

## MOVIMENTS I FORCES

1. L'equació:  $\vec{r} = (3t^4 + t^2)\vec{i} + (\frac{9}{2}t^2 + 4)\vec{j} + 6\vec{k}$  representa un moviment en S.I. Calculeu en el moment inicial:

a) La velocitat

$$\vec{v} = \left( (3t^4 + t^2)\vec{i} + \left(\frac{9}{2}t^2 + 4\right)\vec{j} + 6\vec{k} \right)' = (12t^3 + 2t)\vec{i} + (9t)\vec{j}$$
$$\vec{v}(0) = (12 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0)\vec{i} + (9 \cdot 0)\vec{j} = 0 \text{ m/s}$$

b) L'acceleració

$$\vec{a} = \left( (12t^3 + 2t)\vec{i} + (9t)\vec{j} \right)' = (36t^2 + 2)\vec{i} + (9)\vec{j}$$
$$\vec{a}(0) = (36 \cdot 0^2 + 2)\vec{i} + (9)\vec{j} = 2\vec{i} + 9\vec{j} \text{ m/s}^2$$

c) L'acceleració normal

$$a_n = v^2/\rho = 0^2/\rho = 0 \text{ m/s}^2$$

d) L'acceleració tangencial

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad ; \quad \vec{a}_t = \vec{a} - \vec{a}_n = 2\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{0} = 2\vec{i} + 9\vec{j}$$
$$a_t = \sqrt{2^2 + 9^2} = 9,22 \text{ m/s}^2$$

2. Una roda, que té un radi de 30 cm i que està aturada, s'accelera angularment amb  $2,6 \text{ rad/s}^2$ . Calculeu als 6 s:

a) La velocitat angular

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 2,6 \cdot 6 = 15,6 \text{ rad/s}$$

b) Les voltes que haurà donat

$$\theta = \omega_0 t + \alpha t^2/2 = 0 \cdot 6 + 2,6 \cdot 6^2/2 = 46,8 \text{ rad}$$
$$46,8 \text{ rad} \cdot (1 \text{ volta}/2\pi \text{ rad}) = 7,45 \text{ voltes}$$

c) L'acceleració total d'un punt de la perifèria

$$a_n = \omega^2 r = 15,6^2 \cdot 0,3 = 73 \text{ m/s}^2$$
$$a_t = \alpha r = 2,6 \cdot 0,3 = 0,78 \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{73^2 + 0,78^2} = 73 \text{ m/s}^2$$

---

<sup>1</sup>/home/ernest/L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/movimentss.tex

3. Un bloc de 0,4 kg està subjecte a una molla de constant elàstica 12 N/m i oscil·la amb una amplitud de 8 cm. Calculeu:

- a) La velocitat màxima  
 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{12/0,4} = 5,48 \text{ rad/s}$   
 $v_{\max} = A\omega = 0,08 \cdot 5,48 = 0,44 \text{ m/s}$
- b) La velocitat quan la elongació sigui de 4 cm  
 $x = A \sin \varphi \quad ; \quad 0,04 = 0,08 \sin \varphi \quad ; \quad \sin \varphi = 1/2$   
 $v = A\omega \cos \varphi = 0,08 \cdot 5,48 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = 0,38 \text{ m/s}$
- c) El temps que tarda en passar de l'origen al punt anterior  
 $\varphi = \omega t \quad ; \quad \arcsin(1/2) = \pi/6 = 5,48 \cdot t \quad ; \quad t = 0,096 \text{ s}$

4. Un bloc d'1 kg de massa, lligat a una corda de 0,6 m, gira a 60 rev/min en un cercle vertical. Calculeu la tensió de la corda:

