Institut Pere Vives Vich

2n Batxillerat[1]

CAMPS GRAVITATORI I ELÈCTRIC

1. Un satèl·lit gira en òrbita circular al voltant de la Terra a 150000 km de distància del seu centre. Si hi hagués un altre satèl·lit en òrbita circular al voltant de la Lluna que tingués la mateixa velocitat, a quina distància del centre de la Lluna estaria? Dada: la massa de la Lluna val $0,0123$ vegades la de la Terra.

Com que la força centrípeta la fa la gravetat i igualant les velocitats:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\sqrt{\frac{GM_T}{r_T}} = \sqrt{\frac{GM_L}{r_L}} \qquad r_L = r_T\frac{M_L}{M_T} = 150000 \cdot 0,0123 = 1845 \text{ km}$$

2. Amb quina velocitat angular de rotació ha de girar un satèl·lit artificial, al voltant de la Terra, perquè ho faci en una òrbita de radi doble que el de la Terra. Dades: radi terrestre $R = 6366$ km, $g_o = 9,81$ m/s^2.

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \sqrt{\frac{GM}{(2R)^3}} = \sqrt{\frac{GM}{8R^3}}$$

Substituïnt l'expressió de la gravetat terrestre g_o

$$g_o = G\frac{M}{R^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM}{8R^3}} = \sqrt{\frac{g_o}{8R}} = \sqrt{\frac{9.81}{8 \cdot 6,366 \cdot 10^6}} = 4,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

[1] /home/ernest/LaTeX/campss.tex

3. Sabent que la densitat mitjana de la Terra és $\rho = 5,5$ g/cm^3, calculeu el valor del seu radi. Dades: $g_o = 9,81$ m·s^{-2}, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}.

Calculem la massa de la Terra M en funció de ρ i substituïm a l'expressió de g_o

$$M = V\rho = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad g_o = G\tfrac{M}{R^2} = \tfrac{G4\pi R^3\rho}{R^2 3} = \tfrac{4\pi G R\rho}{3}$$
$$R = \tfrac{3g_o}{4\pi G\rho} = \tfrac{3\cdot 9.81}{4\pi 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5500} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

4. La massa del planeta Júpiter és 318 vegades la de la Terra i el seu diàmetre 11 vegades major. Quant val la gravetat en aquest planeta? Dada: $g_T = 9,81$ m·s^{-2}.

$$g_T = G\tfrac{M_T}{R_T^2} \qquad g_J = G\tfrac{M_J}{R_J^2}$$

Substituïm: $M_J = 318 M_T$ i $R_J = 11 R_T$

$$g_J = G\tfrac{318 M_T}{(11 R_T)^2} = G\tfrac{318 M_T}{121 R_T^2} = \tfrac{318}{121} G \tfrac{M_T}{R_T^2} = \tfrac{318}{121} g_T = \tfrac{318}{121} 9,81 = 25,78 \text{ m·s}^{-2}$$

5. Sabent que la gravetat a la superfície de la Lluna és 1/6 de la terrestre, calculeu la velocitat d'escapament de la Lluna. Dada: $R_L = 1740$ km

Igualant l'energia total a 0 s'obté la velocitat d'escapament:

$$\tfrac{mv^2}{2} - G\tfrac{Mm}{R} = 0 \qquad v = \sqrt{\tfrac{2GM}{R}}$$

en la qual substituirem la $g_L = g_T/6 = 9,81/6 = 1,635$:

$$g_L = G\tfrac{M_L}{R_L^2} \qquad v_L = \sqrt{\tfrac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{2 g_L R_L} = \sqrt{2 \cdot 1.635 \cdot 1.74 \cdot 10^6} = 2385 \text{ m/s}$$

6. El potencial elèctric creat per una càrrega puntual a una certa distància val 1800 V. En aquest mateix punt la intensitat del camp elèctric val 1000 N/C. Calculeu el valor de la càrrega i la distància sabent que $K = 9 \cdot 10^9$ N·m^2·C^{-2}

$$V = K\tfrac{q}{r} = 1800 \qquad E = K\tfrac{q}{r^2} = 1000$$

Dividint membre a membre o substituint:

$$\tfrac{V}{E} = \tfrac{Kq}{r} \cdot \tfrac{r^2}{Kq} = \tfrac{1800}{1000} \qquad r = 1,8 \text{ m} \qquad q = \tfrac{Vr}{K} = \tfrac{1800 \cdot 1,8}{9 \cdot 10^9} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

7. Dues càrregues puntuals, una de -3 nC i una altra de 12 nC, estan separades $7,3$ m. Calculeu els punts en els quals s'anul·la el camp elèctric.

