Problemes de programació lineal de la sele.

1. En un taller de confecció es disposa de 80 metres quadrats de tela de cotó i de 120 metres quadrats de tela de llana. Es fan dos tipus de vestits, A i B. Per fer un vestit del tipus A es necessita 1 metre quadrat de cotó i 3 metres quadrats de llana; en canvi, per un vestit del tipus B calen 2 metres quadrats de cada tipus de tela.
a) Quants vestits de cada tipus s'han de fer per obtenir un benefici total màxim si per cada vestit (sigui del tipus que sigui) es guanyen 30 euros?
b) Quina seria la conclusió a la pregunta anterior si per cada vestit del tipus A es guanyen 30 euros i, en canvi, per cada un del tipus B només es guanyen 20 euros?

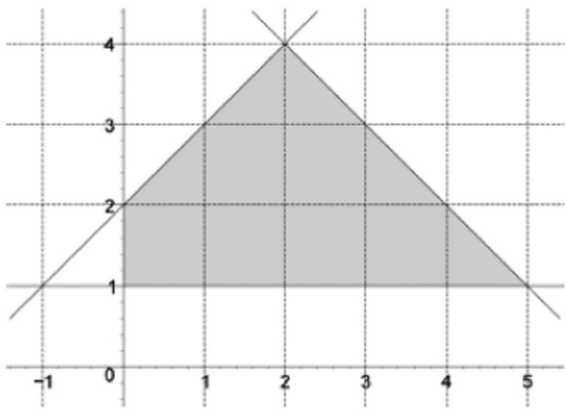
2. Un pastisser té 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos. Es necessiten 3 kg de farina, 1 de sucre i 1 de mantega per fer una dotzena de pastissos del tipus A, mentre que les quantitats per una dotzena del tipus B són, respectivament, 6 kg, 0,5 kg i 1 kg. Si el benefici que s'obté per la venda d'una dotzena de pastissos del tipus A és 20 i per una dotzena del tipus B és 30, trobeu el nombre de dotzenes de pastissos de cada tipus que ha de produir per maximitzar el seu benefici.

3. En una prova es proposen 10 qüestions de 5 punts i 8 qüestions de 10 punts i es dóna un temps de 100 minuts. Només es valoren els encerts; els errors o respostes en blanc no resten puntuació.
L'Anna, que està capacitada per contestar correctament totes les qüestions, necessita 4 minuts de mitjana per respondre a cada qüestió de 5 punts i 10 minuts per respondre a cada qüestió de 10 punts.
Quina estratègia ha de seguir l'Anna (és a dir, quantes preguntes de cada tipus ha de contestar) per obtenir la millor puntuació possible en les seves condicions?

4. El preu de cost d’una joguina és de 80 €. Venuda a 130 € la compren 1000 persones. Per cada € que augmenta o disminueix aquest preu, el nombre de compradors disminueix o augmenta, respectivament, en 60.
a) A quin preu s’ha de vendre la joguina per obtenir un benefici màxim?
b) Calculeu també el benefici màxim i el nombre de compradors corresponent.

5. Un entusiasta de la salut vol tenir un mínim de 36 unitats de vitamina A al dia, 28 unitats de vitamina C i 32 unitats de vitamina D. Cada pastilla de la marca 1 costa 0,03 A i proporciona 2 unitats de vitamina A, 2 de C i 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 costa 0,04 A i proporciona 3 unitats de vitamina A, 2 de C i 2 de D. Quantes pastilles de cada marca haurà de comprar per a cada dia si vol cobrir les necesitats bàsiques amb el menor cost possible?

6. Determineu el sistema de quatre inequacions amb dues incògnites que té per solució el polígon ombrejat dibuixat a la gràfica següent, suposant que els costats també són solució.



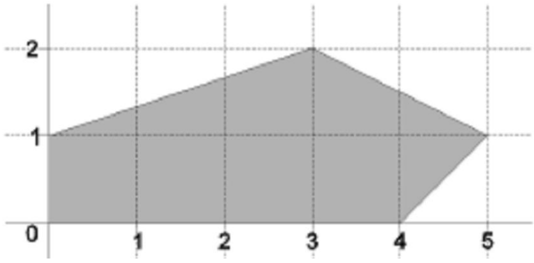
7. Sigui S la regió del pla de coordenades més grans o igual que zero i tal que els seus punts compleixen que:
(i) la mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5
(ii) el doble de l’abscissa més l’ordenada és més gran o igual que 5
a) Representeu gràficament el conjunt S.
b) Determineu en quins punts de S la funció f(x,y) = 2x + y pren el valor màxim.

