Problemes de la primera fase

Vuitè de Primària i Segon d'ESO

Any 1997

PROBLEMA 1. Quins números es poden expressar com a suma de dos o més números consecutius?

PROBLEMA 2. Un noi ha pelat 2 Kg. de patates totes de la mateixa forma i mida en 20 min. Ara ha de pelar també 2 Kg. de patates totes de la mateixa forma que les anteriors però ara la mida és el doble que les anteriors, quant trigarà a pelar-les?

PROBLEMA 3. Disposem de dos quadrats iguals de 2 m. de costat. Un dels quadrats és fix i l'altre té un vèrtex fix al centre del primer quadrat i pot oscil lar al voltant d'aquest vèrtex. Estudia el valor de l'àrea comuna als dos quadrats en canviar de posició.

PROBLEMA 4. Per acabar et proposem un joc. Per jugar-hi necessitaràs un company i una pila amb vint pedres. Les regles per jugar són senzilles: cada jugador en el seu torn pot agafar 1 o 2 pedres. Guanya el jugador que agafa l'última pedra (que evidentment pot anar acompanyada). Apa, a jugar!

1. Ets capaç de veure una manera de jugar que si tu ets el primer a treure pedres estiguis segur de guanyar?
2. Què passa si a la pila, en començar hi ha vint-i-una pedres? I si n'hi ha vint-i- dues? I si en general n'hi ha un nombre qualsevol?
3. Què passa si canviem les regles i ara en lloc de poder-ne agafar només 1 o 2, se'n poden agafar 1, 2 o 3? I en general, si se'n poden agafar 1, 2, 3, ... fins a una quantitat fixa?
4. Què passa si canviem les regles i ara en lloc de guanyar qui agafa l'última, diem que perd qui agafa l'última?
5. Podries explicar tot el que has vist?

Any 1998

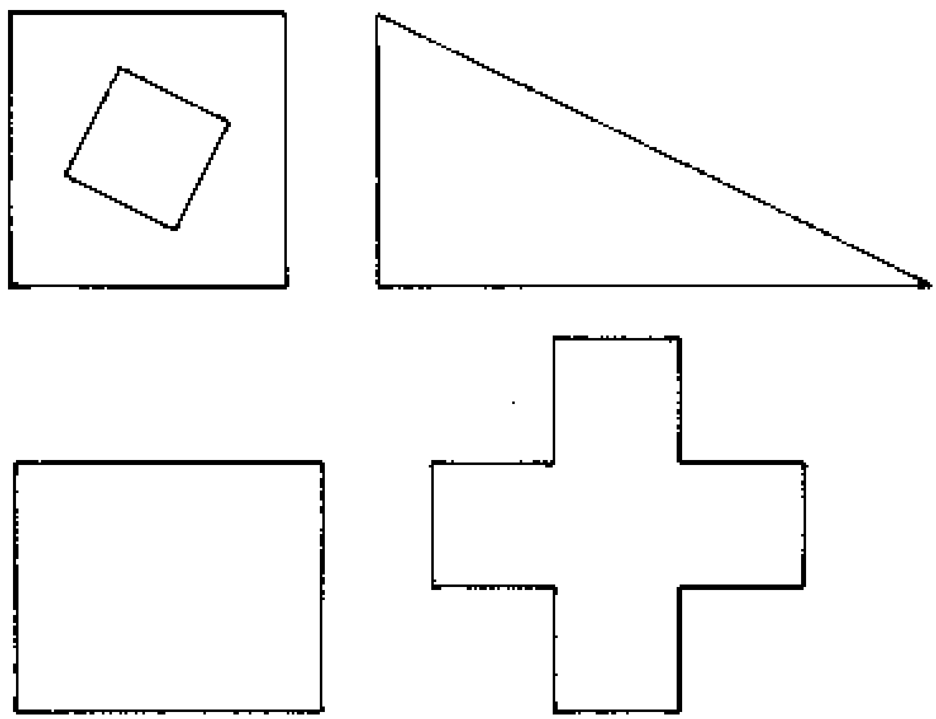
PROBLEMA 1. Hem triat sis xifres 1, 3, 4, 7, 8, 9, i amb elles volem formar dos nombres que tinguin tres xifres cadascun, sense repetir cap xifra. Com haurem de formar aquests dos nombres si volem que tant la seva suma com el seu producte siguin el més gran possible? I si volem que siguin el menor possible? Sabries trobar un mètode que ens permeti trobar els dos nombres a partir de sis xifres qualssevol sense haver de fer cap operació?

PROBLEMA 2. Agafeu un full de paper de forma quadrada i doblegueu cada vèrtex de manera que obtingueu un sobre (sense que es sobreposin cap de les parts doblegades). Amb un full rectangular no és possible obtenir un sobre i en canvi amb un en forma de rombe, sí. Investigueu amb quins quadrilàters és possible obtenir un sobre rectangular. Sabríeu explicar per què?

PROBLEMA 3. En Roger s'ha comprat un pis amb quatre habitacions iguals i les vol pintar. Per fer-ho l'han vingut a ajudar dos amics, en Pau i la Bruna. La primera habitació la pinten en Roger i en Pau en 4 hores; la segona la pinten en Roger i la Bruna en 3 hores i la tercera en Pau i la Bruna en 2 hores. Quant temps trigarà en Roger per pintar tot sol la quarta habitació?

Any 1999

PROBLEMA 1. Aquestes quatre figures estan formades per les mateixes cinc peces. Una de les cinc peces és el quadrat de dins de la primera figura. ¿Podries tallar cada una de les figures en aquestes cinc peces?



PROBLEMA 2. Aconsegueix el 100 amb els nombres del 0 al 9 i fent servir les operacions que coneixes. De quantes maneres diferents pots fer-ho?

PROBLEMA 3. Tres mariners i un mico vivien en una illa. Una tarda, els mariners van recollir tots el cocos que van poder. Esgotats, decidiren esperar al dia següent per repartir-se'ls. Però de nit, un dels mariners es va despertar i va dividir els cocos en tres piles iguals i veient que li sobrava un al fer la repartició, el va regalar al mico. Va amagar la seva part i va ajuntar les dues piles que quedaven. Una estona mes tard, un altre mariner es va despertar i va repartir els cocos en tres piles iguals i, al sobrar-li un, el va donar al mico. Va guardar la seva pila a part i la va amagar, després va ajuntar les altres dues piles i se'n va tornar a dormir. El tercer mariner també es va llevar i va fer el mateix que els seus companys. L'endemà els mariners varen repartir-se els cocos a parts iguals i els va sobrar un coco, que el van donar al mico.

Quants cocos van tocar finalment a cada mariner?

Quants cocos havien recollit inicialment el dia anterior?

