducció, el primer d'aquests casos es coneix com el *problema dels punts*, un terme que ha tingut certa acceptació en la Història de les Matemàtiques, mentre que el segon és anomenat *problema dels daus* per analogia.

Ara suposem que el primer tenia 2 punts i l'altre cap, i que jugaven per 1 punt. Si el primer guanya, s'emportarà tota l'aposta (64 pistoles). Si guanyés l'altre es tornaria a donar la situació anterior en què el primer tenia 2 punts i l'altre 1.

En aquest cas ja hem demostrat que 48 pistoles són per el que té 2 punts. Per tant, si no volgués continuar jugant hauria de dir: "Si guanyo m'ho quedo tot, és a dir, 64 pistoles, i si perdo tinc 48 pistoles assegurades. Així que doni'm les 48 pistoles que em pertanyen amb total seguretat i dividim-nos les altres 16 entre els dos perquè tenim la mateixa oportunitat de guanyar". Llavors ell tindria 48 i 8 que són 56 pistoles.

Imaginem-nos ara que el primer només te 1 punt i l'altre no en té cap. Com veu, Senyor, hi ha la probabilitat que a la següent tirada guanyi el primer, llavors aquest tindria 2 punts i l'altre cap. I partint del cas anterior, 56 pistoles serien per ell. Si el primer perdés, estarien empatats i només li correspondrien 32 pistoles. I llavors ell diria: "Si vostè no vol seguir jugant, doni'm les 32 pistoles que són meves sense cap dubte i després ens dividim les 56 restants. De les 56 treu-li 32, en queden 24. Després divideixi les 24 en dues parts, agafin 12 i jo agafaré les altres 12 que amb les 32 que ja tenia faran 44".

Tal com veu, amb aquest mitjà de simples sostraccions, a la primera tirada tindrà 12 pistoles de l'altra, a la següent 12 més, i a l'última 8 més.

Per no fer-ho més misteriós ja que vol veure-ho tot al descobert, i com que no tinc cap altre objectiu que veure si m'equivoco, el valor (em refereixo només al valor de l'aposta de l'altre jugador) de l'última jugada dels dos és el doble del de l'última jugada de tres, i quatre vegades el de l'última jugada de quatre i vuit vegades el de l'última jugada de cinc, etc.

3. Però la relació que hi ha a les primeres jugades no és tan fàcil de trobar. Com que no li vull amagar res, això és el mètode i aquí està el problema que vaig tenir el plaer de fer i que he tingut en compte en molts de casos: "Donat qualsevol nombre de tirades que un desitgi, trobi el valor de la primera tirada". Per exemple, suposem que el nombre de tirades és 8. Prengui els vuit primers nombres parells i els vuit primers nombres senars com:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

i

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Multipliqui els nombres parells d'aquesta manera: el primer pel segon, el seu producte pel tercer, el seu producte pel quart, el seu producte pel cinquè, etc.; multipliqui els nombres imparells d'aquesta mateixa manera: el primer pel segon, el seu producte pel tercer, etc.

El producte final dels nombres parells és el denominador i el producte final dels nombres senars és el numerador de la fracció que expressa el valor de la primera tirada de 8. Això

significa que si cadascú juga el nombre de pistoles expressat pel producte dels nombres parells, li pertany a ell (qui perd la tirada) la suma de les apostes dels altres jugadors expressades pel producte dels nombre imparells. Això es pot provar, però amb molta dificultat degut a les combinacions, i com vostè ja s'haurà imaginat, no he estat capaç de demostrar-ho per aquell altre mètode que li vaig explicar. A continuació hi ha els teoremes que porten al mètode, que són proposicions aritmètiques sobre les combinacions, de les quals n'he trobat moltes propietats:

4. Si de qualsevol nombre de lletres, per exemple 8,

A, B, C, D, E, F, G, H,

es poden formar totes les combinacions possibles de 4 lletres, llavors totes les combinacions possibles de 5 lletres, després les de 6, 7, 8, etc. I prendre totes les combinacions possibles, dic que si s'uneixen la meitat de les combinacions de 4 amb cadascuna de les combinacions més altes, la suma serà un nombre igual al nombre de la progressió quaternari començant pel 2, que és la meitat del nombre total.

Per exemple, utilitzarem el llatí ja que el Francès no serveix per res:

Si qualsevol nombre de lletres, per exemple 8,

A, B, C, D, E, F, G, H,

és sumat en totes les combinacions possibles, de quatre en quatre, de cinc en cinc, sis, fins a vuit, és a dir, si se suma la meitat de les combinacions de quatre en quatre, que són 35 (la meitat de 70), a totes les combinacions de cinc en cinc, són 56, i a totes les combinacions de sis en sis, o sigui 28, i a totes les combinacions de set en set que són 8, i a totes les combinacions de vuit en vuit que només és una; la suma és igual al quart número de la progressió quaternària que el seu primer terme és el 2. Jo dic que el quart nombre de 4 és la meitat de 8.

Els nombres de les progressions quaternàries que el seu primer terme és 2 són

2, 8, 32, 128, 512, etc.,

dels quals 2 és el primer, 8 el segon, 32 el tercer i 128 el quart. D'aquests, el 128 equival a:

+35 (la meitat de les combinacions de 4 lletres)

+ 56 (combinacions de 5 lletres)

+ 28 (combinacions de 6 lletres)

+ 8 (combinacions de 7 lletres)

+ 1 (combinació de 8 lletres)

5. Aquest és el primer teorema el qual és purament aritmètic. L'altra es relaciona amb la teoria dels punts i és el següent:

Cal dir primer que: si un jugador té un punt de 5, per exemple, i encara que n'hagi perdut 4, el joc es decidirà en vuit tirades, que és dues vegades 4.

El valor de la primera tirada de 5 en l'aposta de l'altre és la fracció que té per numerador la meitat de les combinacions de 4 de 8 (n'utilitzo 4 perquè equival al nombre de punts que ha perdut, i 8 perquè és el doble de 4) i per denominador el mateix numerador a més de totes les combinacions més altes.

Així que si tinc un punt de 5, els 35/128 de l'aposta del meu oponent em pertanyen a mi. Això vol dir que si s'haguessin apostat 128 pistoles, n'agafaria 35 de les seves i li deixaria la resta per ell, 93.

No obstant això, aquesta fracció és la mateixa que 105/384, que s'obté multiplicant els nombres parells pel denominador i els nombres senars pel numerador.

Vostè veurà això sense cap problema, així que trobo innecessari parlar més sobre aquest tema.

6. Tot i així, li enviaré un dels meus antics quadres; no tinc temps per copiar-los però els esmentaré.

Vostè veurà aquí, com sempre, que el valor de la primera jugada és igual al de la segona, cosa que es pot comprovar fàcilment per les combinacions.

També veurà que els números de la primera línia sempre es troben en augment, igual que els de la segona i igual que els de la tercera.

Però a diferència d'aquests, els de la quarta línia disminueixen, igual que els de la cinquena, etc. Això és estrany.