8. Un curs de segon de batxillerat d’un institut té un grup que està format per 20 noies i 10 nois, que volen organitzar un viatge de fi de batxillerat. A fi de recollir diners, troben una feina de fer enquestes. L’empresa contracta equips de joves per fer enquestes durant les tardes lliures que poden ser de dos tipus:

A: parelles d'un noi i una noia.
B: equips de tres noies i un noi.

Paguen a 40 € la tarda els equips A i a 90 € la tarda els equips B.
Com els convé distribuir-se per obtenir la major quantitat possible de diners?
Quina quantitat de diners obtindran per tarda treballada?

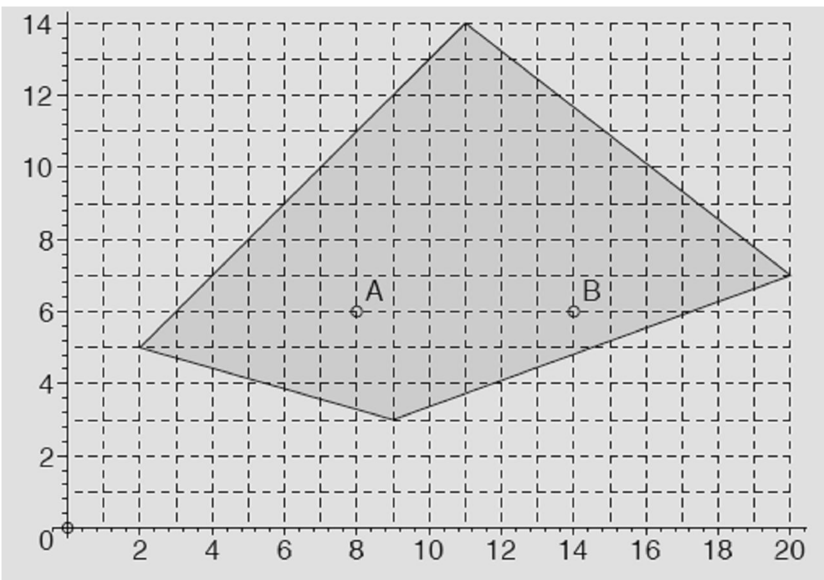
9. Trobeu els punts de la regió del dibuix on la funció $f(x,y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digueu quin és el benefici màxim.



10. En una empresa es fabriquen dos tipus de peces que anomenarem A i B. Per fabricar una peça de tipus A es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus B, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus A ni més de 20 de tipus B.
a) Doneu un sistema d'inequacions que representi les restriccions en la fabricació que té l'empresa.
b) Determineu gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.
c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall?

11. Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot A consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9€. El lot B consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11€. Calculeu quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

12. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x, y) = ax - by + c$, amb a,b,c nombres positius. Esbrineu a quin dels dos punts del gràfic A ó B la funció objectiu pren un valor major. Raoneu la resposta.



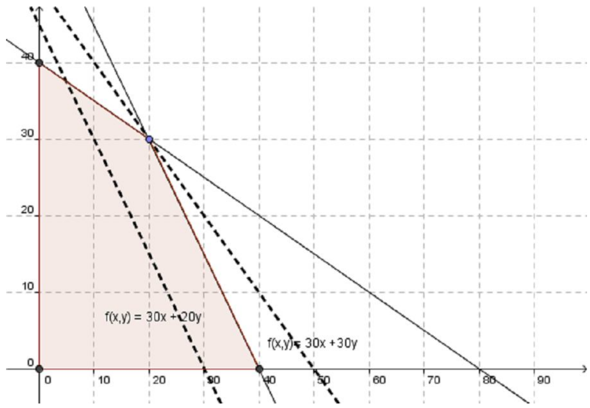
1)