Any 2000

PROBLEMA 1. Us proposem que trobeu una manera per saber quin dia de la setmana correspon a una data (entre el 1900 i el 2100). Per això, podeu utilitzar un calendari del 2000 i seguir el següent guió:

a. Sabent el dia de la setmana que celebres el teu aniversari l'any 2000, troba quin dia de la setmana vas néixer.
b. El que escriu aquest problema va néixer el 4-05-1953. Quin dia de la setmana era?
c. Determineu quin dia de la setmana caurà l'1 de gener de tots els anys, des del 1900 fins el 2100, i construïu una taula, de la manera més senzilla possible, amb aquests resultats. Quines regularitats hi observeu?
d. Expliqueu com utilitzaríeu la taula que heu construït a l'apartat anterior per saber quin dia de la setmana correspon a una data qualsevol entre el 1900 i el 2100.
e. Si un ordinador creu que l'1 de gener del 2000, que serà un dissabte, és l'1 de gener del 1900, quin dia de la setmana ens dirà que és? Si no es corregeix l'error, què passarà el dia 29 de febrer del 2000? Si aquest ordinador ens diu el dia de la setmana que correspon a una data determinada, com ho farem per saber en realitat quin dia de la setmana serà?

PROBLEMA 2. Us proposem que agafeu un pot de pintura, que us fixeu en les seves indicacions i les anoteu, en especial el seu volum i el seu rendiment, i que tenint en compte aquestes dades calculeu les dimensions del pot que contingués exactament la pintura necessària per pintar-se 100 vegades a si mateix, per fora, amb tapa inclosa, i sense revolts ni regalims.

¿Quines haurien de ser les dimensions del pot que contingués la pintura necessària per pintar dos-cents, tres-cents,... pots com ell mateix, en les mateixes condicions d'abans?

PROBLEMA 3. Amb 12 escuradents tots iguals es poden formar moltes figures utilitzant-los tots cada vegada i sense que en sobri cap.

a. Forma un quadrat, després dos, i segueix fins a formar el major nombre de quadrats possible. Podeu donar més d'una solució?
b. Fes el mateix amb triangles equilàters i amb triangles rectangles.
c. Ara prenem com a unitat de superfície un quadrat que tingui de costat un escuradents; es tracta de formar figures que tinguin superfícies diferents, però que s'expressin amb un nombre enter (per exemple, superfície 1, 2, 3,...). Quins valors podeu obtenir? Podeu donar més d'una solució?

Any 2001

PROBLEMA 1. Ens donen dues tires de cartolina de la mateixa amplada, una de 20 cm i l'altra de 15 cm de llargada i tenim una tercera tira que podem tallar-la a la distància que ens convingui. Amb les tres tires, formem diferents triangles.

a. Com ho fareu per aconseguir que l'àrea del triangle format sigui la més gran possible? Expliqueu la vostra resposta.
b. Quin serà el perímetre del triangle anterior?

PROBLEMA 2. Com deveu saber, l'1 de gener de 2002 es produirà el canvi de moneda a tots els efectes i desapareixeran les Pessetes per deixar pas als Euros. Per això, l'1 de gener de 1999 es va fixar el canvi de l'Euro amb les diferents monedes que participen en la seva creació. D'acord amb aquest canvi, 1 Euro equival a:

- 166.386 Pessetes
- 1.95583 Marcs alemanys
- 6.55957 Francs francesos
- Lires italianes
- Francs belgues
- 2.20371 Florins holandesos
- Escuts portuguesos
- 0.787564 Lliures irlandeses
- 5.94573 Marcs finesos

a. Si us donen una quantitat en Euros i tens una calculadora, és senzill passar-la a Pessetes. Però, si ho heu de fer mentalment (de manera aproximada), resulta una mica més complicat. Sabríeu trobar una manera de fer-ho? Explica com ho faríeu i apliqueu-la per passar 9 Euros, 750 Euros i 4000 Euros, a Pessetes.
b. Utilitzant la taula de canvis anterior i una calculadora, sabríeu dir quantes Pessetes equivalen a 1 Marc alemany? Expliqueu quines operacions cal fer.
c. Quina és la moneda de més valor i la de menys valor entre les que participen a l'Euro? Per què?

PROBLEMA 3. Si observeu la darrera xifra d'algunes potències de 3 amb l'ajuda de la calculadora, podreu deduir quina és la darrera xifra de qualsevol potència de tres, per gran que sigui l'exponent.

a. Quina és la darrera xifra de 3^{20}. I la de 3^{55} ?
b. Hi ha alguna regla que us permeti saber la darrera xifra de qualsevol potència de 3? I la de qualsevol potència de 7 ?
c. Quina és la darrera xifra de 7^{70}.

Any 2002

PROBLEMA 1. Com molt bé podeu comprovar,

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

i no és "massa difícil" observar que "acaba" en dos zeros.

Tanmateix, el resultat de

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot ... \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ja no és tan fàcil de calcular. No us espanteu, només us demanem que esbrineu i argumenteu amb quants zeros "acabarà".

Exploreu també què passa amb altres nombres com el 200, el 500, el 1000, ... i treieu-ne alguna conclusió.

PROBLEMA 2. Tenim un pot cilíndric de 10 cm de diàmetre de la base i 10 cm d'altura. Tenim també un cordill de 30 cm de longitud; creieu que és suficientment llarg per tal que des d'un punt de la circumferència de la tapa pugui donar un tomb sencer al pot (i de manera "uniforme") i arribi al seu punt corresponent (projecció) de la circumferència de l'altra tapa?

Quina és la longitud mínima perquè això pugui passar? I quina és la longitud mínima per aconseguir envoltar-lo des d'un punt a l'altre donant abans dos tombs (de manera uniforme) al pot?

Exploreu aquesta situació establint relacions entre la longitud del fil i el nombre de tombs. Exploreu també què passaria amb pots que tinguessin formes diferents a la del cilindre.

PROBLEMA 3. Cada vegada que visitem el monestir de Poblet ens donen aleatòriament un sobre que conté una lletra de la paraula P-O-B-L-E-T; així, al cap de 6 vegades de visitar-lo hem pogut tenir la grandíssima sort d'haver acumulat exactament les 6 lletres diferents, però també pot haver passat que haguem acumulat 6 lletres L,… o moltes possibilitats més. El cas és que quan aconsegueixes reunir com a mínim les 6 lletres (P, O, B, L, E, T) et regalen una entrada gratuïta vitalícia als tres monestirs de la Ruta del Císter.

Quantes visites creieu que és "*convenient*" fer a Poblet per tal de poder reunir les 6 lletres? Estudieu a fons aquesta situació.

Any 2003

PROBLEMA 1. Coneixeu l'anècdota de l'expressió "eureka!" que va cridar Arquimedes quan va resoldre un problema? Tot seguit podeu fer d'Arquimedes. Diu la tradició que el rei Hieró II de Siracusa va encarregar a un joier que li fes una corona i va ordenar que li donessin les quantitats d'or i plata necessàries. Quan li van lliurar la corona va ordenar que la pesessin i va resultar que pesava el mateix que la quantitat total de plata i or subministrats, però el rei no es fiava del joier, perquè es pensava que s'havia quedat part de l'or per a ell i l'havia substituït per plata. Llavors va fer cridar Arquimedes i li va proposar de trobar quina era la composició de la corona, sense fer-la malbé. Arquimedes ho va resoldre (mentre era a la banyera, i va ser llavors que va cridar el cèlebre "eureka!") sabent que l'or pur perd en l'aigua 1/20 del seu pes, mentre que la plata en perd 1/10.