*Si cada un aposta 256 pistoles*

	6 llançaments	5 llançaments	4 llançaments	3 llançaments	2 llançaments	1 llançament
Primera tirada	63	70	80	96	128	256
Segona tirada	63	70	80	96	128	
Tercera tirada	56	60	64	64		
Quarta tirada	42	40	32			
Cinquena tirada	24	16				
Sisena tirada	8					

*Si cada un aposta 256 pistoles*

	6 llançaments	5 llançaments	4 llançaments	3 llançaments	2 llançaments	1 llançament
Primera tirada	63	70	80	96	128	256
Segona tirada	126	140	160	192	256	
Tercera tirada	182	200	224	256		
Quarta tirada	224	240	256			
Cinquena tirada	248	256				
Sisena tirada	256					

7. *No tinc temps per enviar-li la prova d'un punt difícil que va sorprendre gratament el Cavaller de Meré, ell té habilitats però no és geòmetra (que és, com vostè sap, un gran defecte), i ni tan sols sap comprendre que una línia matemàtica és infinitament divisible i està fermament convençut que es compon d'un nombre finit de punts. No he aconseguit mai fer-lo canviar d'idea. Si vostè pogués fer-ho seria perfecte.*

*Em diu que ha trobat un error en els números per aquest motiu:*

*Si un es compromet de treure un sis a un dau, l'avantatge de realitzar-ho en quatre és de 671 per 625.*

*Si algú accepta jugar per un doble 6 amb dos daus, la desavantatge d'encertar és 24.*

*Però no obstant això, 24 és a 26 (que és el nombre de cares de dos daus)<sup>8</sup> com 4 és a 6 (que és el nombre de cares d'un dau).*

*Aquest va ser el gran escàndol que li va fer dir amb arrogància que els teoremes no eren compatibles i que l'aritmètica era una bogeria. Però vostè veurà fàcilment la raó pels principis que té.*

*He de posar en ordre tot el que he fet, quan acabi el Tractat de Geometria<sup>9</sup> en el que he estat treballant durant un temps.*

8. *També he fet alguna cosa amb l'aritmètica i li demano el seu consell sobre aquest tema.*

*Jo vaig proposar el següent lema, que tothom hi estava d'acord: la suma dels  $n$  primers termes d'una progressió contínua a partir de la unitat, com 1, 2, 3, 4, multiplicada per 2 és igual a l'últim terme, 4, multiplicat pel terme següent, 5. És a dir que la suma dels nombres enters fins a  $A$  multiplicada per 2 és igual al producte  $A \times (A + 1)$ .*

*Dono pas ara al meu teorema:*

<sup>8</sup> Evidentment, el nombre de combinacions possibles de dos daus.

<sup>9</sup> Pot ser que Leibniz veiés el manuscrit, però ja no existeix.

*“Si un es resta de la diferència dels cubs de dos nombres consecutius, el resultat és sis vegades la suma de tots els nombres continguts en l'arrel cúbica de la quantitat menor”.*

*Deixem que les dues arrels, R i S, es diferenciïn per una unitat. Afirmo que  $R^3 - S^3 - 1$  és igual a sis vegades la suma dels nombres continguts en S.*

*Agafem a S com A, llavors R és A + 1. Per tant, el cub de R o A + 1 és*

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

*El cub de S, o A, és  $A^3$  i la diferència d'això és  $R^3 - S^3$ ; de manera que si restem una unitat  $3A^2 + 3A$  és igual a  $R^3 - S^3 - 1$ . Però pel lema, el doble de la suma dels nombres continguts a l'A o S és igual a  $A(A+1)$ ; és a dir,  $A^2 + A$ . Per tant, sis vegades la suma dels nombres d'A és igual a  $3A^2 + 3A$ . Per tant,  $3A^2 + 3A$  és igual a  $R^3 - S^3 - 1$ . Per tant,  $R^3 - S^3 - 1$  és igual a sis vegades la suma de dos nombres continguts en A o S. Quod erat demonstrandum.<sup>10</sup> Ningú va posar cap dificultat en relació amb el que he dit més amunt, però em van dir que no ho van fer perquè tothom està acostumat a aquest mètode. Pel que fa a mi, i ho dic sense elevar-me a mi mateix, s'hauria d'admetre això com una excel·lent demostració. No obstant això espero el seu comentari amb tot el respecte. Tot el que he provat en l'aritmètica és d'aquesta naturalesa.*

*9. Hi ha dos problemes (posteriors o addicionals): He intentat utilitzar un teorema senzill utilitzant un cub d'una línia en comparació amb la d'un altre cub. Amb això vull dir que és purament geomètric i té molta precisió. Així vaig poder resoldre el problema: “Donats quatre segments plans, quatre punts i quatre boles, trobar la bola que, tocant les altres boles, passi pels punts donats i deixi els segments plans, els quals poden ser inscrits en certs angles”; i aquest: “Donats tres cercles, tres punts i tres línies, trobar el cercle que toqui els altres cercles i els punts i que deixi les línies de tal manera que hi pugui ser inscrit un angle”.*

*Una vegada resolt aquests problemes en el pla, utilitzant només cercles i línies rectes per a la seva construcció, en demostració he hagut d'utilitzar cons, paràboles i hipèrboles. No obstant això, en la mesura que la construcció està en un pla, jo sostinc que la meva solució també està en un pla, i que això ha de passar com a tal.*

*Aquest és un petit reconeixement de l'honor que m'ha donat de presentar-li el meu discurs, que ha estat afligit durant tant de temps. Mai havia pensat que li acabaria dient aquestes paraules, i si li digués què em diu el meu cor -que com més el conec més t'honra i t'admira- i si pogués veure fins a quin punt és això, vostè permetria un lloc en la seva amistat per ser com és, Senyor, el seu...*

*Pascal*

---

<sup>10</sup> Està demostrat.



**ANNEX 3: ENQUESTA SOBRE ELS JOCS D'ATZAR**

Sóc l'Eva Bramon i agrairia la vostra col·laboració per realitzar la següent enquesta pel meu treball de recerca de Batxillerat sobre: La probabilitat i els jocs d'atzar. És anònim.

**1. SEXE:**

- HOME  
 DONA

**2. EDAT:**

- ENTRE 18 I 30 ANYS  
 ENTRE 30 I 50 ANYS  
 ENTRE 50 I 70 ANYS  
 MÉS DE 70 ANYS

**3. NIVELL D'ESTUDIS:**

- SENSE ESTUDIS  
 ESTUDIS PRIMARIS (EDUCACIÓ PRIMÀRIA)  
 ESTUDIS SECUNDARIS (ESO I BATXILLERAT)  
 ESTUDIS SUPERIORS (UNIVERSITARIS)

**4. OCUPACIÓ:**

- ESTUDIANT  
 EN ACTIU QUINA? \_\_\_\_\_  
 ATURAT  
 JUBILAT

**QUANTS DINERS COBRES****MENSUALMENT:**

- MENYS DE 1000 EUROS  
 ENTRE 1000 I 2000 EUROS  
 ENTRE 2000 I 3000 EUROS  
 MÉS DE 3000 EUROS

**5. JOCS QUE APOSTA:**

- LOT RÀPID  
 LOTTO 6/49  
 TRIO  
 SUPER 10  
 LOTO EXPRESS  
 SUPERTOC  
 LOTERIA NACIONAL  
 LA PRIMITIVA

- EUROMILLONES  
 BONOLOTO  
 EL GORDO  
 LA QUINIELA  
 EL QUINIGOL  
 LOTOTURF  
 QUINTUPLE PLUS  
 ALTRES QUIN? \_\_\_\_\_

**6. VEGADES QUE JUGA:**

- ESPORÀDICAMENT  
 1 PER MES  
 2 PER MES  
 3-4 PER MES  
 MÉS DE 4 PER MES

**7. QUANTITAT QUE APOSTA:**

- 1-5 EUROS  
 5-10 EUROS  
 10-25 EUROS  
 MÉS DE 25 EUROS

**8. HA TINGUT PREMIS:**

- NO
- SÍ A QUIN JOC? \_\_\_\_\_

**QUANTS DINERS PORTES GUANYATS EN TOTAL?**

- MENYS DE 500 EUROS
- ENTRE 500 I 2000 EUROS
- ENTRE 2000 I 6000 EUROS
- MÉS DE 6000 EUROS

Moltes gràcies per la vostra ajuda.