f(x,y) : benefici total
x: n. de vestits tipus A
y: n. de vestits tipus B

a) f(x.y) = 30x+30y

$$\left.\begin{array}{c} x+2y \le 80 \\ 3x+2y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

b) f(x.y) = 30x+20y



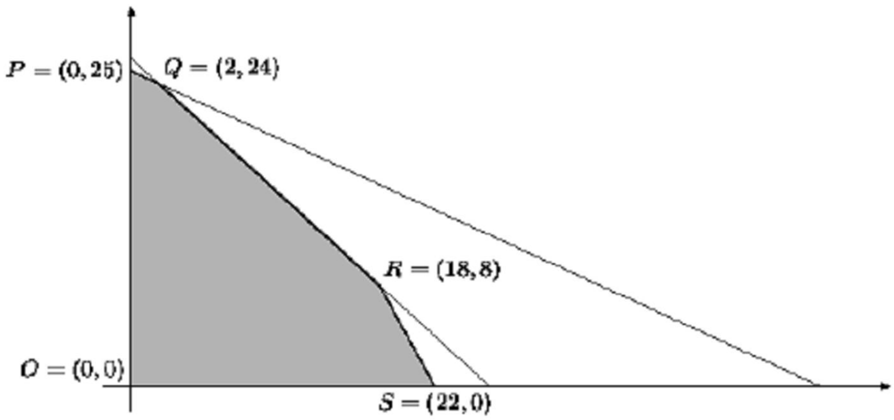
2. Fabricant x dotzenes de pastissos de tipus A i y de tipus B el benefici és:

$$g(x,y) = 20x + 30y\,.$$

Distribuïm les dades en la taula següent:

	A	B	Límit	Restricció
Farina	3	6	150	$3x+6y \le 150;\quad x+2y \le 50$
Sucre	1	0,5	22	$x+0,5y \le 22;\quad 2x+y \le 44$
Mantega	1	1	26	$x+y \le 26$

A més cal considerar les restriccions $x \ge 0$, $y \ge 0$. Representem les rectes, la regió factible i calculem els punts d'intersecció Q i R :



Per trobar els vèrtexs Q i R, els sistemes són:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+2y & = & 50 \\ x+y & = & 26 \end{array}\right\} \; Q=(2,24); \quad \left.\begin{array}{lcl} x+y & = & 26 \\ 2x+y & = & 44 \end{array}\right\} \; R=(18,8);$$

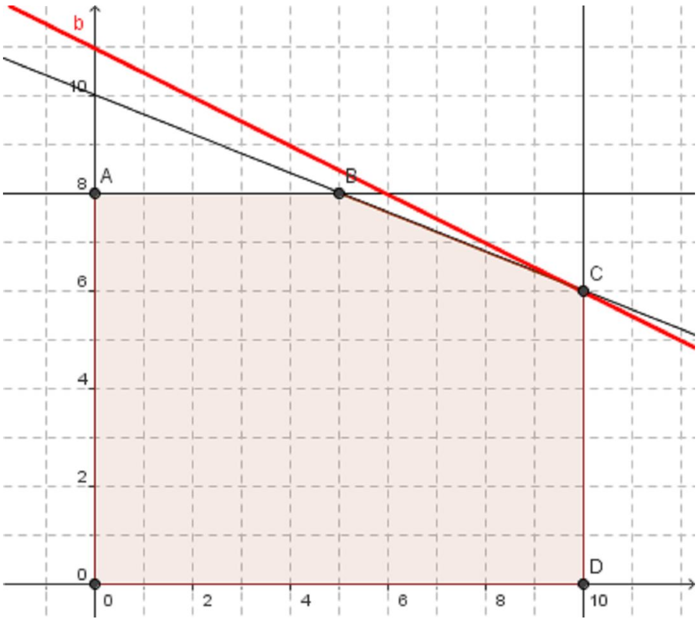
Els valors de $g(x,y)$ en els vèrtex són:

	$O=(0,0)$	$P=(0,25)$	$Q=(2,24)$	$R=(18,8)$	$S=(22,0)$
$g(x,y)$	0	750	760	600	440

Per tant, el màxim guany s'obté a $Q=(2,24)$, és a dir fabricant 2 dotzenes de tipus A i 24 dotzenes de tipus B.