Resol el problema pel cas que hi haguessin 8 kg d'or i 2 kg de plata i que la corona en l'aigua pesés 9,25 kg

PROBLEMA 2. Els egipcis tenien una manera de multiplicar molt enginyosa, coneguda també com "el mètode del camperol rus". Quan havien de multiplicar dos nombres, com per exemple 365 per 18, ho feien de la manera que s'explica tot seguit:

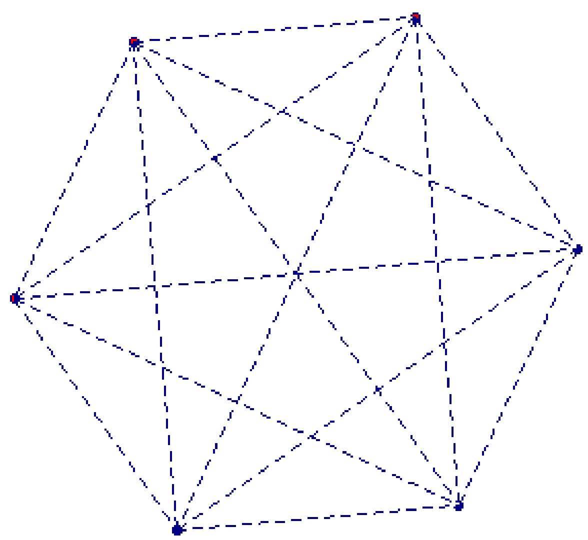
365	18
730	9
1460	4
2920	2
5840	1
670	

Disposaven els dos nombres com a capçaleres de dues columnes que anaven formant així: a sota del nombre més gran hi posaven el doble (per exemple a sota del 365 el seu doble, 730), mentre que a la columna encapçalada pel nombre petit anaven posant la meitat del nombre de sobre si aquest era parell (a sota del 18 el 9) i si era senar hi posaven la meitat per defecte (a sota del 9 el 4). Quan en aquesta columna arribaven a 1, paraven de posar nombres a les columnes i ratllaven totes les files en què els nombres de la dreta eren nombres parells (en el nostre exemple les files 365 18, 1460 4 i 2920 2) i els nombres que quedaven sense ratllar de la columna de l'esquerra els sumaven (en el nostre exemple 730+5840=6570) i aquest és el resultat de la multiplicació.

- Escriu altres exemples i comprova que aquest mètode realment funciona.
- Com hauria de ser el nombre petit per què no calgués fer cap suma?
- Sabries dir per què funciona aquest mètode?

PROBLEMA 3. En Jordi i la Loubna juguen al joc següent: en un paper hi marquen sis punts que més o menys formen un hexàgon regular i agafen dos llapis de diferent color un per cada un. En cada tirada un dels jugadors ha d'unir dos dels sis punts amb el llapis del seu color. Perd el primer que forma un triangle amb els tres costats del seu color, que tindrà els tres vèrtexs sobre l'hexàgon.

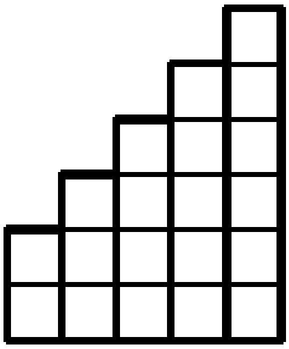
- Sabries justificar que en aquest joc no hi pot haver empat? (un dels dos jugadors ha de perdre per força, perquè quan s'hagin format tots els segments possibles segur que hi haurà un triangle amb tots els costats del mateix color)
- Sabries trobar un desenvolupament del joc en què durant les primeres 14 jugades no es formés cap triangle amb els tres costats del mateix color i a la quinzena (la darrera possible) es formessin dos triangles del mateix color?



Any 2004

PROBLEMA 1
Nombres escala

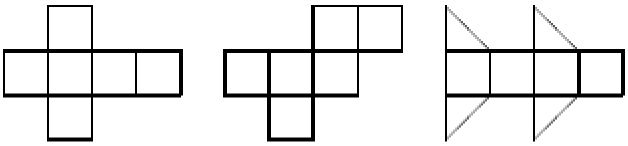
Hi ha nombres, com el 6 o el 7, que s'anomenen nombres escala perquè es poden posar com a suma de nombres consecutius: 6 = 1 + 2 + 3 i 7 = 3 + 4. El nombre 20 També és un nombre escala, com es pot veure en el dibuix.



A més, hi ha nombres que es poden posar com escales diferents. Per exemple, el nombre 15:
15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6.
Estudieu els nombres de l'u al vint. Quins d'ells són nombres escala?
Podeu trobar totes les maneres que teniu d'escriure'ls en escala?
Sabríeu donar un criteri que us permeti saber si un nombre és o no escala (encara que sigui més gran de vint)?

PROBLEMA 2
Despleguem un cub

Volem tallar amb tisores un cub de cartolina, de manera que ens quedi el seu desenvolupament pla. Evidentment, hi ha moltes maneres de fer-ho, com les tres que us mostrem a continuació.



El problema és que el costat tallat amb tisores es veu rugós i no queda bonic. Per això volem desplegar el cub de manera que el tall de tisores sigui el més curt possible.
Construïu-vos tres cubs iguals amb cartolina i talleu-los per obtenir els tres desenvolupaments del dibuix. Mesureu la longitud del tall que heu hagut de fer en cada cas amb les tisores. En quin cub el tall era el més curt?
Mesureu el perímetre dels desenvolupaments plans que us han quedat. Quin era el més curt? Quina relació hi ha entre el perímetre del desenvolupament pla i la longitud del tall de tisores?

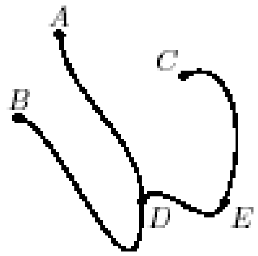
Torneu ara a la pregunta que ens plantejàvem: com podem desplegar un cub de cartolina de manera que la longitud del tall de tisores sigui la mínima possible? Feu el dibuix del desenvolupament pla que us quedi.

PROBLEMA 3

El joc dels punts i les línies

Us proposem que jugueu a un joc matemàtic per a dos jugadors. Es tracta de dibuixar alguns punts sobre un paper (els que vulgueu). Cada jugador ha d'unir amb una línia (pot ser recta o corba) dos punts qualssevol i dibuixar un altre punt sobre la línia que acaba de fer. La condició és que cap línia no pot passar per sobre d'una altra ni de cap més punt fora dels dos dels extrems. Tampoc no està permès que d'un punt surtin més de tres línies. Perd el jugador que no pot dibuixar cap més línia.