## ANNEX 4: TAULES DELS RESULTATS DE LES QUINIELES DE L'ANY 2001 AL 2010

Any 2001-2002																1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	x	1	x	x	1	6	3	6
2	1	x	2	2	2	x	1	1	2	1	x	1	1	1	1	8	3	4
3	1	x	x	2	2	1	1	1	x	x	x	x	x	1	x	5	8	2
4	1	2	1	2	x	x	1	x	2	2	2	2	x	1	x	4	5	6
5	1	2	x	x	2	1	1	1	2	1	1	1	x	x	1	8	4	3
6	x	1	2	x	x	2	2	x	1	1	x	2	x	2	1	4	6	5
7	2	1	x	1	x	x	1	1	1	2	x	x	2	x	1	6	6	3
8	1	1	1	x	1	1	2	x	1	x	x	x	x	x	1	7	7	1
9	1	2	x	1	2	x	2	x	1	2	1	2	1	1	x	6	4	5
10	x	2	x	x	x	1	1	1	1	1	x	x	2	2	1	6	6	3
11	x	1	x	2	1	2	x	1	1	2	2	1	2	1	2	6	3	6
12	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	x	x	1	2	8	2	5
13	1	2	1	1	1	x	1	x	1	2	1	2	1	x	1	9	3	3
14	1	x	x	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	x	2	10	4	1
15	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	9	0	6
16	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	x	x	2	2	1	10	3	2
17	x	x	2	x	x	1	2	x	x	1	x	1	x	1	x	4	9	2
18	2	1	x	2	2	x	1	1	2	1	2	2	2	1	1	6	2	7
19	1	1	2	1	2	2	1	x	1	1	x	x	2	1	1	8	3	4
20	1	2	x	2	2	x	1	1	2	1	2	2	2	1	1	6	2	7
21	x	1	1	1	1	1	x	x	1	x	x	1	1	x	2	8	6	1
22	x	x	2	1	1	2	x	x	1	1	x	x	1	1	2	6	6	3
23	x	x	2	x	2	1	1	2	1	1	x	x	x	1	x	5	7	3
24	1	1	x	1	2	2	1	2	x	1	1	x	2	1	x	7	4	4
25	1	x	1	2	2	1	1	x	x	x	x	x	2	2	x	4	7	4
26	1	1	x	1	x	x	x	1	x	1	1	1	1	1	2	9	5	1
27	x	1	2	x	x	1	1	2	1	x	x	2	2	1	2	5	5	5
28	1	1	1	1	1	1	1	2	x	1	1	x	2	x	1	10	3	2
29	1	1	2	x	1	2	2	2	x	x	2	1	2	2	x	4	4	7
30	1	1	2	1	1	1	1	x	1	2	x	x	x	x	2	7	5	3
31	2	1	x	x	x	2	1	2	x	1	2	x	1	1	x	5	6	4
32	2	2	1	2	1	x	x	1	1	2	x	2	1	x	1	6	4	5
33	1	1	x	x	2	x	2	2	x	1	2	x	2	1	x	4	6	5
34	1	1	2	x	x	1	x	1	1	1	2	x	x	x	2	6	6	3
35	1	1	x	x	1	1	1	1	x	1	2	2	1	x	x	8	5	2
36	1	1	1	2	2	1	1	1	x	1	1	1	1	2	x	10	2	3
37	1	2	1	1	1	2	1	2	x	1	1	1	x	x	2	8	3	4
38	1	1	2	2	x	2	2	x	2	2	2	2	1	1	2	4	2	9
39	x	1	1	2	2	x	1	1	1	2	1	x	1	1	1	9	3	3
40	2	2	2	1	1	2	2	1	x	2	2	1	x	2	1	5	2	8
41	1	x	2	2	x	x	1	x	1	1	1	2	2	1	1	7	4	4
42	1	1	x	x	2	2	x	1	1	x	x	1	1	1	2	7	5	3
43	2	1	x	1	x	x	1	1	x	2	2	x	x	2	2	4	6	5
<b>TOTAL</b>																284	189	172
<b>%</b>																44,03	29,30	26,70

Any 2002-2003																1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	x	2
1	2	2	2	x	1	1	2	x	2	x	2	1	2	x	x	3	5	7
2	x	1	1	x	x	x	1	2	x	x	x	2	1	2	2	4	7	4
3	1	1	1	x	2	2	1	2	1	2	x	x	x	x	1	6	5	4
4	x	2	2	x	1	x	1	1	2	1	1	1	1	1	1	9	3	3
5	1	x	x	2	x	1	2	x	2	x	x	x	1	2	1	4	7	4
6	2	1	2	1	x	x	1	1	2	x	x	1	1	x	1	7	5	3
7	1	1	x	1	x	1	1	2	x	1	x	1	x	2	x	7	6	2
8	2	x	x	1	2	1	1	x	1	1	x	2	1	1	x	7	5	3
9	x	1	2	x	1	1	1	1	x	2	1	x	x	x	2	6	6	3
10	1	1	2	1	2	2	1	x	2	x	x	2	1	1	2	6	3	6
11	x	1	x	1	2	1	1	1	x	2	2	1	x	1	x	7	5	3
12	1	2	1	1	x	1	2	1	1	x	x	x	2	x	x	6	6	3
13	1	1	x	1	x	1	x	x	x	x	x	x	x	1	1	6	9	0
14	1	1	1	2	x	1	1	x	1	x	x	2	1	2	2	7	4	4
15	2	2	1	1	1	x	x	2	2	1	x	x	2	1	x	5	5	5
16	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	x	1	1	10	1	4
17	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	x	x	x	1	2	5	3	7
18	2	1	1	2	1	1	1	x	1	1	x	2	x	1	x	8	4	3
19	x	x	1	2	1	2	x	x	x	2	1	x	x	x	2	3	8	4
20	2	x	2	x	1	x	1	2	x	x	1	1	x	x	x	4	8	3
21	2	1	1	1	x	2	1	1	1	1	1	1	x	x	2	9	3	3
22	1	1	2	1	1	x	2	2	1	x	1	1	2	1	1	9	2	4
23	1	x	2	x	x	x	1	x	1	1	1	1	1	2	2	7	5	3
24	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	10	0	5
25	2	x	1	x	1	1	1	1	1	2	x	x	1	2	1	8	4	3
26	x	1	2	1	2	x	1	2	2	1	x	2	2	x	x	4	5	6
27	1	2	1	x	1	1	x	1	1	1	2	x	1	x	2	8	4	3
28	2	1	1	x	x	x	x	2	2	1	2	1	x	2	x	4	6	5
29	x	1	x	x	x	1	1	1	x	1	1	x	1	x	2	7	7	1
30	x	1	x	1	1	x	1	2	2	1	1	1	x	1	x	8	5	2
31	1	x	1	2	2	x	1	1	1	1	2	x	2	2	1	7	3	5
32	x	x	1	1	1	1	x	1	2	1	x	1	1	x	2	8	5	2
33	x	x	2	1	2	1	x	1	x	1	2	2	1	1	x	6	5	4
34	2	1	2	x	1	x	1	1	2	1	1	x	1	1	2	8	3	4
35	x	2	1	x	1	x	1	2	1	1	x	1	1	1	x	8	5	2
36	x	x	x	2	x	2	2	x	2	x	x	2	1	x	x	1	9	5
37	1	x	2	2	1	2	1	1	2	x	1	1	1	1	2	8	2	5
38	x	x	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	2	x	2	5	3	7
39	2	2	1	x	1	x	x	1	1	x	1	x	x	x	2	5	7	3
40	2	1	x	1	2	1	2	1	1	1	x	x	x	1	1	8	4	3
41	1	1	1	x	1	2	1	2	1	x	1	2	2	2	x	7	3	5
42	x	2	2	1	1	1	1	2	1	x	x	1	2	2	x	6	4	5
43	2	2	1	x	2	x	1	1	2	2	1	1	1	2	2	6	2	7
<b>TOTAL</b>																277	201	167
<b>%</b>																42,95	31,16	25,89