- a) Quan passi pel punt més alt  
 $f = 60 \text{ rev/min} \cdot (1 \text{ min}/60 \text{ s}) = 1 \text{ rev/s} \quad ; \quad \omega = 2\pi f = 2\pi = 6,28$   
 La tensió i el pes van cap al centre produint acceleració normal:  
 $T + P = ma_n \quad ; \quad T = m\omega^2 r - mg = 1 \cdot 6,28^2 \cdot 0,6 - 1 \cdot 9,8 = 13,9 \text{ N}$
- b) Quan passi pel punt més baix  
 La tensió va cap al centre però el pes en marxa:  
 $T - P = ma_n \quad ; \quad T = m\omega^2 r + mg = 1 \cdot 6,28^2 \cdot 0,6 + 1 \cdot 9,8 = 33,5 \text{ N}$
- c) Quan passi pel punt en què la corda està horitzontal  
 Només la tensió va en la direcció del centre:  
 $T = ma_n \quad ; \quad T = m\omega^2 r = 1 \cdot 6,28^2 \cdot 0,6 = 23,7 \text{ N}$
- d) La velocitat mínima perquè pugui donar voltes sense caure  
 Serà quan la tensió ja no sigui necessària per passar per dalt:  
 $P = ma_n \quad ; \quad mg = mv^2/r \quad ; \quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,8 \cdot 0,6} = 2,42 \text{ m/s}$

5. En un velòdrom els ciclistes agafen una corba de 20 m de radi a 54 km/h. Quant ha de valdre l'angle de peralt perquè puguin seguir el revolt encara que no hi hagi fregament?

La normal s'ha descomposar: la component vertical compensa el pes, i l'horitzontal proporciona la força centrípeta.

$$N_y = mg \quad ; \quad N_x = m \frac{v^2}{r} \quad ; \quad 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{N_x}{N_y} = \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{v^2}{rg} \quad ; \quad \theta = \arctan \frac{15^2}{20 \cdot 9,8} = \arctan 1,148 = 48,9^\circ$$

6. L'hèlix d'un helicòpter empeny 200 m<sup>3</sup> d'aire cap a terra cada segon. Si la massa de l'helicòpter és de 500 kg i la densitat de l'aire 1,2 g/L, a quina velocitat s'han de moure els gasos perquè l'aparell s'aguanti?

L'hèlix impulsa els gasos amb una força igual al pes de l'aparell

Els gasos l'empenyen cap amunt amb igual força (3a llei de Newton):

$$I = Ft = \Delta p = p - p_0 \quad ; \quad m_{\text{helicòpter}}gt = m_{\text{aire}}v - m_{\text{aire}}v_0$$

Prenem arbitràriament un temps d'1 s:

$$m_{\text{aire}} = V_{\text{aire}}d = 200 \text{ m}^3 \cdot 1,2 \text{ kg/m}^3 = 240 \text{ kg}$$

Tenint en compte que l'aire estava quiet abans d'entrar a l'hèlix...

$$500 \cdot 9,8 \cdot 1 = 240 \cdot v - 240 \cdot 0 \quad ; \quad v = 4900/240 = 20,4 \text{ m/s}$$

7. Sobre el plat d'una balança es deixen caure pilotes de ping-pong, a raó de 10 cada segon, des d'una altura de 80 cm. Les pilotes, que tenen una massa de 5 g, reboten elàsticament i cauen fora del plat. Quin pes marcarà la balança?

Les pilotes arriben amb una velocitat:  $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,8} = 3,96 \text{ m/s}$  cap avall i reboten amb la mateixa velocitat en el sentit positiu (cap amunt)

Llavors són impulsades cap amunt pel plat amb la mateixa força que fan elles sobre el plat, que és allò que marcarà la balança. Considerem 1 s:

$$I = Ft = \Delta p = p - p_0 \quad ; \quad F \cdot 1 = m_{\text{pilotes}}v - m_{\text{pilotes}}v_0$$

$$F = 10 \cdot 0,005 \cdot 3,96 - 10 \cdot 0,005 \cdot (-3,96) = 0,396 \text{ N} = 0,04 \text{ kg}_f$$

8. Es llença un projectil de 8 kg de massa a 50 m/s formant un angle de  $37^\circ$  amb l'horitzontal. Quan arriba al punt més alt de la trajectòria esclata en dos fragments de 6 i 2 kg. El primer queda aturat momentàniament degut a l'explosió mentre que el segon surt amb major velocitat. Calculeu:

- a) Quan tardaria a caure, des de dalt, si no hagués esclatat?  
 Calculem primer les components de la velocitat inicial:  
 $v_{ox} = v_x = 50 \cos 37^\circ \approx 40 \text{ m/s}$  ;  $v_{oy} = 50 \sin 37^\circ \approx 30 \text{ m/s}$   
 En baixar tarda el mateix que tarda en pujar.  
 Calculem el temps per arribar a dalt, tenint present que llavors  $v_y = 0$  :  
 $v_y = v_{oy} + at$  ;  $0 = 30 + (-10)t$  ;  $t = 3 \text{ s}$
- b) A on hauria caigut el projectil sencer?  
 Al cap de  $3 + 3 \text{ s}$  hauria arribat a terra al punt:  
 $x = v_x t = 40 \cdot 6 = 240 \text{ m}$  ;  $\vec{r} = 240\vec{i} \text{ m}$
- c) Amb quina velocitat hauria arribat a terra?  
 $v_y = v_{oy} + at = 0 + (-10)3 = -30 \text{ m/s}$  ;  $v_x = v_{ox} = 40 \text{ m/s}$   
 $\vec{v} = 40\vec{i} - 30\vec{j} \text{ m/s} = 50 \text{ m/s} \angle -37^\circ$
- d) Quina velocitat inicial tindrà el segon fragment?  
 A l'explosió es conserva la quantitat de moviment:  
 $\vec{p} = \vec{p}_0$  ;  $8 \cdot 40\vec{i} = 6 \cdot \vec{0} + 2 \cdot \vec{v}$  ;  $\vec{v} = 320\vec{i}/2 = 160\vec{i} \text{ m/s}$
- e) Quant tardaran en arribar a terra els fragments?  
 Com que no tenen  $v_{oy}$  igual que en a) : 3 s ambdós
- f) A on anirà a caure cada fragment?  
 Tots dos parteixen d'una  $x_0 = 120 \text{ m}$ , però el primer no té  $v_x$   
 $x_1 = x_{10} + v_{1x}t = 120 + 0 \cdot 3 = 120 \text{ m}$  ;  $\vec{r}_1 = 120\vec{i} \text{ m}$   
 $x_2 = x_{20} + v_{2x}t = 120 + 160 \cdot 3 = 600 \text{ m}$  ;  $\vec{r}_2 = 600\vec{i} \text{ m}$
- g) On està el c.d.m. quan arribin a terra?  
 $\vec{r}_{cdm} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/M = (6 \cdot 120\vec{i} + 2 \cdot 600\vec{i})/8 = 240\vec{i} \text{ m}$
- h) Quina velocitat tindrà llavors el c.d.m?  
 $\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{a}t = \vec{0} + (-10\vec{j})3 = -30\vec{j} \text{ m/s}$   
 $\vec{v}_2 = \vec{v}_{20} + \vec{a}t = 160\vec{i} + (-10\vec{j})3 = 160\vec{i} - 30\vec{j} \text{ m/s}$   
 $\vec{v}_{cdm} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/M =$   
 $= [6 \cdot (-30\vec{j}) + 2 \cdot (160\vec{i} - 30\vec{j})]/8 = 40\vec{i} - 30\vec{j} \text{ m/s}$
- i) Es compleix llavors que  $\vec{I} = \Delta\vec{p}$ ?  
 $\vec{I} = \vec{F}_{ext}\Delta t = M\vec{g}\Delta t = 8 \cdot (-10\vec{j}) \cdot 3 = -240\vec{j} \text{ N}\cdot\text{s}$   
 $\vec{p}_{total} = Mv_{cdm} = 8 \cdot (40\vec{i} - 30\vec{j}) = 320\vec{i} - 240\vec{j}$   
 $\vec{p}_{total0} = Mv_{cdm0} = 8 \cdot 40\vec{i} = 320\vec{i}$   
 $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{total} - \vec{p}_{total0} = 320\vec{i} - 240\vec{j} - 320\vec{i} = -240\vec{j} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$