En el dibuix teniu un exemple d'una partida que està a mitges.



Hem començat amb els punts *A*, *B* i *C*. El primer jugador ha unit *A* i *B* i ha afegit el punt *D*. El segon jugador ha unit els punts *C* i *D* i ha afegit el punt *E*. Ara el punt *D* ja no es pot tornar a fer servir, perquè ja té tres línies que en surten. S´ý que podem jugar encara amb els punts *A*, *B*, *C* i *E*.

Quantes tirades podeu fer si només comenceu amb un punt? I si comenceu amb dos punts, quin és el nombre màxim de tirades que podeu fer?
I el mínim?

Què passa si comenceu amb tres punts? Quants moviments durarà, com a màxim, una partida? I com a mínim?

Quin és el nombre màxim i mínim de tirades en una partida que comença **amb quatre punts? I amb cinc? I amb *n* punts?**

Any 2005

PROBLEMA1.

En un jardí quadrat de 30 m de costat hi ha plantats dos arbres, que anomenarem A i B, exactament en dos vèrtexs contigus del quadrat. Ara, volem plantar altres arbres en aquest jardí amb les condicions següents:

- Tots els arbres nous han d'estar a la mateixa distància de l'arbre A que de l'arbre B.
- La distància dels nous arbres als arbres A i B ha de ser un nombre enter de metres.

a) Quin és el nombre màxim d'arbres que podrem plantar? Creieu que un arbre nou, és a dir dels que hem plantat, està situat a la mateixa distància dels dos arbres nous que té més a prop?

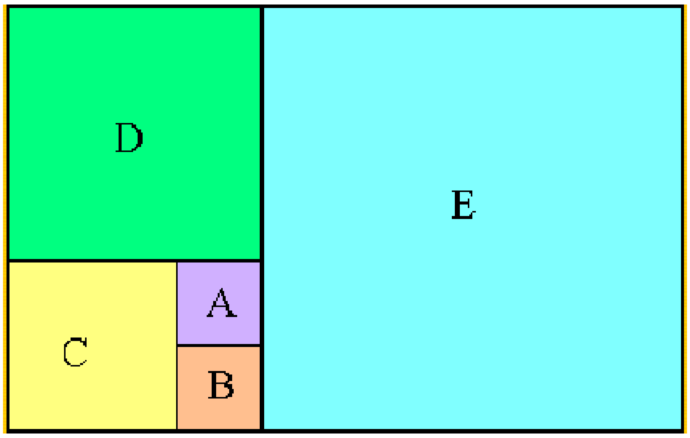
b) Si per prendre mides disposem d'una corda llarga que té un nus a cada metre, com trobaríem la posició exacta on hem de plantar cada arbre?

c) Considereu ara tots els triangles formats pels dos arbres inicials, A i B, i cadascun del arbres plantats de nou. Quants d'aquests triangles són obtusangles?

És possible que algun d'aquests triangles sigui rectangle? Per què?

PROBLEMA 2.

La figura mostra un rectangle que està format per 5 quadrats. Ho hem fet dibuixant primer el quadrat A i després, a baix el B, a l'esquerra el C, a sobre el D i a la dreta l'E.



a) Suposant que l'àrea de tot el rectangle és de 40 cm^2, calcula l'àrea de cadascun dels quadrats petits.

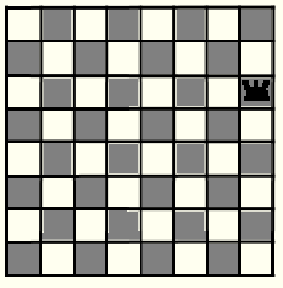
b) Quina seria l'àrea de tot el rectangle, si el quadrat A tingués el costat igual a 2?

c) Quin seria el costat del primer quadrat si l'àrea del rectangle fos 16000?

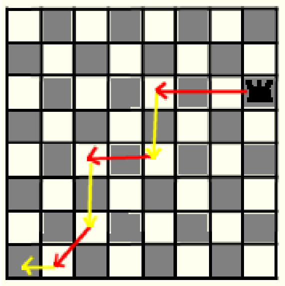
d) La figura donada es pot continuar afegint cada vegada un quadrat de més, primer a baix, que tingui com a costat el que ara és la base del rectangle; després a l'esquerra, que tingui com a costat el que llavors seria l'altura del rectangle; i continuant amb altres quadrats a dalt, a la dreta i així successivament. Escriu les longituds dels costats dels quadrats de la figura de l'enunciat de més petit a més gran i digues quines serien les longituds dels costats dels cinc quadrats següents.

e) Quina seria la longitud del costat del vuitè quadrat si la del primer fos 3?

PROBLEMA 3.
Sobre un tauler d'escacs es situa una reina en una casella qualsevol de la primera fila (fila superior) o de l'última columna (columna de la dreta) excepte en les caselles dels vèrtexs.



Al seu torn, cadascun dels dos jugadors va movent la reina tantes caselles com vulgui, horitzontalment (cap a l'esquerra), verticalment (cap avall), o en diagonal (cap a l'esquerra i cap avall). El jugador que aconsegueixi situar la reina en la casella inferior esquerra del tauler és el guanyador de la partida.
Vegeu un exemple de partida en què guanya el segon jugador (el groc)



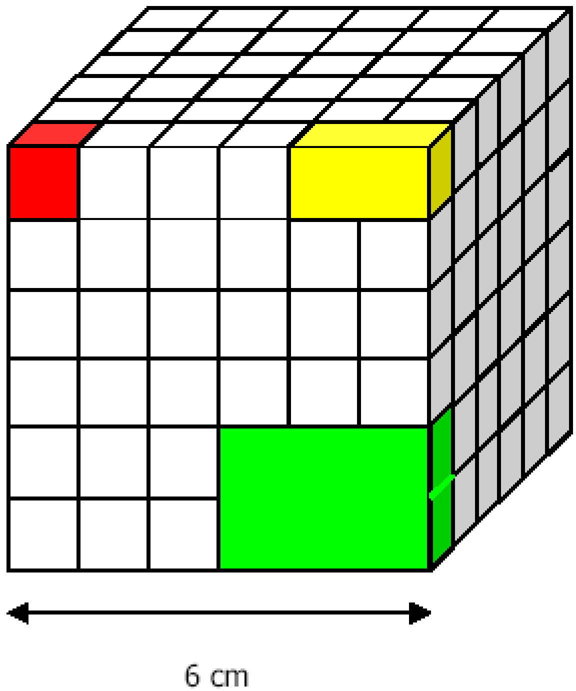
Practiqueu el joc i digueu qui te avantatge, el primer o el segon jugador. Trobeu una manera de jugar que permeti guanyar sempre a un dels dos jugadors.
L'estratègia que heu dissenyat, val igual sigui la que sigui la casella on s'ha situat inicialment la reina?

