Solucions

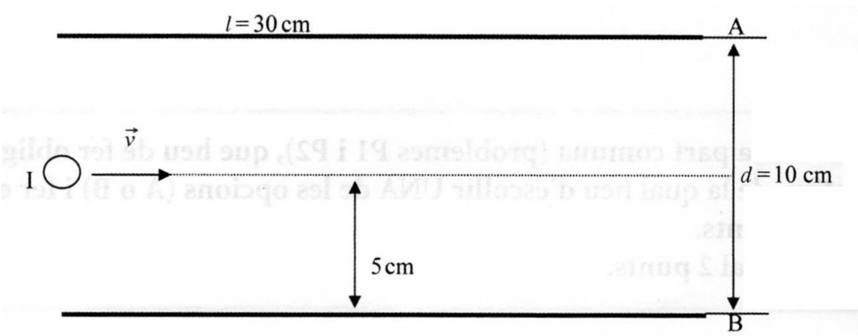
PAU

Sèrie 1

juny de 2011

FÍSICA

1. Entre dues plaques metàl·liques conductores, de 30 cm de llargària, hi ha un camp elèctric uniforme vertical, d'intensitat $E = 10^4$ V/m.



DADES: $m_{\text{electró}} = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg; $q_{\text{electró}} = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

a) A quina velocitat $\vec{v}$ (horitzontal) s'ha de llançar un electró des de la posició I, a l'entrada del camp, perquè en surti fregant un dels extrems (A o B) de les plaques?

Suposem que el camp es dirigeix de dalt a baix, llavors l'electró s'accelerarà cap amunt.

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{E_y q}{m} = \frac{-10^4 \cdot -1,602 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 1,758 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

$$\Delta y = \frac{a_y t^2}{2} \qquad 0,05 = \frac{1,758 \cdot 10^{15} t^2}{2} \qquad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05}{1,758 \cdot 10^{15}}} = 7,542 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$\Delta x = v_x t \qquad 0,3 = v_x 7,542 \cdot 10^{-9} \qquad v_x = \frac{0,3}{7,542 \cdot 10^{-9}} = 3,98 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

b) Expliqueu raonadament quin tipus de trajectòria descriu l'electró dins del camp. Calculeu el treball que fa la força elèctrica que actua sobre l'electró en el recorregut que descriu pel camp.

Es tracta d'un moviment parabòlic, perquè la velocitat horitzontal es manté constant però hi ha una acceleració vertical.

El treball es pot calcular de diverses maneres, per exemple amb la definició del treball

$$W = F_y \Delta y = E_y q \Delta y = -10^4 \cdot -1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05 = 8,01 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

O mitjançant l'energia potencial

$$\Delta V = -E_y \Delta y = -\left(-10^4\right) \cdot 0,05 = 500 \text{ V}$$

$$W_c = -\Delta E_p = -q\Delta V = -\left(-1,602 \cdot 10^{-19}\right) \cdot 500 = 8,01 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

També es pot fer amb l'energia cinètica

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + 1,758 \cdot 10^{15} \cdot 7,542 \cdot 10^{-9} = 1,33 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(3,98 \cdot 10^7)^2 + (1,33 \cdot 10^7)^2} = 4,195 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$W = \Delta E_c = \frac{9,11 \cdot 10^{-31}\left(4,195 \cdot 10^7\right)^2}{2} - \frac{9,11 \cdot 10^{-31}\left(3,98 \cdot 10^7\right)^2}{2} = 8,01 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

2. Disposem de les dades següents del Sistema Solar

DADES: $1\,\text{UA} = 1,496 \times 10^{11}\,\text{m}$; $R_{\text{Terra}} = 6,378 \times 10^6\,\text{m}$;
$M_{\text{Terra}} = 5,974 \times 10^{24}\,\text{kg}$; $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}$.

Planetes	*Distància mitjana al Sol (UA)*	*Període orbital (anys)*	*Radi mitjà* / R_{Terra}	*Massa*/M_{Terra}
Mercuri	0,387	0,240 8	0,386	0,055
Venus	0,723	0,615 2	0,949	0,815
Terra	1	1,000	1	1
Mart	1,52	1,881	0,532	0,107
Júpiter	5,20	11,86	11,2	318
Saturn	9,54	29,45	9,45	95
Urà	19,2	84,02	4,01	14
Neptú	30,1	164,8	3,88	17

a) Calculeu el valor de la constant de la tercera llei de Kepler per a Venus, Júpiter i Saturn. Expresseu-la amb les xifres significatives adequades i amb les unitats que figuren en la taula. Amb els valors calculats, determineu el valor més correcte de la constant per al Sistema Solar.