Nota pels correctors: Puntueu 2 punts pel plantejament de les inequacions, 1 punt pel dibuix de la regió factible i la determinació dels vèrtexs, i 1 punt per la determinació dels valors de x i y. Cal que tingueu en compte que aquest problema és un xic difícil. Puntueu amb benevolència si hi ha raonaments correctes, encara que no s'arribi al resultat final correcte.

3



5.

Solució: Fem un esquema amb les dades de l'enunciat:

	Quantitat	A	C	D	Cost
Marca 1	x	$2x$	$2x$	$8x$	$0,03x$ €
Marca 2	y	$3y$	$2y$	$2y$	$0,04y$ €
Condicions	$x \geq 0, y \geq 0$	$2x+3y \geq 36$	$2x+2y \geq 28$	$8x+2y \geq 32$	$C = \dfrac{3x+4y}{100}$

Per tant s'ha de minimitzar el cost $C = 0,03x + 0,04y$ subjecte a les condicions

$$\begin{aligned} 2x+3y &\geq 36 \\ 2x+2y &\geq 28 \\ 8x+2y &\geq 32 \\ x \geq 0&;\ y \geq 0 \end{aligned}$$

Les interseccions són:

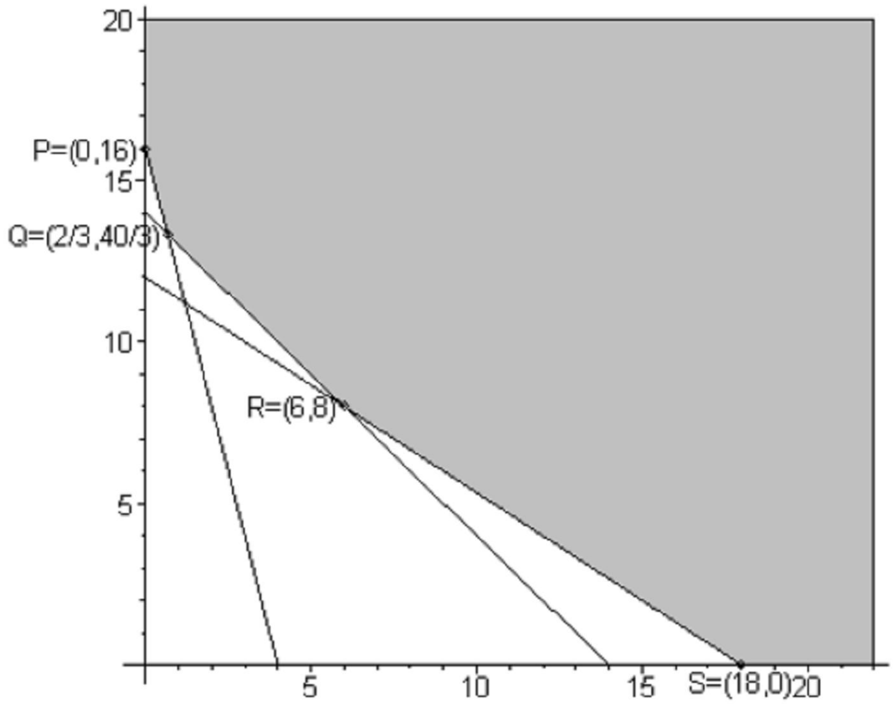
$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ 8x+2y &= 32 \end{aligned}\right\} P = (0,16)$$

$$\left.\begin{aligned} 8x+2y &= 32 \\ 2x+2y &= 28 \end{aligned}\right\} Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{40}{3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y &= 28 \\ 2x+3y &= 36 \end{aligned}\right\} R = (6,8)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y &= 36 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} S = (18,0)$$

El gràfic de la regió factible és:



Finalment, trobem el punt on el cost és mínim, que sabem que s'obté en un vèrtex (o en un costat).

	$P=(0,16)$	$Q=\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$	$R=(6,8)$	$S=(18,0)$
$C=0,03x+0,04y$	$0,64$	$\frac{166}{300}=0,5533$	$0,50$	$0,54$
			Cost mínim	

El cost mínim s'obtindrà prenent $\boxed{\text{6 pastilles de la marca 1 i 8 pastilles de la marca 2}}$. El cost és llavors de $\boxed{\text{0,50 € per dia}}$.