Any 2006

PROBLEMA 1

Construïm Cubs

Estem buscant peces ortoèdriques de tal manera que utilitzant només moltes peces iguals a les trobades puguem construir un cub de costat 6cm. Al dibuix en teniu tres exemples. Una peça vermella de costats 1cm·1cm·1cm, una peça groga de costats 2cm·1cm·1cm i una peça verda de costats 3cm·2cm·1cm



a) Quantes peces ortoèdriques de costats 1cm·1cm·1cm necessitaríeu per a construir aquest cub? I si només utilitzem peces de costats 2cm·1cm·1cm? I només amb peces de 3cm·2cm·1cm?

b) Investiga totes les peces ortoèdriques amb costats sencers (no decimals) que podrien existir i amb les quals, utilitzant només aquella peça, podríeu construir un cub com el de l'exemple. Quantes peces necessitaríeu en cada cas?

c) Quins tipus de peces i quantes en sortirien si volguéssim construir un cub de 9 cm de costat? I si fos de 12? I de 7? Expliqueu en quins casos trobem més quantitat de peces diferents i que ens permeten construir un cub de costat n.

PROBLEMA 2

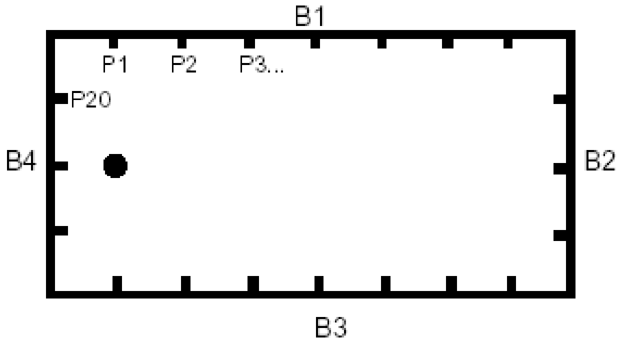
El Tsyanshidzi

El Tsyanshidzi és un antic joc d’origen xinès. Es juga partint de dues piles de pedres (o fitxes) amb una quantitat diferent a cada pila (es pot començar amb 6 i 7 fitxes i després anar variant el nombre de fitxes de cada pila). Cada jugador, al seu torn, pot retirar totes les fitxes que vulgui d’una de les piles, o bé treure fitxes de les dues piles, però en aquest cas la quantitat de fitxes que s’eliminin ha de ser la mateixa per a les dues piles. Qui aconsegueix retirar totes les fitxes que queden en aquell moment, guanya la partida.

Practiqueu el joc i digueu qui té avantatge, el primer o el segon jugador, segons el nombre de fixes inicial. Trobeu una manera de jugar que permeti guanyar sempre a un dels dos jugadors.

PROBLEMA 3
Billar

Estem jugant al billar en una taula de 2 metres de llargada per 1 metre d'amplada com la del dibuix. Fem una marca cada 25 cm a les 4 bandes del billar i col·loquem la bola en la posició que marca el dibuix (a 25 cm de la banda B4 i a mig metre de les bandes B1 i B3). En cadascuna de les cantonades tenim un forat. Anomenem totes aquestes marques amb P1, P2, P3... en sentit horari fins a P20.



a) Volem fer que reboti (sense efecte) sobre la banda B1 en el punt P3. En quina banda acabarà impactant després? En quin punt d'aquesta banda?

b) Ara volem que després de rebotar sobre la banda B1 acabi impactant sobre el punt P14. En quin punt de la banda B1 la faríeu rebotar?

Canviem de posició la bola: la col·loquem a mig metre de la banda B4 i a mig metre de les bandes B1 i B3. En aquesta nova posició:

c) Feu que reboti sobre la banda B1 en el punt P4. En quin punt acabarà impactant després?

Tornem a canviar la posició de la bola: la col·loquem a 75cm de la banda B4 i a mig metre de les bandes B1 i B3. En aquesta nova posició:

d) Si volem ficar la bola en el forat que hi ha en la cantonada que forma la banda B1 i B2 i que reboti a la banda B3, en quin punt de la banda B1 hauríeu de fer rebotar la bola?

e) Si donem una força a la bola perquè faci un recorregut de 3m, tindrà prou recorregut per arribar al forat o es pararà abans?

f) Feu un estudi de diferents posicions inicials i recorreguts que pot tenir la bola si només volem que reboti a les bandes B1 i B3 i acabar al forat de les cantonades. Quin és el recorregut més llarg i més curt en cada cas?

Problemes de la fase comarcal

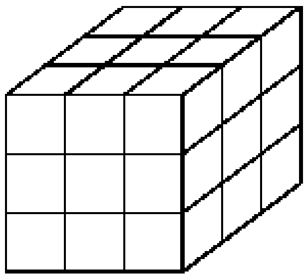
Any 2002

PROBLEMA 1. Tenim un cub format per cubets petits, tres cubets per costat. Els cubets són inicialment de color blanc. Pintem el cub gran de color vermell i després el desmuntem.

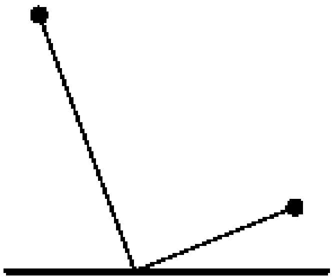
Quants cubets trobarem amb tres cares pintades? Quants amb dues cares pintades? Quants amb una sola cara pintada? I quants amb cap cara de color vermell?

Repeteix el problema per un cub de quatre cubets de costat. I deprés, per un de cinc cubets de costat.

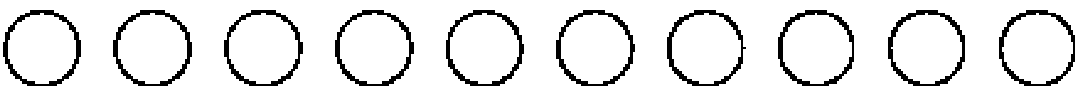
Series capaç de donar la solució per un cub de deu cubets de costat? I per un de *n* cubets de costat?



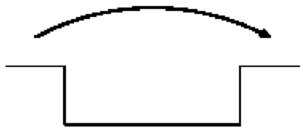
PROBLEMA 2. En el pati de l'institut de l'Ivan hi ha dos arbres. Un d'ells és a vuit metres de la paret del fons del pati i l'altre és a només dos metres d'aquesta paret. La distància entre els dos arbres en línia recta és de deu metres. Als alumnes de segon d'ESO els agrada jugar a un joc que consisteix a sortir de l'arbre més allunyat de la paret, córrer cap a la paret i anar cap a l'altre arbre. El primer que arriba guanya. En quin punt cal tocar la paret perquè el camí sigui el més curt possible?



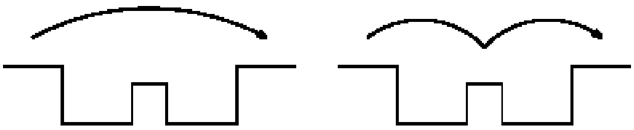
PROBLEMA 3. En Pep i la Maria van posar-se a jugar un joc amb deu monedes. El joc consisteix en posar-les totes en una fila i cada jugador, per torns, en treu una o dues. Qui treu l'última moneda perd el joc. Creus que el primer que juga pot guanyar sempre? Si és així, com s'ho ha de fer? Si és el segon jugador el que guanya, com creus que ha de jugar?