El quadrat del període és proporcional al cub del radi

$$F_c = ma_n \qquad \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 = Cr^3$$

$$C_V = \frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{0,6152^2}{0,723^3} = 1,0014 \text{ any}^2/\text{UA}^3$$

$$C_J = \frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{11,86^2}{5,20^3} = 1,0004 \text{ any}^2/\text{UA}^3$$

$$C_S = \frac{T_S^2}{r_S^3} = \frac{29,45^2}{9,54^3} = 0,9989 \text{ any}^2/\text{UA}^3$$

$$C = \frac{C_V + C_J + C_S}{3} = \frac{1,0014 + 1,0004 + 0,9989}{3} = 1,00 \text{ any}^2/\text{UA}^3$$

b) Calculeu la massa del Sol i l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart.

Cal passar C a unitats SI

$$1,00\frac{\text{any}^2}{\text{UA}^3} \cdot \left(\frac{365,25 \text{ dia}}{1 \text{ any}}\right)^2 \cdot \left(\frac{86400 \text{ s}}{1 \text{ dia}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 \text{ UA}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}\right)^3 = 2,975 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

$$C = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad M = \frac{4\pi^2}{CG} = \frac{4\pi^2}{2,975 \cdot 10^{-19} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Per calcular g a Mart substituirem pels valors terrestres

$$g_M = \frac{GM_M}{r_M^2} = \frac{G \cdot 0,107 M_T}{(0,532 r_T)^2} = 0,378\frac{GM_T}{r_T^2} = 0,378 \cdot 9,8 = 3,7 \text{ m/s}^2$$

3A. En l'últim campionat mundial de futbol, la *vuvuzela*, un instrument musical d'animació molt sorollós, atesa la forma cònica i acampanada que té, va despertar una gran controvèrsia per les molèsties que causava. Aquest instrument produeix el so a una freqüència de 235 Hz i crea uns harmònics, és a dir, sons múltiples de la freqüència fonamental (235Hz), d'entre 470 Hz i 1645 Hz de freqüència. La *vuvuzela* és molt irritant, perquè els harmònics amb freqüències més altes són els més sensibles per a l'oïda humana.

NOTA: Considereu que el tub sonor és obert pels dos cantons.

DADES: $v_{\text{so aire}} = 340$ m/s; $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

a) Amb les dades anteriors, calculeu la longitud aproximada d'una *vuvuzela*.

En estar oberts els extrems tenen ventres, és a dir punts de màxima amplitud, i per tant entre ells hi haurà mitja longitud d'ona de la freqüència fonamental

$$\lambda f = v \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{235} = 1,447 \qquad L = \frac{\lambda}{2} = \frac{1,447}{2} = 0,723 \text{ m}$$

b) Un espectador es troba a 1 m d'una *vuvuzela* i percep 116 dB. Molest pel soroll, s'allunya fins a una distància de 50 m. Quants decibels percep, aleshores?

Calcularem la intensitat a 1 m, després la potència i finalment la intensitat a 50 m

$$B_1 = 116 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}} \qquad I_1 = 10^{-12} \cdot 10^{11,6} = 0,398 \text{ W/m}^2$$

$$P = I_1 S_1 = 0,398 \cdot 4\pi 1^2 = 5 \text{ W}$$

$$I_2 = \frac{P}{S_2} = \frac{5}{4\pi \cdot 50^2} = 1,592 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

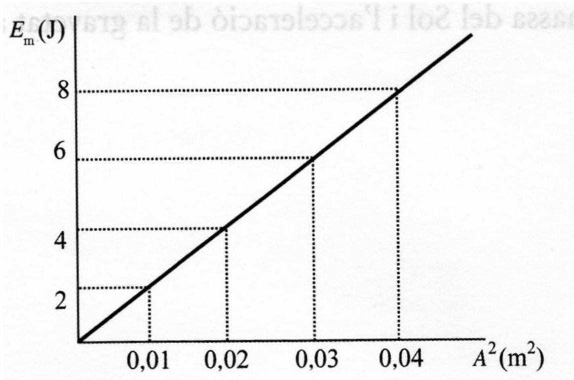
$$B_2 = 10 \log \frac{1,592 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 82 \text{ dB}$$

Alternativament, si es parteix del fet que a les ones tridimensionals la intensitat és inversament proporcional al quadrat de la distància, podem escriure

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \qquad B_2 - B_1 = 20 \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{r_1}{r_2} = 116 + 20 \log \frac{1}{50} = 82 \text{ dB}$$

4A. Una massa de $0,5$ kg descriu un moviment harmònic unida a l'extrem d'una molla, de massa negligible, sobre una superfície horitzontal sense fregament. En la gràfica següent es relaciona el valor de l'energia mecànica de la molla amb el quadrat de l'amplitud d'oscil·lació del moviment harmònic:



Calculeu:

a) El valor de la freqüència d'oscil·lació.