6.

Solució:

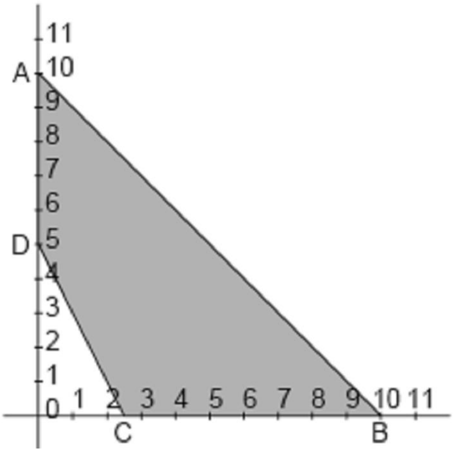
Les rectes que delimiten el triangle tenen per equacions $y=1$, $x=0$, $y=x+2$ i $x+y=6$. Observant que passa fixada la x i variant la y en direcció al semiplà ombrejat obtenim les inequacions $\boxed{y\geq 1,\ \ x\geq 0,\ \ y\leq x+2 \ \text{ i } \ x+y\leq 6.}$

7.

Solució: a) El sistema d'inequacions que representen les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 10 \\ 2x+y \geq 5 \end{cases}$$

El gràfic de la regió factible és:



Els punts d'intersecció són $A(0,10)$, $B(10,0)$, $C(5/2,0)$ i $D(0,5)$.

b) Resulta el quadre següent pels valors de la funció $f(x)=2x+y$:

	$A(0,10)$	$B(10,0)$	$C(5/2,0)$	$D(0,5)$
$f(x,y)=2x+y$	10	20	5	5

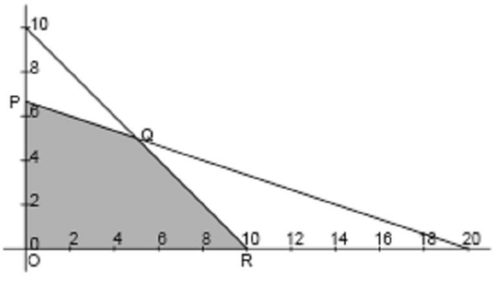
Per tant, $f(x)$ pren el valor màxim que és $\boxed{20}$, en el punt $\boxed{B(10,0)}$.

8. **Solució**: Denotem x en nombre de grups de tipus A i y el nombre de grups de tipus B. El sistema d'inequacions que impliquen les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 10 \\ x+3y \leq 20 \end{cases}$$

i la funció objectiu a maximitzar és $B(x,y)=40x+90y$.

El gràfic de la regió factible és:



El màxim s'obté en el contorn, i en particular en algun vèrtex. Determinem els punts d'intersecció. El punt Q és el punt d'intersecció de les rectes $x+y=10$ i $x+3y=20$, i és $Q=(5,5)$. Fem la taula de valors:

	$P(0,20/3)$	$Q=(5,5)$	$R=(10,0)$	$O=(0,0)$
$B(x,y)=40x+90y$	600	650	400	0

Per tant obtindran guanys màxims fent $\boxed{\text{5 equips de tipus A i 5 equips de tipus B}}$, i obtindran uns guanys de $\boxed{650 €}$.

9.

Solució: El màxim s'obté en el contorn, i en particular en algun vèrtex. Els vèrtexs del contorn són $A(0,1)$, $B(3,2)$, $C(5,1)$, $D(4,0)$, $O(0,0)$. Fem el quadre de valors.