Any 2003
PROBLEMA 1. Una granota ha d'atravessar un riu. Si no hi ha cap pedra al mig del riu el salta d'un sol cop.



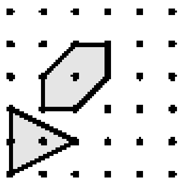
En canvi, si hi ha alguna pedra al mig ho pot fer de dues maneres, com indica el dibuix.



De quantes maneres pot atravessar el riu si hi ha dues pedres? I si n'hi ha tres? I quan n'hi ha quatre?
De quantes maneres el pot atravessar si hi ha 10 pedres?

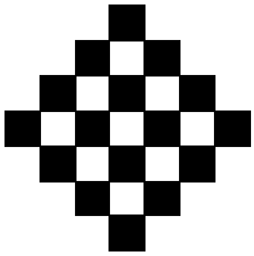
PROBLEMA 2. Posem una corda molt, molt llarga sobre l'equador de la Terra, de manera que dóna una volta completa al planeta. Si després volguéssim que la corda estigués a 20 cm de la superfície, també donant una volta completa a l'equador, en quants metres l'hauríem d'allargar?

PROBLEMA 3. Mira les figures de la quadrícula. Les dues tenen només un punt en el seu interior. Dibuixa'n algunes més, també amb un sol punt en el seu interior. Si suposes que la distància entre dos punts consecutius és de 1 cm, quina és l'àrea de les dues figures de la quadrícula? I de les que has dibuixat tu?



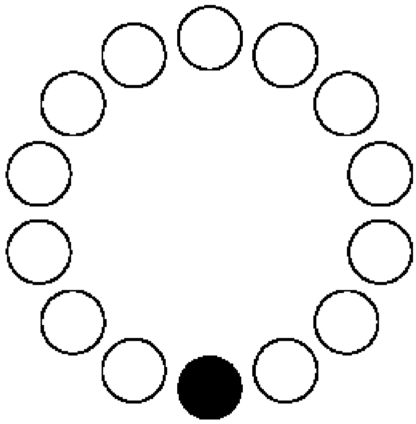
Prova també amb un parell de figures amb dos punts en el seu interior. Quina àrea tenen? Pots predir quina àrea tindrà una figura amb cinc punts en el seu interior?

Any 2004
PROBLEMA 1. Aquest model està format per rajoles blanques i negres. La seva amplada és de 7 rajoles.



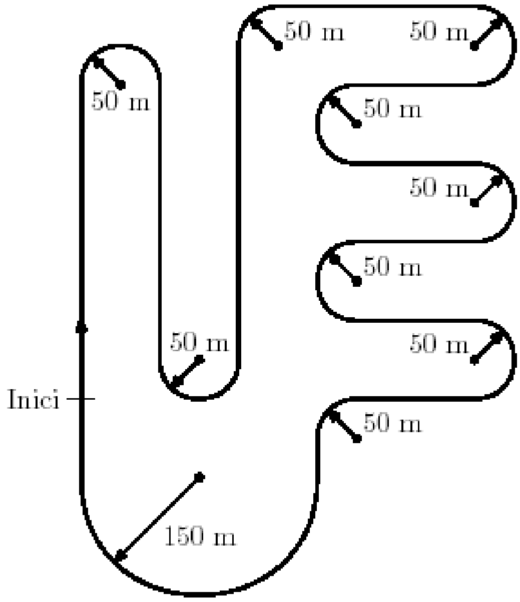
En l’Ajuntament de Canet de Mar hi ha un model com aquest de 149 rajoles d’ample. Quantes rajoles té en total?

PROBLEMA 2. Començant per la pedra de color negre, una granota va saltant al voltant d’aquest cercle de tres en tres pedres.



Després de donar tres voltes s’adona que ha passat per totes les pedres.
Després es posa a saltar de quatre en quatre pedres. Explica perquè no passarà per totes les pedres per moltes voltes que doni.
Si es posés a saltar de *n* en *n* pedres, per quins valors de *n* passarà per totes les pedres al cap d’unes voltes?
Què passaria si en lloc de catorze pedres en total n’hi hagués un valor diferent?

PROBLEMA 3. S'està dissenyant un circuit de Fórmula 1. En teniu un croquis a continuació.



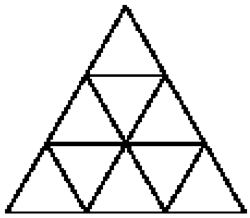
Cada vegada que un cotxe passa per una de les corbes d'un circuit les rodes de la part de fora de la corba han de ferm´es tros que les de l'interior. (Per exemple, en la primera corba les rodes de l'esquerra fan més tros que les de la dreta.) Comptant que la distància entre les rodes de cada costat és de 2 metres, quin tros de més hauran de fer per volta les rodes de l'esquerra respecte les de la dreta?

Any 2005

PROBLEMA 1. Un granger té tres animals a la seva granja: una vaca, una cabra i una oca. Per poder-los alimentar ha d'aprofitar al màxim les pastures que té. Sap que si només tingués la vaca les pastures durarien 90 dies. També sap que les pastures alimentarien la vaca i l'oca durant 60 dies o la vaca i la cabra durant 45 dies.
Tingues en compte que fa dies que ningú no trepitja els prats del granger. Per tant, l'herba deu estar força alta, i seguirà creixent dia a dia. El granger vol estar segur de quants dies li duraran les pastures si alimenta les tres bèsties, perquè si han de durar molt poc s'ha d'espavilar a comprar ben aviat altres prats. L'ajudaràs?

PROBLEMA 2. Per numerar les pàgines d'un llibre fan falta 2989 xifres. Quantes pàgines té el llibre?

PROBLEMA 3. Quants triangles (de qualsevol mida) hi ha en el següent triangle de 3 pisos d'alçada?



I si tinguéssim un triangle de 4 pisos d'alçada, quants triangles tindríem en total? I si tinguéssim un triangle de 5 pisos? I un de 10 pisos?

Any 2006
PROBLEMA 1. Entre Matar´o i Girona hi ha 99 km. Entre les dues ciutats hi ha 98 senyals, com els de la figura.

Quants senyals tenen nom´es 2 dígits?
Per exemple, el senyal següent té només dos dígits, el 3 i el 6.

PROBLEMA 2. Quantes capses rectangulars es poden fer amb 1 cub? I amb 2 cubs? I amb 3 cubs?
I amb 4 cubs? Quantes capses es poden fer amb exactament 12 cubs? I amb 20 cubs? Quantes capses es poden fer amb exactament 120 cubs?
PROBLEMA 3. En un poblet petit hi ha nom´es 3 carrers. L'Ajuntament posa un fanal a cada cruïlla. Quants fanals haurà d'instal.lar, com a màxim? I si el poble tingués 4 carrers? I si tingués 5 carrers? Quants fanals hauria d'instal.lar l'Ajuntament si el poble tingués 10 carrers? I si en tingués 100? Quants fanals hauria d'instal.lar l'Ajuntament si el poble tingués *n* carrers?