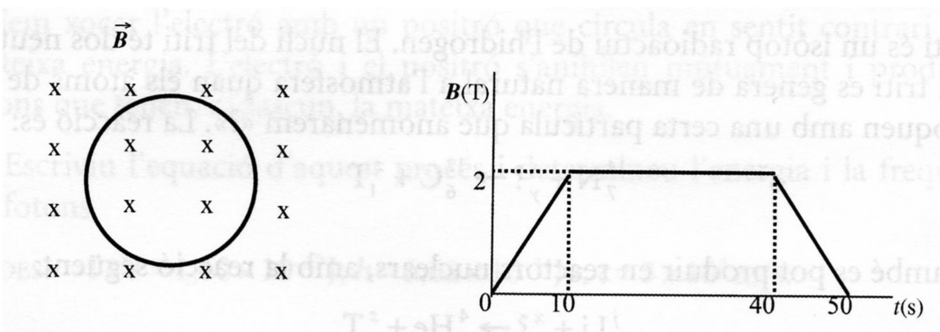
$$E = \frac{kA^2}{2} \qquad 8 = \frac{k0,04}{2} \qquad k = \frac{8 \cdot 2}{0,04} = 400 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{0,5}} = 28,28 \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{28,28}{2\pi} = 4,5 \text{ Hz}$$

b) El valor de la velocitat màxima de la massa quan l'amplitud d'oscil·lació del moviment és 0,1414 m.

$$v_{\max} = \omega A = 28,28 \cdot 0,1414 = 4 \text{ m/s}$$

5A. Una espira de radi $r = 25$ cm està sotmesa a un camp magnètic que és perpendicular a la superfície que delimita l'espira i de sentit entrant. En la gràfica següent es mostra el valor de la inducció magnètica B en funció del temps



a) Expliqueu raonadament si circula corrent elèctric per l'espira en cadascun dels intervals de temps indicats i determineu-ne, si s'escau, el sentit de circulació.

Entre 0 i 10 s augmenta el flux magnètic a l'espira. Segons la llei de Faraday i de Lenz apareixerà un corrent induït que s'oposarà a aquest augment creant un camp magnètic de sentit emergent del paper. Això, per la regla de la mà dreta, implica un corrent de sentit antihorari.

Entre 10 i 40 s el flux magnètic no varia i per tant no hi ha corrent.

Entre 40 i 50 s disminueix el flux magnètic a l'espira. Segons la llei de Faraday i de Lenz apareixerà un corrent induït que s'oposarà a aquest disminució creant un camp magnètic de sentit entrant. Això, per la regla de la mà dreta, implica un corrent de sentit horari.

b) Calculeu la intensitat de corrent elèctric en cada interval de temps, si la resistència de l'espira és 5 Ω.

Durant els deu primers segons

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \Phi = BS\cos\alpha = B\pi r^2 = 2\pi 0,25^2 = 0,3927 \text{ Wb}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0,3927}{10} = -0,0393 \text{ V} \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-0,0393}{5} = -0,0079 \text{ A}$$

El signe negatiu només significa que va en sentit contrari al considerat positiu (cap dins del paper). En els darrers deu segons donaria igual, però en aquest cas en positiu.

3B. El triti és un isòtop radioactiu de l'hidrogen. El nucli del triti té dos neutrons.

a) El triti es genera de manera natural a l'atmosfera quan els àtoms de nitrogen xoquen amb una certa partícula que anomenarem «?». La reacció és:

$${}^{14}_{7}N \;+\; {}^{x}_{y}? \;\rightarrow\; {}^{12}_{6}C \;+\; {}^{z}_{1}T$$

També es pot produir en reactors nuclears, amb la reacció següent:

$${}^{j}_{k}Li \;+\; {}^{x}_{y}? \;\rightarrow\; {}^{4}_{2}He \;+\; {}^{z}_{1}T$$

Determineu els valors dels índexs x, y, z, j i k.

$$z = 1 \text{ protó } + 2 \text{ neutrons} = 3 \qquad 14 + x = 12 + 3 \qquad x = 1$$