Suposem que la primera càrrega està a l'origen de coordenades i la segona al punt de $x = 7,3$ m. Per a què el camp sigui nul, hauria de ser un punt a l'esquerra ($x < 0$) ja que així la proximitat compensarà la debilitat relativa de la primera càrrega.
Els dos camps, de sentits oposats, s'anul·laran i per tant igualem els mòduls:

$$E_1 = E_2 \qquad K\tfrac{q_1}{r_1^2} = K\tfrac{q_2}{r_2^2} \qquad \tfrac{3 \cdot 10^{-9}}{x^2} = \tfrac{12 \cdot 10^{-9}}{(7,3-x)^2}$$

La distància des de la càrrega positiva és $7,3 - x$ perquè la x és negativa.
Simplificant i fent l'arrel quadrada a ambdós costats, tenim:

$$\sqrt{\tfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\tfrac{4}{(7,3-x)^2}} \qquad \tfrac{1}{x} = \pm\tfrac{2}{7,3-x} \qquad 7,3 - x = \pm 2x$$

Hi ha dues solucions, però busquem la negativa:

$$-x + 2x = 7,3 \qquad x = -7,3 \text{ m}$$

8. Una partícula α ($^4_2\text{He}^{2+}$), inicialment en repòs, s'accelera amb un camp elèctric uniforme de 10^5 N/C fins que assoleix una velocitat de 1000 m/s. Calculeu l'espai recorregut i la d.d.p. entre els punts extrems del recorregut, sabent la càrrega del protó $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C i la unitat atòmica de massa $u = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

El treball elèctric és igual a l'increment d'energia cinètica:

$$F\Delta x = E_c - E_{co} \qquad qE\Delta x = E_c \qquad 2eE\Delta x = \tfrac{4uv^2}{2}$$

La càrrega és el doble (ió 2+) i la massa quadruple (número màssic 4)

$$\Delta x = \frac{uv^2}{eE} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1000^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^5} = 1,04\cdot 10^{-7}\text{ m}$$

La d.d.p. és senzilla perquè el camp és uniforme:

$$\Delta V = -\int E_x dx = -E\Delta x = -10^5\cdot 1,04\cdot 10^{-7} = -1,04\cdot 10^{-2}\text{ V}$$

El signe menys indica que el potencial final és menor que l'inicial, tal com cal.

9. Donades les càrregues puntuals $q_1 = 100\ \mu$C, $q_2 = -50\ \mu$C i $q_3 = -100\ \mu$C, situades respectivament als punts (−3, 0), (3, 0) i (0, 2), calculeu:

a) El potencial del camp al punt (0, 0).
$V_1 = K\frac{q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\frac{100\cdot 10^{-6}}{3} = 3\cdot 10^5 \qquad V_2 = K\frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\frac{-50\cdot 10^{-6}}{3} = -1,5\cdot 10^5$
$V_3 = K\frac{q3}{r_3} = 9\cdot 10^9\frac{-100\cdot 10^{-6}}{2} = -4,5\cdot 10^5 \qquad V = V_1 + V_2 + V_3 = -3\cdot 10^5\text{ V}$

b) La intensitat, mòdul i angle, del camp al punt (0, 0).
$E_1 = K\frac{q_1}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\frac{100\cdot 10^{-6}}{3^2} = 10^5 \qquad \vec{E}_1 = 10^5\vec{\imath}$
$E_2 = K\frac{q_2}{r_2^2} = 9\cdot 10^9\frac{50\cdot 10^{-6}}{3^2} = 5\cdot 10^4 \qquad \vec{E}_2 = 5\cdot 10^4\vec{\imath}$
$E_3 = K\frac{q3}{r_3^2} = 9\cdot 10^9\frac{100\cdot 10^{-6}}{2^2} = 2,25\cdot 10^5 \qquad \vec{E}_3 = 2,25\cdot 10^5\vec{\jmath}$
$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 10^5\vec{\imath} + 5\cdot 10^4\vec{\imath} + 2,25\cdot 10^5\vec{\jmath} = 1,5\cdot 10^5\vec{\imath} + 2,25\cdot 10^5\vec{\jmath}$
$E = \sqrt{\left(1,5\cdot 10^5\right)^2 + \left(2,25\cdot 10^5\right)^2} = 2,7\cdot 10^5$
$\varphi = \arctan(2,25\cdot 10^5/1,5\cdot 10^5) = 56,3^o \qquad \vec{E} = 2,7\cdot 10^5\text{ N/C }\measuredangle 56,3^o$

c) El treball que cal fer per formar aquesta distribució.
$W_{NC} = \Delta E_p = E_{p12} + E_{p13} + E_{p23} = K\frac{q_1q_2}{r_{12}} + K\frac{q_1q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2q_3}{r_{23}} = K(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}) =$
$= 9\cdot 10^9\left(\frac{100\cdot 10^{-6}\cdot\left(-50\cdot 10^{-6}\right)}{6} + \frac{100\cdot 10^{-6}\cdot\left(-100\cdot 10^{-6}\right)}{3{,}6} + \frac{\left(-50\cdot 10^{-6}\right)\cdot\left(-100\cdot 10^{-6}\right)}{3{,}6}\right) = -20\text{ J}$

d) El treball necessari per portar una càrrega de $-10\ \mu$C des de l'infinit fins el (0, 0).
$W_{NC} = \Delta E_p = q'\Delta V = -10\cdot 10^{-6}\cdot\left(-3\cdot 10^5 - 0\right) = 3\text{ J}$

10. Dues esferes metàl·liques de 5 i 10 cm de radi es carreguen a 1000 i −1000 V respectivament.Un cop carregades se situen a una distància de 10 m que es pot considerar molt gran comparada amb els seus radis. Aquestes esferes, s'atrauen o es repel·len? amb quina força?
Les dues esferes es posen en contacte amb un fil metàl·lic i al cap d'una estona es treu el fil. En aquesta nova situació, s'atrauen o es repel·len? amb quina força?
Quina ha estat la variació d'energia del sistema des de la situació inicial a la final? si ha augmentat l'energia, d'on ha sortit? i si ha disminuit, a on ha anat a parar?