Problemes de la fase final

ANY 1999. Barberà del Vallès

PROBLEMA 1.

L'escala del castell

En Joan i en Xavier baixen saltant l'escala d'una torre d'un castell.

En Xavier comença saltant 2 graons, després en salta 3, després 2, i així va fent:

2 - 3 - 2 - 3 - ....

Després de molts salts, seguint sempre aquest ritme, quan fa un salt de 2 graons arriba a baix.

En Joan baixa a un ritme més fort. Va saltant:

4 - 4 - 3 - 4 - 4 - 3 - ....

Després de molts salts, seguint sempre aquest ritme, quan fa un salt de 3 graons arriba a baix.

a) Quants graons pot tenir l'escala del castell si se sap que en té més de 200 i menys de 400?

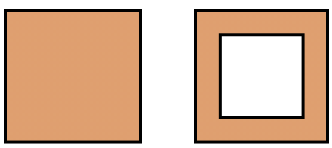
En Xavier i en Joan han comptat els salts que han fet. Un d'ells ha fet 45 salts més que l'altre.

b) Sabent això, pots dir quants graons té exactament l'escala?

PROBLEMA 2

La tanca del jardí

En Marcel vol construir una tanca per al seu jardí. Utilitza dos tipus de peces: unes de quadrades, i unes altres fetes amb el mateix material i de la mateixa mida però foradades, que col·loca a la part de dalt.



Aquestes peces les venen en paquets de 30, que poden ser de dos tipus:

- Paquets A amb 20 peces foradades i 10 sense foradar
- Paquets B amb 10 peces foradades i 20 sense foradar

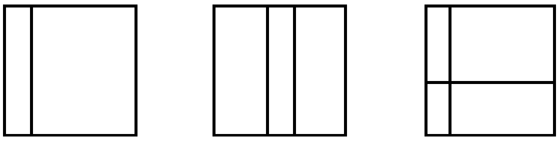
a) Sabent que els paquets A pesen 19 kg i els paquets B pesen 23 kg, quant pesa una peça foradada i quant una sense foradar?

b) Si les peces fan 60 cm de costat, quant amida el costat del quadrat interior de les peces foradades?

Problema 3.

Partint un quadrat

Observa que si tracem una línia paral·lela a un dels costats d'un quadrat, el dividim en 2 parts. Si tracem dues línies, cadascuna d'elles paral·lela a un dels costats el podem dividir en 3 parts o en 4, segons siguin paral·leles al mateix costat o no



a) En quantes parts es pot dividir un quadrat si es tracen 4 línies, cadascuna d'elles paral·lela a un costat?

I si se'n tracen 7?

b) Sabries dir en quantes parts pot quedar dividit un quadrat quan es tracen "n" línies, cadascuna d'elles paral·lela a un dels costats?

Fixa't en els casos que ja has resolt i prova alguns casos més. Explica clarament el resultat

c) De quantes maneres es pot dividir un quadrat en 12 parts, si només es poden traçar línies paral·leles als costats? I en 100 parts?

ANY 2000. Esplugues de LLobregat

PROBLEMA 1. .-

a) Observa les següents sumes de quadrats:

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

Escriu les dues files que seguirien a continuació.

De les files de l'enunciat i de les que tu has escrit, quina llei "sembla" que es pot deduir. Escriu-la de la manera més senzilla que puguis.

b) Observa ara les següents sumes:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

Escriu les dues files que seguirien a continuació.

PROBLEMA 2

Un cargol es troba damunt d'una taula totalment plana. Surt d'un punt A i recorre 128 centímetres en línia recta en direcció nord. Després gira 90º a la seva dreta en direcció est i recorre 64 centímetres. Torna a girar 90º a la dreta - ara en direcció sud - i fa 32 centímetres més. I continua d'aquesta manera, és a dir, girant a la dreta 90º després de recórrer cada cop la meitat de centímetres, fins que fa 1 centímetre cap a l'oest i arriba al punt B . Fes un dibuix del seu itinerari i calcula a quina distància es troben els punts A i B.

Indicació: Si en un rectangle un costat mesura *a* i l'altre *b*, la diagonal mesurarà $\sqrt{a^2+b^2}$. Així si un costat mesura 1 cm i l'altre 2 cm, aleshores la diagonal mesurarà $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ cm, és a dir aproximadament 2.24 cm.

PROBLEMA 3.- Sabries escriure el número nou de nou maneres diferents utilitzant exactament quatre quatres? Pots emprar els símbols de les operacions suma, resta, multiplicació, divisió, parèntesis i arrel quadrada. També pots elevar un número a un altre amb la condició de que els únics números que apareguin siguin els quatres.

Observació: dues solucions es consideraran iguals si les operacions que es fan són les mateixes i l'únic que canvia és l'ordre.

Any 2004. Mataró

PROBLEMA 1.

El nombre 40 es pot descomposar en sumes de nombres més petits de moltes maneres diferents. Per exemple,

40 = 20 + 16 + 4 o 40 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8.

En el primer cas, si multipliquem els sumands de la descomposició tenim

20 × 16 × 4 = 1 280.

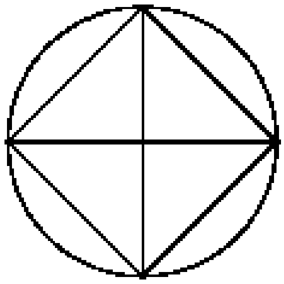
En el segon cas, en canvi, quan multipliquem els nombres de la descomposició, tenim

8 × 8 × 8 × 8 × 8 = 32 768.

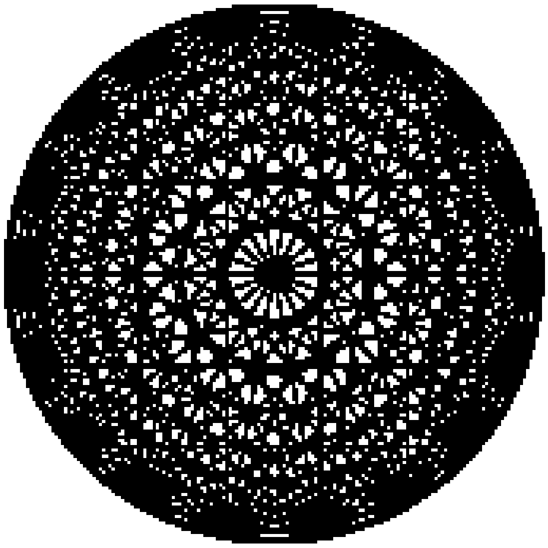
Busca altres maneres de descomposar el nombre 40 en suma de nombres naturals. Quina és la descomposici´o que fa que el producte dels nombres sigui el més gran possible?

[Problema en homenatge a Miguel de Guzmán, adaptat del seu llibre “Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas”.]