Any 2003-2004															1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	1	x	2
1	2	x	1	x	x	1	2	2	1	x	2	1	x	1	5	5	4
2	2	1	1	1	2	x	1	x	1	x	1	x	x	x	6	6	2
3	2	1	1	2	2	2	1	1	2	1	1	x	x	1	7	2	5
4	1	2	2	x	1	x	x	1	x	x	2	2	x	1	4	6	4
5	1	1	x	2	1	2	2	1	1	1	x	x	x	1	7	4	3
6	2	1	1	2	1	x	1	x	x	x	1	2	x	1	6	5	3
7	2	1	1	x	x	x	x	x	1	x	x	x	x	x	3	10	1
8	1	1	1	2	2	1	1	1	x	1	2	x	1	x	8	3	3
9	1	1	1	2	1	2	2	1	1	x	1	x	x	1	8	3	3
10	1	1	1	2	2	2	x	x	2	1	x	2	2	1	5	3	6
11	2	x	1	1	1	1	x	1	1	2	1	2	1	1	9	2	3
12	1	1	1	2	x	1	1	2	1	1	x	x	x	2	7	4	3
13	1	x	1	1	2	2	x	2	x	1	2	x	x	1	5	5	4
14	1	x	1	x	2	1	x	2	2	1	2	1	1	x	6	4	4
15	1	1	1	2	1	1	x	2	1	1	x	x	1	1	9	3	2
16	x	1	1	2	x	x	2	1	2	1	x	x	1	1	6	5	3
17	x	2	x	x	1	2	2	2	2	1	2	2	1	x	3	4	7
18	x	2	1	1	2	1	x	x	1	1	1	1	x	1	8	4	2
19	2	x	1	1	x	2	2	1	1	1	1	x	x	2	6	4	4
20	x	1	x	1	x	x	1	x	1	x	1	x	2	1	6	7	1
21	2	2	x	2	1	2	1	2	2	1	2	x	1	1	5	2	7
22	1	x	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1	x	7	2	5
23	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	1	2	2	2	8	0	6
24	x	1	1	1	2	1	1	x	2	x	1	1	x	2	7	4	3
25	1	2	2	2	x	x	1	1	x	1	2	1	x	x	5	5	4
26	2	2	2	2	1	1	2	2	x	1	1	x	2	x	4	3	7
27	2	1	x	2	1	1	x	x	1	1	1	1	x	1	8	4	2
28	1	x	1	2	1	2	x	1	1	2	x	2	2	1	6	3	5
29	1	2	1	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	2	10	2	2
30	x	x	x	x	2	1	2	1	1	2	1	x	1	2	5	5	4
31	1	x	2	1	x	x	1	x	x	x	1	1	1	2	6	6	2
32	x	2	1	2	2	2	1	2	x	2	x	1	2	1	4	3	7
33	x	1	2	2	2	1	1	x	2	2	2	1	x	1	5	3	6
34	2	1	1	2	x	2	1	1	x	x	x	1	2	1	6	4	4
35	1	1	1	1	1	2	1	1	1	x	x	1	1	x	10	3	1
36	x	1	x	1	1	2	1	x	1	2	2	x	2	x	5	5	4
37	1	x	1	1	1	1	2	2	2	1	1	x	1	2	8	2	4
38	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	x	2	1	x	5	2	7
39	x	x	x	x	x	1	1	1	2	2	x	1	2	x	4	7	3
40	1	x	2	1	1	1	1	x	1	2	1	1	1	1	10	2	2
41	1	2	1	1	1	x	1	1	2	1	1	x	1	x	9	3	2
42	2	x	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	x	1	6	2	6
<b>TOTAL</b>															267	161	160
<b>%</b>															45,41	27,38	27,21

Any 2004-2005																		
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	1	x	2	
1	x	x	2	1	1	1	2	x	x	1	1	2	2	1	6	4	4	
2	x	1	x	1	x	2	1	2	2	x	x	x	x	1	4	7	3	
3	x	x	2	2	1	2	x	2	1	1	1	1	x	1	6	4	4	
4	1	2	x	1	x	1	2	1	1	1	2	1	2	x	7	3	4	
5	1	1	x	1	1	1	2	x	1	1	x	x	1	x	8	5	1	
6	1	1	x	x	2	1	1	1	1	1	1	x	x	2	8	4	2	
7	1	x	1	2	2	2	x	2	x	1	2	1	2	1	5	3	6	
8	1	1	1	x	1	1	x	2	2	2	x	1	1	1	8	3	3	
9	1	1	1	1	1	2	x	1	1	2	x	x	x	1	8	4	2	
10	2	x	x	x	1	1	2	2	x	x	1	2	2	x	3	6	5	
11	1	2	1	x	x	1	2	x	1	1	x	1	1	1	8	4	2	
12	1	1	1	1	1	1	x	1	1	x	1	2	2	1	10	2	2	
13	2	1	x	1	1	2	2	x	1	2	x	2	x	x	4	5	5	
14	1	1	x	1	1	2	2	1	1	1	x	1	2	2	8	2	4	
15	x	1	x	1	1	2	1	2	1	x	1	x	x	2	6	5	3	
16	x	1	x	1	x	2	1	2	1	1	2	x	1	1	7	4	3	
17	1	x	2	1	1	2	2	x	x	x	x	2	1	1	5	5	4	
18	1	2	1	x	2	1	x	x	1	1	1	1	1	2	8	3	3	
19	x	x	x	1	1	x	1	x	1	2	2	x	1	1	6	6	2	
20	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	11	0	3	
21	2	x	x	x	2	1	1	1	2	x	x	x	1	1	5	6	3	
22	1	x	1	2	2	1	x	1	1	x	2	2	2	1	6	3	5	
23	1	2	2	x	2	1	2	1	2	x	1	1	1	1	7	2	5	
24	x	2	1	1	1	x	1	2	1	1	2	2	x	x	6	4	4	
25	1	1	x	1	1	x	2	1	x	2	x	1	x	2	6	5	3	
26	x	1	1	1	x	x	1	1	2	1	x	2	x	2	6	5	3	
27	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	10	0	4	
28	x	x	2	2	x	1	1	1	2	1	1	2	2	x	5	4	5	
29	x	1	1	x	1	1	2	1	1	x	x	2	x	2	6	5	3	
30	1	1	2	x	2	x	1	1	2	x	2	2	1	1	6	3	5	
31	x	1	1	2	1	2	x	1	1	x	1	x	x	x	6	6	2	
32	2	2	1	x	2	1	2	1	x	x	1	x	x	2	4	5	5	
33	1	2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	2	2	2	6	0	8	
34	1	x	1	x	2	1	2	1	1	x	1	1	1	1	9	3	2	
35	2	1	1	1	1	1	x	1	2	1	2	1	1	2	9	1	4	
36	x	1	x	2	x	1	2	1	x	x	1	2	x	2	4	6	4	
37	x	x	1	x	x	1	2	2	x	x	1	1	2	2	4	6	4	
38	1	1	x	x	2	x	2	1	x	1	2	x	1	x	5	6	3	
39	1	1	1	1	2	1	2	1	x	x	2	1	2	1	8	2	4	
40	1	2	x	2	x	1	2	2	1	x	2	2	1	x	4	4	6	
															<b>TOTAL</b>	258	155	147
															<b>%</b>	46,07	27,68	26,25