Encara que la primera part no requireix el concepte de capacitat, C, d'un conductor, és millor utilitzar-lo des del començament:

$$C = R/K \qquad C_1 = R_1/K = 0,05/9 \cdot 10^9 = 5,56 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$
$$C_2 = R_2/K = 0,1/9 \cdot 10^9 = 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$
$$V = Q/C \qquad Q_1 = V_1 C_1 = 1000 \cdot 5,56 \cdot 10^{-12} = 5,56 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
$$Q_2 = V_2 C_2 = -1000 \cdot 1,11 \cdot 10^{-11} = -1,11 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Com que tenen signes diferents s'atrauran:

$$F = K\tfrac{Q_1 Q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \tfrac{5,56 \cdot 10^{-9} \cdot 1,11 \cdot 10^{-8}}{10^2} = 5,56 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

En posar-les en contacte el potencial s'iguala en el conductor únic que formen i que té una capacitat major:

$$C = C_1 + C_2 = 5,56 \cdot 10^{-12} + 1,11 \cdot 10^{-11} = 1,67 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = 5,56 \cdot 10^{-9} - 1,11 \cdot 10^{-8} = -5,56 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
$$V = Q/C = -5,56 \cdot 10^{-9}/1,67 \cdot 10^{-11} = -333 \text{ V}$$

Cadascuna queda amb una càrrega negativa i, per tant, es repel·len:

$$Q_1 = VC_1 = -333 \cdot 5,56 \cdot 10^{-12} = -1,85 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
$$Q_2 = VC_2 = -333 \cdot 1,11 \cdot 10^{-11} = -3,70 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
$$F = K\tfrac{Q_1 Q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \tfrac{1,85 \cdot 10^{-9} \cdot 3,70 \cdot 10^{-8}}{10^2} = 6,17 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

Si per l'energia només tenim en compte la deguda a la interacció de les càrregues, cometríem un greu error:

$$E_{po12} = K\tfrac{Q_1 Q_2}{d} = 9 \cdot 10^9 \tfrac{5,56 \cdot 10^{-9} \cdot \left(-1,11 \cdot 10^{-8}\right)}{10} = -5,56 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$
$$E_{p12} = K\tfrac{Q_1 Q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \tfrac{\left(-1,85 \cdot 10^{-9}\right) \cdot \left(-3,70 \cdot 10^{-8}\right)}{10^2} = 6,17 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$
$$\Delta E_{p12} = E_{p12} - E_{po12} = 6,17 \cdot 10^{-9} - \left(-5,56 \cdot 10^{-8}\right) = 6,17 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Però això és impossible: l'energia del sistema no pot augmentar, perquè no hi ha hagut cap entrada de treball. És a dir, s'ha obtingut energia del no res!
L'error s'esmena tenint en compte les energies potencials pròpies de cada conductor:

$$E_{po1} = \tfrac{Q_1 V_1}{2} = \tfrac{5,56 \cdot 10^{-9} \cdot 1000}{2} = 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$
$$E_{po2} = \tfrac{Q_2 V_2}{2} = \tfrac{\left(-1,11 \cdot 10^{-8}\right) \cdot (-1000)}{2} = 5,56 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$
$$E_{p1} = \tfrac{Q_1 V}{2} = \tfrac{\left(-1,85 \cdot 10^{-9}\right) \cdot (-333)}{2} = 3,08 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$
$$E_{p2} = \tfrac{Q_2 V}{2} = \tfrac{\left(-3,70 \cdot 10^{-9}\right) \cdot (-333)}{2} = 6,16 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Per tant l'energia inicial E_{po} és:

$$E_{po1} + E_{po2} + E_{po12} = 2,78 \cdot 10^{-6} + 5,56 \cdot 10^{-6} - 5,56 \cdot 10^{-8} = 8,28 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

i l'energia final E_p val:

$$E_{p1} + E_{p2} + E_{p12} = 3,09 \cdot 10^{-7} + 6,17 \cdot 10^{-7} + 6,17 \cdot 10^{-9} = 9,32 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Així doncs, l'increment d'energia és negatiu perquè s'ha perdut energia en forma de calor (efecte Joule) quan ha passat coorrent elèctric pel fil conductor:

$$\Delta E_p = E_p - E_{po} = 9,32 \cdot 10^{-7} - 8,28 \cdot 10^{-6} = -7,35 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$