Institut Pere Vives Vich
2n Batxillerat[1]

TREBALL I ENERGIA

1. Un automòbil de 1200 kg s'accelera de 0 a 90 km/h en 8 s. Negligint el fregament amb l'aire, calculeu:

a) La potència (suposada constant)
Calculem la potència amb 90 km/h = 25 m/s
$P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E_c}{t} = \frac{1200 \cdot 25^2/2}{8} = 46875 \text{ W} = 46,9 \text{ kW}$

b) El temps que tardarà en passar de 90 a 126 km/h
Amb la potència anterior i 126 km/h = 35 m/s
$t = \frac{\Delta E_c}{P} = \frac{1200\left(35^2 - 25^2\right)/2}{46875} = 7,7 \text{ s}$

2. Calculeu la potència d'un cotxe de 1200 kg que té la següent equació del moviment: $x = 6t^{3/2}$

Trobarem primer la velocitat i l'acceleració:

$$v = x' = 9t^{1/2} \qquad ; \qquad a = v' = \frac{9}{2}t^{-1/2}$$

Finalment la força i la potència:

$$F = ma = 1200 \cdot \frac{9}{2}t^{-1/2} = 5400t^{-1/2}$$
$$P = Fv = 5400t^{-1/2} \cdot 9t^{1/2} = 48600 \text{ W} = 48,6 \text{ kW}$$

[1] /home/ernest/LaTeX/treballs.tex

3. Un cos de 4 kg té una energia potencial: $E_p = x^4 - 2x^2 + 1$. Determineu:

a) En quines posicions està en equilibri estable i inestable?
L'equilibri es produeix quan la força s'anul·la:
$F = -\frac{dE_p}{dx} = -E'_p = -4x^3 + 4x = 0 \quad ; \quad 4(x^2-1)x = 0 \quad ; \quad x = 0,\, 1,\, -1$
$x = 0$, és un màxim perquè $E''_p = 12x^2 - 4$ i $E''_p(0) = -4 < 0$
$x = 1$, és un mínim perquè $E''_p(1) = 12 - 4 = 8 > 0$, i també per $x = -1$
Així doncs, $x = 0$ és un punt d'equilibri inestable i $x = 1, -1$ estable.

b) Si la seva energia mecànica val 9 J, quina velocitat portarà en aquests punts?
$E_p(0) = 0^4 - 2\cdot 0^2 + 1 = 1 \text{ J} \quad ; \quad E_p(1) = E_p(-1) = 1^4 - 2\cdot 1^2 + 1 = 0 \text{ J}$
$E_c + E_p = E = 9 \quad ; \quad \frac{4v^2}{2} = 9 - E_p \quad ; \quad v^2 = \frac{9-E_p}{2} \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{9-E_p}{2}}$
$v(0) = \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \pm 2 \text{ m/s} \quad ; \quad v(1) = v(-1) = \sqrt{\frac{9-0}{2}} = \pm 2,12 \text{ m/s}$

4. D'una molla de constant elàstica 100 N/m i que penja lliurement del sostre hi pengem una massa de 4 kg i la deixem anar. La massa cau però finalment s'atura, immediatament torna a pujar i així successivament. Determineu:

a) L'allargament màxim de la molla.
Sigui x l'allargament i apliquem la conservació de l'energia:
L'energia final és elàstica, la inicial gravitatòria amb una altura x.
$E = E_0 \quad ; \quad \frac{kx^2}{2} = mgx \quad ; \quad x = \frac{2mg}{k} = \frac{2\cdot 4\cdot 10}{100} = 0,8 \text{ m}$

b) L'equació del moviment harmònic que descriu.
El moviment harmònic oscil·la $0,8$ m, per tant la seva amplitud és $0,4$ m.
La pulsació val: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$ rad/s.
Com que comença des del punt de màxima elongació la fase inicial val 90^o
L'equació queda: $y = 0,4\sin(5t + \pi/2)$

5. A dalt d'un pla inclinat de 6 m d'alt i 8 m de base hi ha un cos de 2 kg de massa que té un coeficient de fregament de $0,2$. Col·locada sobre el pla, a mode de topall, i subjecta a l'extrem de baix hi ha una molla d'1 m de llarg i constant elàstica 300 N/m. Es deixa caure el bloc que, després de recórrer 9 m, topa amb la molla i la comprimeix fins a aturar-se. Calculeu la màxima deformació de la molla.

El pla té $\sqrt{6^2+8^2} = 10$ m de llarg. Fins la molla (d'1 m) queden $10 - 1 = 9$ m.

L'angle del pla compleix: $\sin\theta = \frac{6}{10} = 0,6$ i $\cos\theta = \frac{8}{10} = 0,8$ i no cal calcular-lo.

Sigui x la deformació, llavors la molla tindrà $1 - x$ de llargada. L'altura valdrà $(1-x)\sin\theta = (1-x)\cdot 0,6$.