Any 2005-2006																1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
1	1	1	2	1	2	x	2	x	1	1	1	x	1	1	1	9	3	3
2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	x	9	1	5
3	x	1	x	1	1	x	2	2	2	1	x	1	x	2	1	6	5	4
4	x	x	x	2	1	2	2	1	1	2	x	1	1	2	1	6	4	5
5	1	x	1	2	x	2	2	2	1	x	x	1	x	2	2	4	5	6
6	1	x	x	2	x	1	2	1	2	1	x	1	1	1	x	7	5	3
7	2	2	1	2	1	2	x	2	1	1	1	2	1	2	1	7	1	7
8	1	1	2	x	2	2	x	x	1	x	1	1	2	2	2	5	4	6
9	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	x	1	2	12	1	2
10	x	x	1	1	x	x	x	x	1	x	1	1	1	1	2	7	7	1
11	x	2	1	x	2	2	x	1	x	1	2	2	x	1	1	5	5	5
12	1	2	1	x	2	2	2	x	1	1	1	x	1	1	1	8	3	4
13	x	1	2	1	1	2	x	1	2	2	x	x	x	2	2	4	5	6
14	1	x	2	2	1	1	2	x	1	1	x	1	1	1	x	8	4	3
15	2	2	2	1	2	2	2	1	x	1	1	1	x	2	x	5	3	7
16	x	1	1	1	2	2	2	x	1	x	x	2	x	2	x	4	6	5
17	1	1	2	x	1	2	x	x	x	x	1	2	x	x	2	4	7	4
18	1	1	2	1	1	1	x	2	1	1	2	1	x	x	1	9	3	3
19	x	1	1	1	2	2	x	x	x	x	x	1	2	x	2	4	7	4
20	1	1	2	1	2	x	2	1	1	x	2	1	x	x	1	7	4	4
21	1	2	2	x	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1	x	8	2	5
22	x	1	x	2	1	1	1	2	2	2	x	1	x	2	1	6	4	5
23	x	2	1	2	1	x	1	1	2	1	1	1	2	2	2	7	2	6
24	2	2	1	2	2	1	x	1	x	1	2	1	x	1	1	7	3	5
25	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	x	1	x	2	x	6	3	6
26	x	1	2	1	1	x	x	1	2	2	x	2	x	1	1	6	5	4
27	1	1	1	1	1	2	1	x	x	x	x	x	1	x	1	8	6	1
28	x	2	2	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	x	10	3	2
29	x	x	x	2	2	2	2	x	1	1	1	1	1	1	2	6	4	5
30	2	1	x	1	x	1	1	x	x	1	x	1	x	1	1	8	6	1
31	1	1	2	1	1	x	x	2	2	2	2	x	1	1	x	6	4	5
32	x	x	2	x	x	2	2	x	x	x	1	1	x	1	x	3	9	3
33	1	2	2	x	x	1	x	x	x	1	1	x	2	2	1	5	6	4
34	2	x	x	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	7	2	6
35	1	x	x	1	2	x	2	2	2	1	1	2	2	2	2	4	3	8
36	1	1	2	1	x	1	2	x	1	1	2	x	1	2	x	7	4	4
37	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	1	x	1	2	x	11	3	1
38	2	1	1	x	1	1	2	x	x	1	1	2	1	x	1	8	4	3
39	x	1	1	2	x	1	1	x	1	1	1	x	2	2	1	8	4	3
40	1	2	x	1	x	2	x	1	x	1	2	x	2	1	1	6	5	4
41	1	1	2	x	2	2	x	x	x	x	2	1	2	1	2	4	5	6
42	1	x	x	1	1	1	2	1	x	1	x	x	x	2	1	7	6	2
43	2	1	1	x	2	1	2	x	2	1	1	1	1	2	x	7	3	5
<b>TOTAL</b>																285	179	181
<b>%</b>																44,19	27,75	28,06

Any 2006-2007																1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
1	1	x	x	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	x	4	3	8
2	1	x	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	9	1	5
3	1	x	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	9	1	5
4	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	11	0	4
5	1	1	1	2	2	1	x	x	2	x	x	2	x	2	x	4	6	5
6	2	x	1	1	1	2	1	x	x	2	1	1	1	1	x	8	4	3
7	1	x	1	1	1	1	1	1	1	2	x	1	2	2	1	10	2	3
8	x	2	2	1	1	1	2	1	2	x	1	2	1	x	x	6	4	5
9	x	x	1	1	2	1	2	1	x	1	1	x	2	x	1	7	5	3
10	x	2	2	1	1	2	2	x	1	2	1	1	1	1	2	7	2	6
11	1	1	x	1	1	2	1	x	x	x	x	1	1	1	x	8	6	1
12	x	1	1	1	1	x	2	2	x	x	1	x	1	x	x	6	7	2
13	x	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1	2	10	2	3
14	x	x	x	1	2	x	1	1	2	1	2	x	x	2	2	4	6	5
15	x	x	1	x	2	x	1	1	1	x	x	1	1	2	2	6	6	3
16	2	x	1	1	x	1	2	1	1	x	x	x	x	1	1	7	6	2
17	1	1	x	2	2	2	2	2	1	1	2	1	x	2	2	5	2	8
18	2	2	x	1	1	1	x	1	2	1	1	x	1	1	x	8	4	3
19	x	x	1	1	1	2	2	1	2	1	1	x	1	x	1	8	4	3
20	1	2	2	1	1	1	2	1	x	x	1	2	1	2	2	7	2	6
21	1	1	1	x	2	x	2	x	x	x	x	1	1	1	x	6	7	2
22	x	1	1	2	1	x	1	1	1	1	1	x	1	1	2	10	3	2
23	2	1	1	2	x	2	1	x	x	x	x	2	1	1	1	6	5	4
24	1	2	1	2	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	x	9	1	5
25	1	1	x	1	x	1	1	1	2	1	1	1	2	x	1	10	3	2
26	1	x	2	x	x	1	x	x	2	x	x	2	1	1	x	4	8	3
27	x	1	1	2	1	x	2	1	1	x	1	1	x	2	1	8	4	3
28	2	1	x	1	x	1	x	x	x	x	1	x	x	2	x	4	9	2
29	x	x	1	1	2	1	1	2	2	x	2	x	x	x	1	5	6	4
30	1	1	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	x	10	1	4
31	1	x	x	x	x	2	x	1	1	1	1	2	2	2	1	6	5	4
32	1	x	2	1	1	1	1	1	x	1	1	x	2	2	1	9	3	3
33	2	1	1	1	1	x	1	1	1	x	1	2	2	x	1	9	3	3
34	x	1	x	1	1	1	1	1	1	1	2	1	x	x	1	10	4	1
35	x	1	1	2	2	x	x	1	2	x	x	1	x	x	1	5	7	3
36	1	2	2	1	1	1	x	x	1	1	2	x	2	1	2	7	3	5
37	2	x	2	2	2	2	1	1	1	x	1	1	2	1	x	6	3	6
38	2	x	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	6	1	8
39	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	7	0	8
40	2	2	1	2	x	x	1	1	x	2	x	1	1	x	x	5	6	4
41	x	2	2	2	x	1	1	x	2	1	x	1	1	1	x	6	5	4
42	2	1	2	2	x	1	2	1	x	2	2	2	2	1	2	4	2	9
<b>TOTAL</b>																296	162	172
<b>%</b>																46,98	25,71	27,30