	$A(0,1)$	$B(3,2)$	$C(5,1)$	$D(4,0)$	$O(0,0)$
$f(x,y)=2x+4y+5$	9	19	19	13	5

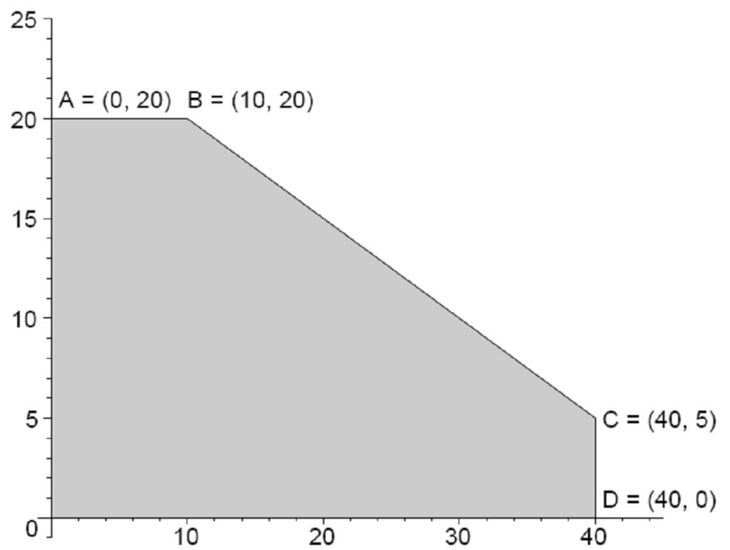
Per tant el màxim s'obté en tots els punts del $\boxed{\text{segment que va de } B(3,2) \text{ a } C(5,1)}$, i el seu valor és $\boxed{19}$.

10. c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall?

Solució: a) Anomenem x al nombre de peces de tipus A i y al nombre de tipus B.
Les condicions es tradueixen en el sistema següent:

$$\begin{cases} 2x+4y \le 100 \\ 0 \le x \le 40 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$

b) Representem la regió factible:



c) Si volem exhaurir els 100 kg de metall el punt corresponent ha d'estar sobre la recta $2x+4y=100$ o de forma equivalent $x=50-2y$. Com la y ha d'estar entre $5 \le y \le 20$, les solucions enteres són el conjunt $\boxed{\{(50-2n,n) \mid n \in \mathbf{Z}, 5 \le n \le 20\}}$, és a dir els punts $\boxed{\text{(40,5), (38,6), (36,7), … (12,19), (10,20).}}$

11.

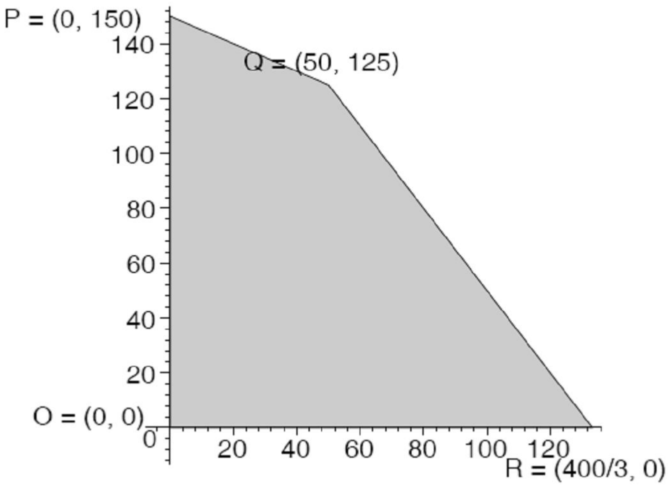
Solució: Fem la taula corresponent als dos lots amb els totals de samarretes, llapis i bolígrafs:

	Samarretes	Llapis	Bolígrafs	Preu/u
A	1	3	2	9
B	1	2	4	11
	300	400	600	

Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A+B \leq 300; \\ 3A+2B \leq 400; \\ 2A+4B \leq 600. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A+B \leq 300; \\ 3A+2B \leq 400; \\ A+2B \leq 300. \end{array}\right\}$$

La regió factible correspon al gràfic següent:



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible. Tenim:

	O=(0,0)	P=(0,150)	Q=(50,125)	R=(400/3,0)
$f(A,B)=9A+11B$	0	1650	1825	1200

Per tant, el benefici màxim s'obté venent 50 lots de tipus A i 125 lots de tipus B, i és de 1825 €.

12.

Solució: La funció objectiu en els punts A i B pren els valors:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(A) & = & 8a-6b+c \\ f(B) & = & 14a-6b+c \end{array}\right\}$$ i la diferència és: $f(B)-f(A)=6a>0.$

Per tant, $f(B)$ és més gran que $f(A)$.