$$7 + y = 6 + 1 \qquad y = 0 \qquad ? \;=\; {}^{1}_{0}n$$

$$j + 1 = 4 + 3 \qquad j = 6 \qquad k + 0 = 2 + 1 \qquad k = 3$$

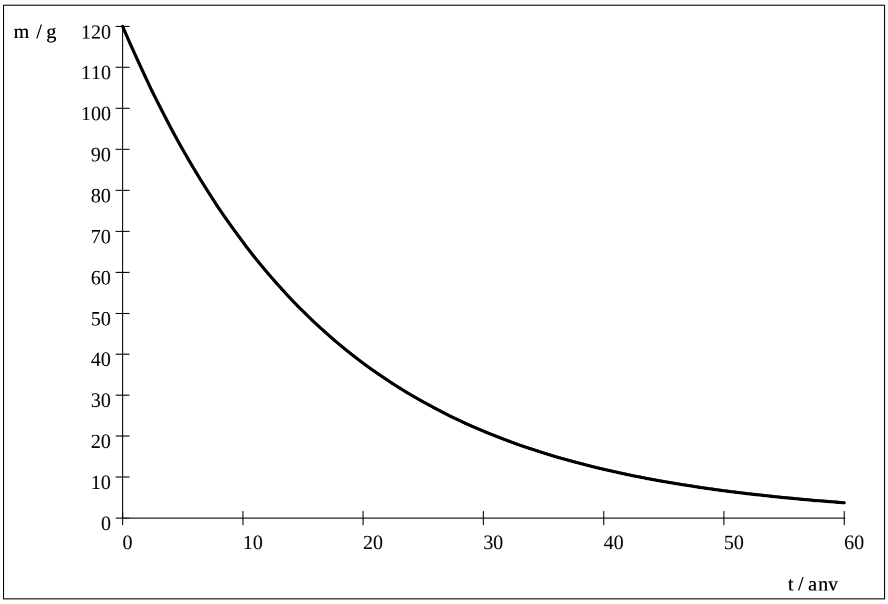
b) El període de semidesintegració del triti és, aproximadament, de dotze anys. Elaboreu una gràfica amb les variables de massa i temps en què s'observi com varia la quantitat de triti d'una mostra que inicialment és de 120 g durant els seixanta anys següents.

El més senzill és anar comptant que cada període de semidesintegració en queda la meitat

t /any	0	12	24	36	48	60
m /g	120	60	30	15	7,5	3,75

Però si es vol es pot dibuixar la gràfica amb la funció

$$k = \frac{\ln 2}{12} = 0,05775 \text{ any}^{-1} \qquad m = m_0 \exp(-kt) = 120 \exp(-0,05775t)$$



4B. Una antena de telefonia mòbil instal·lada al terrat d'un edifici emet ones electromagnètiques de 900 MHz de freqüència amb una potència de 4 W.

DADES: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s; 1 eV $= 1,602 \cdot 10^{-19}$ J

a) Calculeu quants fotons emet l'antena en un minut.

$$E_{fotó} = hf = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 900 \cdot 10^6 = 5,96 \cdot 10^{-25} \text{ J/fotó}$$

$$E = Pt = 4 \cdot 60 = 240 \text{ J} \qquad \frac{240 \text{ J}}{5,96 \cdot 10^{-25} \text{ J/fotó}} = 4,03 \cdot 10^{26} \text{ fotó}$$

b) Valoreu si els fotons que emet l'antena poden produir efecte fotoelèctric en un metall que és a prop, tenint en compte que l'energia d'extracció mínima dels electrons del metall és 4, 1 eV. En cas afirmatiu, calculeu l'energia cinètica dels electrons extrets. Si l'antena emet amb una potència de 8 W, com variarà l'efecte fotoelèctric que es pugui produir en el metall?

$$5,96 \cdot 10^{-25} \text{ J } \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

L'energia és totalment insuficient. D'altra banda augmentar la potència a 8 W no afectaria l'energia dels fotons sinó a la seva quantitat.

5B. La massa d'un electró en repòs és $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Un accelerador lineal n'incrementa la velocitat fins que la massa de l'electró és deu vegades més gran.

DADES: 1 eV $= 1,60 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Calculeu l'energia cinètica que ha guanyat l'electró, expressada en J i en MeV.

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = 9,11 \cdot 10^{-30} \left(3 \cdot 10^8\right)^2 - 9,11 \cdot 10^{-31} \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 7,38 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$7,38 \cdot 10^{-13} \text{ J } \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot \frac{1 \text{ MeV}}{10^6 \text{ eV}} = 4,61 \text{ MeV}$$

Fem xocar l'electró amb un positró que circula en sentit contrari i que té la mateixa energia. L'electró i el positró s'anihilen mútuament i produeixen dos fotons que tenen, cadascun, la mateixa energia.

b) Escriviu l'equació d'aquest procés i determineu l'energia i la freqüència dels fotons.

$${}^{-1}_{0}e^- + {}^{1}_{0}e^+ \rightarrow 2\,{}^{0}_{0}\gamma$$

L'energia de cada fotó serà igual a la de l'electró (cinètica més massa en repòs)

$$E = mc^2 = 9,11 \cdot 10^{-30} \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 8,199 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$E = hf \qquad 8,199 \cdot 10^{-13} = 6,62 \cdot 10^{-34} f \qquad f = \frac{8,199 \cdot 10^{-13}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 1,24 \cdot 10^{21} \text{ Hz}$$