La força de fregament val: $F_f = \mu N = \mu mg\cos\theta = 0,2\cdot 2\cdot 9,8\cdot 0,8 = 3,136$ N

L'objecte recorre 9 m abans d'arribar a la molla i x després. En total $d = 9 + x$.

El treball serà: $W_{NC} = F_f d \cos 180^o = -F_f d = -3,136 \cdot (9 + x)$

L'energia inicial és la gravitatòria: $E_0 = E_p = mgh = 2 \cdot 9,8 \cdot 6 = 117,6$ J.

L'energia final, en canvi, té dos termes, la gravitatòria i l'elàstica:

$$E = E_p + E_e = mgh + \frac{kx^2}{2} = 2 \cdot 9,8 \cdot (1 - x) \cdot 0,6 + \frac{300x^2}{2}$$

Aplicant el teorema de l'energia mecànica tenim:

$$E - E_0 = W_{NC}$$
$$2 \cdot 9,8 \cdot (1 - x) \cdot 0,6 + \frac{300x^2}{2} - 117,6 = -3,136 \cdot (9 + x)$$
$$11,76 - 11,76x + 150x^2 - 117,6 = -28,224 - 3,136x$$
$$150x^2 - 8,624x - 77,616 = 0$$

Les solucions són: $-0,691$ i $0,749$, prenem l'arrel positiva $0,75$ m

6. Un cotxe de 900 kg està aturat davant d'un semàfor. Per darrera seu ve un altre cotxe de 1200 kg que, encara que frena, no pot evitar el xoc i els dos cotxes queden encastats. Per determinar la velocitat del cotxe infractor la policia mesura l'espai recorregut pels dos cotxes enganxats: $0,76$ m i el coeficient de fregament: $0,92$. A quina velocitat anava quan va topar?

Els dos cotxes units tenen una massa de $900 + 1200 = 2100$ kg.

La força de fregament val: $F_f = \mu mg = 0,92 \cdot 2100 \cdot 9,8 = 18934$ N

El treball serà: $W_{NC} = F_f d \cos 180^o = -F_f d = -18934 \cdot 0,76 = -14390$ J

L'energia *inicial* després del xoc és cinètica: $E_0 = E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{2100v^2}{2} = 1050v^2$

L'energia *final* serà nul·la. Apliquem ara el teorema de l'energia mecànica:

$$E - E_0 = W_{NC} \quad ; \quad 0 - 1050v^2 = -14390 \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{14390}{1050}} = 3,7 \text{ m/s}$$

Però aquesta velocitat és la final del xoc inelàstic. Aplicant la conservació $p_0 = p$:

$$m_{infrac} v_0 = m_{total} v \quad ; \quad 1200v_0 = 2100 \cdot 3,7 \quad ; \quad v_0 = \frac{2100 \cdot 3,7}{1200} = 6,5 \text{ m/s}$$

7. Una bala de 20 g s'incrusta en un bloc de fusta de 480 g unit a una molla de constant elàstica 800 N/m i que té fix l'altre extrem. Si la molla s'arriba a comprimir 30 cm, calculeu la velocitat inicial del projectil.

Des del moment del xoc, $m = 0,02 + 0,48 = 0,5$, l'energia es conserva.

L'energia final és elàstica, la *inicial* després del xoc és cinètica:

$$E = E_0 \qquad ; \qquad \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \qquad ; \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}}x = \sqrt{\frac{800}{0,5}}0,3 = 12 \text{ m/s}$$

Però aquesta velocitat és la final del xoc inelàstic. Aplicant la conservació $p_0 = p$:

$$m_{bala}v_0 = m_{total}v \qquad ; \qquad 0,02v_0 = 0,5 \cdot 12 \qquad ; \qquad v_0 = \frac{0,5 \cdot 12}{0,02} = 300 \text{ m/s}$$

8. Un projectil de 50 g es clava en un cos de $0,45$ kg de massa que penja d'un fil de 10 m de llarg. El conjunt oscil·la separant-se 60^o de la vertical. Suposant $g = 10$ m/s^2, quina era la velocitat inicial de la bala?

Des del moment del xoc, $m = 0,05 + 0,45 = 0,5$.

Deduirem ara l'altura a la qual puja el pèndol després de l'impacte:

La projecció del fil separat sobre la vertical val: $y = r\cos\theta = 10\cos 60^o = 5$ m.

Per tant, el pèndol a pujat: $h = r - y = 10 - 5 = 5$ m.

L'energia final és gravitatòria, la *inicial* després del xoc és cinètica. Aplicant la conservació:

$$E_0 = E \qquad ; \qquad \frac{mv^2}{2} = mgh \qquad ; \qquad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10 \text{ m/s}$$

Però aquesta velocitat és la final del xoc inelàstic. Aplicant la conservació $p_0 = p$:

$$m_{bala}v_0 = m_{total}v \qquad ; \qquad 0,05v_0 = 0,5 \cdot 10 \qquad ; \qquad v_0 = \frac{0,5 \cdot 10}{0,05} = 100 \text{ m/s}$$