Any 2007-2008																		
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	x	2
1	x	x	1	1	2	2	2	x	1	1	x	2	1	x	1	6	5	4
2	1	1	x	x	2	2	x	x	x	1	2	x	1	2	x	4	7	4
3	x	x	x	1	1	1	1	1	2	2	1	x	1	1	x	8	5	2
4	x	1	x	2	1	1	1	1	1	2	x	2	2	2	x	6	4	5
5	1	1	2	1	1	x	x	x	1	1	2	1	1	2	2	8	3	4
6	1	1	2	2	1	1	1	2	2	x	1	1	1	1	2	9	1	5
7	2	1	1	2	2	1	2	2	1	x	1	1	1	x	1	8	2	5
8	1	1	x	1	x	1	1	2	2	x	1	1	1	2	1	9	3	3
9	2	1	1	1	x	x	1	1	2	1	x	x	1	x	x	7	6	2
10	2	1	1	1	2	x	1	2	1	2	1	x	1	2	2	7	2	6
11	2	1	1	x	x	1	1	x	1	x	x	1	1	2	1	8	5	2
12	1	1	2	x	2	1	x	x	2	1	1	x	1	2	x	6	5	4
13	2	1	2	1	2	1	x	2	2	x	1	2	1	x	1	6	3	6
14	1	1	2	x	1	x	1	2	1	1	1	x	1	2	x	8	4	3
15	1	x	1	1	1	1	2	1	1	x	2	2	2	x	1	8	3	4
16	1	2	2	x	x	1	1	1	1	x	2	1	x	2	1	7	4	4
17	x	1	1	x	1	2	1	x	2	1	x	x	1	x	x	6	7	2
18	1	x	2	1	1	1	x	1	1	2	x	1	2	x	1	8	4	3
19	1	1	2	1	1	2	2	1	x	x	x	2	x	1	x	6	5	4
20	1	2	1	2	x	1	x	1	1	2	1	2	x	x	2	6	4	5
21	x	1	2	x	1	x	1	x	1	x	x	1	1	x	2	6	7	2
22	x	2	x	2	2	x	1	x	1	x	1	1	1	2	2	5	5	5
23	x	1	1	1	1	1	1	x	x	1	2	1	x	2	1	9	4	2
24	2	x	1	2	x	1	2	1	1	x	x	1	1	2	1	7	4	4
25	1	1	1	1	2	x	1	2	1	2	2	2	1	x	1	8	2	5
26	1	1	1	x	2	1	1	x	1	2	2	x	x	2	1	7	4	4
27	1	x	2	1	1	2	1	2	2	x	2	1	2	1	x	6	3	6
28	1	1	x	x	x	1	2	2	2	x	1	x	2	2	2	4	5	6
29	1	1	2	2	x	1	1	x	2	1	x	1	1	1	x	8	4	3
30	2	1	x	1	x	1	x	1	2	1	1	1	1	1	2	9	3	3
31	1	1	2	1	2	x	2	x	1	1	x	x	1	1	1	8	4	3
32	1	x	x	2	1	x	2	1	1	x	1	1	1	1	1	9	4	2
33	1	2	1	1	1	2	1	1	x	x	x	2	2	x	1	7	4	4
34	1	1	x	x	2	1	1	1	1	x	x	1	1	2	2	8	4	3
35	2	2	x	1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	8	1	6
36	1	1	1	1	2	x	2	1	2	1	x	x	2	x	1	7	4	4
37	1	1	2	2	x	2	2	1	x	x	x	1	x	1	1	6	5	4
38	1	x	2	x	x	2	1	2	1	1	x	1	1	x	2	6	5	4
39	2	1	2	1	1	x	2	2	2	1	2	2	x	1	1	6	2	7
40	1	2	x	1	1	1	1	1	x	2	1	2	2	1	x	8	3	4
41	1	x	1	1	x	1	2	2	1	x	1	1	2	x	1	8	4	3
42	x	1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2	1	1	7	1	7
43	x	2	1	1	2	x	2	1	x	1	2	2	x	2	2	4	4	7
44	x	x	2	2	1	1	2	1	1	2	x	x	1	2	1	6	4	5
45	2	1	x	2	1	x	1	x	2	2	1	1	x	2	1	6	4	5
46	1	1	x	x	2	1	1	x	1	x	x	x	x	2	1	6	7	2
47	2	x	x	1	1	1	1	1	x	x	2	1	2	1	1	8	4	3

<b>48</b>	2	2	1	1	1	1	x	1	1	x	2	2	1	1	x		8	3	4
																<b>TOTAL</b>	336	190	194
																<b>%</b>	46,67	26,39	26,94

Any 2008-2009																		
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	x	2
1	2	1	1	2	2	x	1	x	1	1	1	1	2	2	1	8	2	5
2	1	x	1	x	1	2	x	1	x	1	1	1	x	1	x	8	6	1
3	1	2	1	2	2	x	1	x	x	2	1	1	x	1	2	6	4	5
4	x	x	1	2	x	1	x	1	x	x	1	1	2	2	1	6	6	3
5	1	1	1	x	2	2	2	x	1	1	x	x	2	1	x	6	5	4
6	1	x	2	1	1	1	1	1	x	1	1	1	2	x	2	9	3	3
7	1	1	2	2	2	2	2	x	1	1	x	x	1	1	2	6	3	6
8	2	1	x	x	1	x	x	2	x	x	1	2	1	1	2	5	6	4
9	2	2	x	1	x	1	2	2	1	1	1	1	x	1	1	8	3	4
10	2	x	1	1	x	1	1	x	x	1	1	2	2	x	x	6	6	3
11	2	x	x	x	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	8	3	4
12	x	1	2	2	x	1	1	x	1	x	1	1	1	2	2	7	4	4
13	1	1	1	2	2	2	x	1	1	1	x	2	2	x	1	7	3	5
14	1	2	1	1	x	1	2	2	1	1	2	1	x	x	x	7	4	4
15	1	1	2	2	2	2	1	x	2	2	2	1	x	2	x	4	3	8
16	x	1	2	x	2	1	1	1	2	1	1	x	2	1	2	7	3	5
17	1	x	2	1	x	x	1	x	x	1	x	2	2	2	x	4	7	4
18	2	1	1	1	1	x	1	2	1	1	x	x	2	1	x	8	4	3
19	x	1	1	x	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	12	3	0
20	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	x	x	x	x	x	6	5	4
21	x	1	2	x	1	1	x	1	2	x	x	1	2	1	x	6	6	3
22	x	1	1	2	2	1	2	x	2	2	1	2	1	1	x	6	3	6
23	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	1	2	x	1	2	9	1	5
24	1	x	2	x	1	1	x	2	x	x	x	x	1	x	2	4	8	3
25	1	1	1	2	2	2	x	x	2	2	1	1	x	1	1	7	3	5
26	1	1	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	2	1	13	1	1
27	1	x	1	x	x	1	2	1	1	1	2	1	1	1	x	9	4	2
28	1	2	x	1	1	1	x	1	2	2	1	1	1	1	2	9	2	4
29	1	x	1	1	x	2	1	2	1	1	2	x	x	x	1	7	5	3
30	x	2	2	1	x	1	2	x	2	1	2	1	1	x	2	5	4	6
31	1	1	1	1	2	1	2	1	x	1	2	2	1	2	1	9	1	5
32	1	x	1	1	2	1	1	x	1	x	1	x	1	2	x	8	5	2
33	1	2	x	x	1	2	2	1	1	2	1	2	x	2	1	6	3	6
34	1	1	2	x	2	1	1	1	1	x	x	1	1	2	x	8	4	3
35	x	1	x	x	2	x	2	2	x	1	1	1	1	x	x	5	7	3
36	2	x	x	1	2	1	1	1	1	1	2	2	x	x	x	6	5	4
37	2	2	1	2	2	x	2	x	2	2	1	1	x	1	1	5	3	7
38	2	2	1	1	1	x	2	1	1	x	x	1	1	1	x	8	4	3
39	x	1	2	2	1	x	x	1	1	1	x	2	x	x	x	5	7	3
40	1	1	1	1	1	1	1	x	1	x	1	1	2	2	2	10	2	3
41	1	x	1	2	x	2	x	2	1	2	1	x	x	2	2	4	5	6
42	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	x	1	1	11	1	3
43	1	2	2	2	1	2	1	x	2	2	1	1	x	1	1	7	2	6