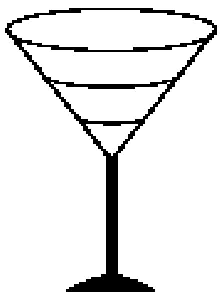
PROBLEMA 2.
En aquesta circumfer`encia hi hem dibuixat quatre punts i els hem unit tots amb tots amb segments rectes. En total tenim sis segments.



Quants segments tenim si dibuixem una figura semblant amb cinc punts sobre la circumferència? I amb sis punts?
La figura següent és l'anomenada "rosa mística". Consisteix en divuit punts sobre una circumferència units entre tots amb segments. Quants segments hi ha?



PROBLEMA 3.
En una copa en forma de con s'hi posa mercuri, després aigua i després oli. Els tres líquids formen tres capes del mateix gruix, sense que els líquids es barregin.



Les densitats dels líquids s´on: 13,59 gr/cm3 pel mercuri, 1 gr/cm3 per l'aigua i 0,915 gr/cm3 per l'oli. Quin és el líquid amb més massa en la copa: el mercuri, l'aigua o l'oli?

ANY 2005. Barcelona

PROBLEMA 1

La Marta, la Beatriu i la Concepció són tres amigues molt amigues. Un dia que la Marta i la Beatriu s'han trobat per estudiar i berenar observen que totes dues han comprat el mateix tipus de coques rodones i ensucrades que venen al forn de *ca la Sila* però la Marta n'ha comprat 5 i la Beatriu 3 (i les han pagat, es clar!).
Quan porten una estona estudiant, arriba la Concepció que estava ajudant al seu germà a fer els deures i no ha pogut arribar abans. En anar a berenar la Concepció diu que ella no ha pogut comprar res perquè se li ha fet tard i posa sobre la taula 4 € que és el que li toca pagar per tal que cadascuna de les altres (la Marta i la Beatriu) cobri la part que li correspon, i aleshores totes tres es posen a menjar les delicioses coques.
Explica com s'han de repartir els 4€ de la Concepció entre la Marta i la Beatriu tenint en compte que totes tres mengen la mateixa quantitat de coca i, al final, totes tres han pagat la part de coca que s'han menjat. Quant valia cada coca?

PROBLEMA 2i

El passeig de la vila de Vallrumí té plantats a banda i banda, cada 13 m., arbres. La filera d'arbres de la dreta del passeig és així:
Pi – plataner – teix – til·ler – acàcia – pi – plataner – teix – til·ler – acàcia – pi – etc.
la filera de l'esquerra, en canvi, és així:
Pi – plataner – til·ler - pi – plataner – til·ler – pi – etc.
i això es repeteix fins al final del passeig.
El passeig que té una longitud inferior a 1 Km. Comença amb un pi a la dreta i un pi a l'esquerra i també acaba amb un pi a la dreta i un pi a l'esquerra. Quines són les possibles longituds del passeig?

PROBLEMA 3

Com molt bé ja deus saber, hi ha missatges que s'escriuen encriptats (ocults) per tal que, si algú que no n'ha de fer res els llegeix, no pugui saber el què hi diu.
Aquí tens un missatge amb una salutació per a tu i amb una referència a l'acte que estem fent. Diu així:

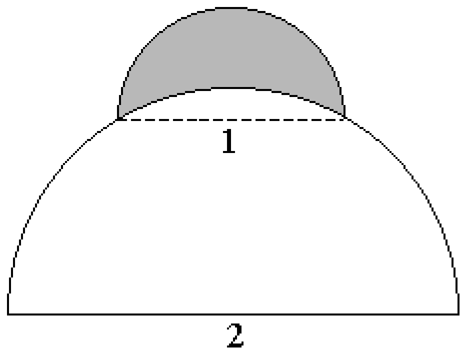
VZJYNSLZNXZSINFLJSNFQ!KJRRFYJRFYNVZJXITXRNQHNSH

Ara, amb una mica d'imaginació i sabent de què va el missatge, cal que el desxifris i escriguis en català el què hi diu.
A més, escriu-nos un petit missatge xifrat fent servir el mateix mètode d'encriptació del missatge de dalt.

ANY 2006. Reus

PROBLEMA 1

Calcula l'àrea de la regió ombrejada de la figura, tenint en compte que el cercle gran fa de diàmetre 2 m i el diàmetre del cercle petit és d'un m .



PROBLEMA 2

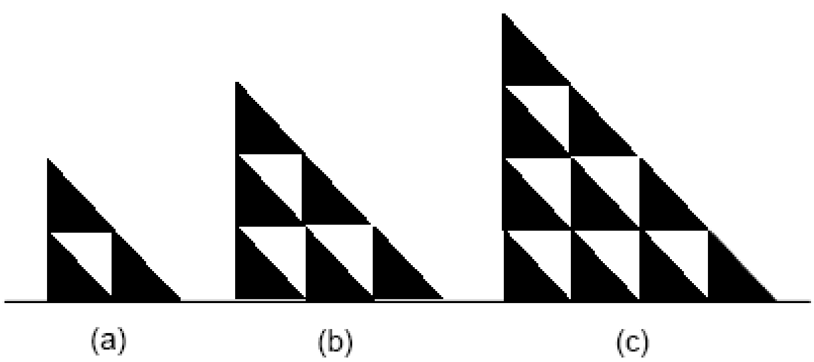
Els alumnes de segon curs d'un IES van d'excursió al Pirineu acompanyats pels seus professors. Es troben en la necessitat de travessar un riu des d'una vora a l'altra saltant sobre una passarel·la formada per 15 pedres grans.

Tot el grup d'excursionistes triga 2 minuts a travessar el riu, i ho fan de la manera següent:

- El primer excursionista salta de la vorera a la primera pedra, quan ell salta de la primera pedra a la segona, el segon excursionista salta a la primera pedra.
- Quan el primer excursionista salta a la tercera pedra, el segon salta a la segona i el tercer excursionista salta de la vora a la primera pedra.
- Continuen tots així, respectant el ritme dels salts, fins que l'últim excursionista salta de l'última pedra a l'altra vora del riu. En cada salt es tarda exactament 2 segons.

Per quantes persones està format aquest grup d'excursionistes?

PROBLEMA 3



Per construir la figura a), de dos nivells d'alçada, s'han fet servir tres triangles negres i un triangle blanc.

Per construir la figura b) , de tres nivells, s'han fet servir 6 triangles negres i tres triangles blancs.

I així successivament. Observa la regularitat i contesta de manera raonada:

c) Si fem una figura de cinc nivells, quants triangles de cada color es necessiten?
d) I per fer una figura de 10 nivells, quants triangles de cada color es necessiten?
e) Escriu una expressió matemàtica que ens indiqui quants triangles negres són necessaris per construir una figura de "n" nivells.
f) Escriu una expressió matemàtica que ens indiqui quants triangles en total es necessiten per construir una figura de "n" nivells. Pots indicar quants d'aquests són negres i quants són blancs?