44	2	1	1	2	1	1	x	2	2	1	1	x	1	1	2	8	2	5
45	2	2	x	x	1	2	1	1	1	x	1	2	1	1	1	8	3	4
46	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	1	1	1	x	2	9	1	5
47	x	2	2	x	x	1	1	1	1	x	1	1	2	x	2	6	5	4
48	2	1	2	1	1	2	x	2	1	2	x	x	x	2	2	4	4	7
49	1	x	1	1	x	1	1	1	1	2	1	2	2	x	2	8	3	4
50	1	1	x	x	1	1	1	1	1	1	1	x	1	2	1	11	3	1
51	1	2	2	1	1	2	2	2	2	x	x	1	2	1	x	5	3	7
52	2	1	x	2	x	1	x	1	1	1	x	1	x	2	1	7	5	3
53	2	x	1	1	1	2	x	1	1	1	2	x	1	2	2	7	3	5
54	2	x	1	2	1	1	2	1	x	1	1	1	1	x	x	8	4	3
55	1	x	2	2	1	2	1	x	x	1	2	x	x	2	1	5	5	5
<b>TOTAL</b>																391	210	224
<b>%</b>																47,39	25,45	27,15

Any 2009-2010																		
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	x	2
1	1	1	1	x	1	x	1	2	1	2	x	2	1	x	1	8	4	3
2	1	x	2	x	x	x	x	x	1	x	x	1	1	1	1	6	8	1
3	1	2	2	x	x	1	2	1	x	1	x	1	1	2	x	6	5	4
4	2	2	x	1	1	2	1	2	x	x	x	x	1	x	1	5	6	4
5	x	2	2	2	1	x	1	2	1	1	1	x	1	2	x	6	4	5
6	2	1	1	2	2	x	1	1	2	2	1	1	2	1	1	8	1	6
7	1	2	2	1	1	2	1	x	2	2	2	1	2	1	x	6	2	7
8	x	1	1	2	1	1	1	x	2	1	x	1	2	x	x	7	5	3
9	1	2	1	x	2	1	x	1	1	2	1	2	1	1	x	8	3	4
10	x	x	2	x	1	1	1	2	1	x	1	1	x	1	1	8	5	2
11	2	1	1	1	x	1	x	x	1	x	2	2	x	1	1	7	5	3
12	2	1	1	2	2	x	1	1	1	2	1	1	1	1	x	9	2	4
13	1	1	1	1	2	1	1	x	2	x	x	1	x	1	x	8	5	2
14	2	2	2	x	2	x	1	1	2	2	1	1	2	x	2	4	3	8
15	1	1	x	x	1	x	x	1	2	x	1	x	2	2	1	6	6	3
16	1	2	2	2	2	1	1	1	1	x	2	2	1	1	x	7	2	6
17	1	2	x	x	1	1	x	1	2	2	1	1	1	1	1	9	3	3
18	x	2	2	1	2	x	1	x	x	2	x	x	1	1	x	4	7	4
19	x	1	x	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	x	2	8	3	4
20	1	1	1	1	x	x	2	1	2	x	x	1	1	x	x	7	6	2
21	1	1	1	x	2	1	x	2	x	1	1	2	2	x	1	7	4	4
22	2	1	x	2	1	1	1	2	x	x	x	1	1	1	x	7	5	3
23	2	1	1	2	1	x	1	2	1	1	1	1	x	x	2	8	3	4
24	x	x	1	1	1	2	2	x	2	x	1	1	1	1	1	8	4	3
25	2	2	1	x	1	1	2	2	2	x	1	1	2	1	1	7	2	6
26	x	1	1	2	2	2	1	1	x	x	1	1	1	x	2	7	4	4
27	2	2	2	x	2	x	2	2	1	1	2	1	1	1	2	5	2	8
28	x	2	1	2	1	1	x	2	2	x	2	x	1	x	2	4	5	6
29	1	1	2	2	1	2	2	2	x	1	2	x	1	1	2	6	2	7
30	1	2	x	1	1	1	1	1	2	1	1	x	x	1	x	9	4	2
31	x	1	1	x	1	1	x	x	1	x	x	2	x	2	1	6	7	2
32	1	2	2	2	x	2	1	1	1	1	2	1	1	2	x	7	2	6

33	1	1	x	1	x	1	x	1	1	1	x	x	1	2	1	9	5	1
34	1	2	1	x	1	2	x	1	1	x	1	2	1	x	2	7	4	4
35	1	1	2	2	1	x	2	x	2	2	x	2	2	x	2	3	4	8
36	x	1	1	1	1	1	1	1	1	2	x	x	x	2	x	8	5	2
37	1	2	1	1	1	x	x	1	2	1	1	1	1	x	x	9	4	2
38	1	1	1	1	x	x	2	1	x	1	x	1	1	1	2	9	4	2
39	1	1	1	1	x	2	1	1	1	2	x	x	x	1	2	8	4	3
40	x	2	x	1	1	2	x	1	1	x	1	2	2	1	1	7	4	4
41	x	1	2	x	2	1	2	2	1	x	x	1	2	x	1	5	5	5
42	2	1	1	1	1	x	x	x	x	1	1	x	x	1	x	7	7	1
43	1	1	x	2	1	1	x	1	1	x	2	2	2	2	x	6	4	5
44	1	1	2	1	x	1	2	2	1	1	1	x	1	1	1	10	2	3
45	x	x	x	2	1	x	1	1	1	1	1	1	1	2	1	9	4	2
46	x	1	x	2	1	1	2	1	1	2	1	2	2	2	1	7	2	6
47	1	2	x	x	1	2	1	x	1	1	x	1	2	1	1	8	4	3
48	2	x	1	2	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	2	10	2	3
49	1	2	1	2	1	1	2	1	x	x	1	1	2	1	x	8	3	4
50	x	1	1	1	x	x	x	x	1	x	2	x	1	x	1	6	8	1
51	2	1	1	1	2	1	2	x	x	1	1	x	2	1	2	7	3	5
52	x	x	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	x	x	1	6	4	5
53	x	1	1	1	1	1	1	2	x	2	x	1	1	2	2	8	3	4
54	1	x	1	2	x	1	1	1	1	1	x	x	1	1	1	10	4	1
55	2	1	1	2	1	x	x	1	x	x	1	2	x	1	1	7	5	3
56	x	1	2	x	1	2	1	1	1	1	1	2	x	1	1	9	3	3
57	1	2	1	2	x	1	2	1	1	1	2	1	2	1	1	9	1	5
58	2	x	1	1	2	1	x	2	1	2	1	x	1	1	2	7	3	5
59	1	x	2	1	2	1	x	1	1	1	x	1	1	1	1	10	3	2
60	1	x	2	x	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	9	2	4
61	1	x	2	2	1	2	1	x	x	1	2	x	x	2	1	3	3	9
<b>TOTAL</b>																439	238	238
<b>%</b>																47,98	26,01	26,01

Any 2010-2011																1	x	2
Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	x	2
1	1	2	2	x	2	1	1	x	x	2	x	1	x	1	2	5	5	5
2	2	1	2	2	2	1	x	1	1	2	2	2	x	2	2	4	2	9
3	1	1	1	2	1	1	x	2	x	x	2	1	1	1	1	9	3	3
4	1	2	1	2	x	1	1	x	1	1	1	1	1	2	2	9	2	4
5	x	x	1	1	x	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	9	3	3
6	x	2	2	1	x	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	6	2	7
7	1	1	x	x	2	1	2	1	1	1	x	1	x	2	x	7	5	3
8	2	1	1	2	2	2	x	1	1	2	1	x	1	x	2	6	3	6
9	2	1	1	2	x	2	2	1	1	2	1	1	x	2	2	6	2	7
10	x	2	x	1	1	x	1	x	1	x	2	1	1	x	1	8	6	1
11	x	1	x	2	1	1	2	x	x	1	1	x	2	2	x	5	6	4
12	2	1	2	2	1	x	2	x	2	1	x	1	1	2	x	5	4	6
13	1	1	1	x	1	2	x	1	2	x	x	x	1	1	1	8	5	2
14	2	1	1	1	1	1	1	x	1	1	x	1	x	1	1	11	3	1
15	2	2	1	1	1	x	1	1	1	x	1	1	2	1	1	10	2	3

16	x	2	2	2	x	2	x	2	2	1	2	x	2	x	1	2	5	8
17	x	1	1	x	2	1	2	1	1	x	1	1	x	1	x	8	5	2
18	1	2	x	1	2	x	2	2	1	2	1	x	2	1	1	6	3	6
19	1	2	1	x	1	1	1	1	2	2	1	1	x	1	1	10	2	3
20	1	1	1	1	1	x	x	x	2	1	1	1	1	1	x	10	4	1
21	1	1	1	2	1	1	x	1	x	1	1	1	1	x	2	10	3	2
22	2	x	2	1	1	2	1	1	1	x	1	1	1	x	x	8	4	3
23	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	10	0	5
24	2	2	1	1	2	2	1	1	1	x	2	x	1	x	1	7	3	5
25	1	x	2	2	1	x	2	1	x	1	x	x	2	2	1	5	5	5
26	1	x	1	2	1	1	1	1	1	2	x	2	x	1	1	9	3	3
27	x	1	2	x	x	1	1	1	x	2	1	2	1	1	1	8	4	3
28	1	2	2	x	1	1	x	1	2	1	1	2	2	x	1	7	3	5
29	x	1	x	1	2	1	x	1	1	1	2	1	1	x	x	8	5	2
30	1	2	1	x	2	2	x	2	x	x	2	1	1	x	2	4	5	6
31	x	x	x	1	1	1	1	x	x	x	1	1	1	x	2	7	7	1
32	1	2	1	1	1	1	2	x	1	1	x	1	x	2	2	8	3	4
33	1	x	1	2	2	1	x	x	2	x	1	2	1	1	2	6	4	5
34	1	1	x	1	2	2	x	x	1	x	1	1	2	2	2	6	4	5
35	x	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	x	1	1	10	2	3
36	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	x	x	1	2	1	11	2	2
37	2	2	2	2	x	1	2	1	1	2	1	x	1	x	x	5	4	6
38	1	1	1	x	1	2	1	1	x	1	1	2	2	2	x	8	3	4
39	1	x	2	1	1	x	1	2	1	x	1	2	1	2	1	8	3	4
40	2	x	2	1	x	2	1	2	1	x	x	1	2	x	2	4	5	6
41	1	x	1	2	x	x	1	1	1	1	x	x	x	1	2	7	6	2
42	2	x	x	2	x	1	x	1	1	1	1	1	x	2	1	7	5	3
43	2	x	x	x	x	1	x	1	1	1	2	1	1	1	2	7	5	3
44	2	1	1	x	1	x	1	x	2	1	2	1	x	x	x	6	6	3
45	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	9	0	6
46	1	x	x	x	x	1	1	1	x	1	x	x	2	1	2	6	7	2
47	1	1	2	1	2	2	1	1	2	x	x	1	1	2	2	7	2	6
48	1	1	1	1	1	x	2	2	1	1	1	x	2	x	1	9	3	3
49	1	2	2	2	2	2	2	2	1	x	1	x	x	1	1	5	3	7
50	x	1	1	2	1	1	x	x	x	1	2	2	2	x	1	6	5	4
51	1	1	2	2	1	x	1	1	1	1	1	1	2	x	x	9	3	3
52	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	x	1	1	1	11	1	3
53	1	2	2	1	1	1	x	2	1	1	1	2	2	1	1	9	1	5
54	x	1	2	1	1	1	x	2	2	x	x	1	2	2	2	5	4	6
55	x	1	1	1	x	x	1	1	x	1	1	1	1	2	1	10	4	1
56	1	2	1	1	1	x	x	x	1	1	1	1	1	x	1	10	4	1
57	1	1	x	2	2	2	2	x	2	1	1	x	1	x	2	5	4	6
58	x	1	x	1	1	x	1	1	1	2	2	1	1	x	1	9	4	2
59	x	1	1	1	x	1	x	2	1	1	1	x	1	2	1	9	4	2
<b>TOTAL</b>																439	215	231
<b>%</b>																49,6	24,29	26,10

**ANNEX 5: TAULA DEL RECOMPTE D'UNS DE LES QUINIELES DE L'ANY 2001 AL 2010**

	Jornades											TOTAL	
	2001-02	2002-03	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07	2007-08	2008-09	2009-10	2010-11			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	2	2	1	1	0	0	0	0	2	0	0	8
4	8	5	4	6	7	6	3	5	3	3	3	3	50
5	5	4	9	5	4	4	1	7	3	3	3	8	50
6	10	8	10	12	8	9	15	11	10	10	9	9	102
7	5	9	5	3	10	6	8	9	16	16	8	8	79
8	7	9	6	8	7	5	16	12	13	13	9	9	92
9	4	3	3	2	3	5	5	6	10	10	10	10	51
10	4	2	3	2	1	6	0	1	4	4	8	8	31
11	0	0	0	1	1	1	0	2	0	0	3	3	8
12	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2
13	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

**ANNEX 6: CD AMB EL SIMULADOR I EL TREBALL (VERSIÓ PDF)**