1. Trobeu el terme general d'aquestes successions:

a. $\frac{1}{9}, \frac{4}{11}, \frac{9}{13}, \frac{16}{15}, \ldots$ *Solució:* $a_n = \frac{n^2}{2n+7}$

b. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots$ *Solució:* $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

c. $3, -9, 27, -81, 243, \ldots$ *Solució:* $a_n = -(-3)^n$

d. $\frac{1}{1}, \frac{3}{8}, \frac{5}{27}, \frac{7}{64}, \frac{9}{125}, \ldots$ *Solució:* $a_n = \frac{2n-1}{n^3}$

2.- Donada la successió de terme general $a_n = \frac{2n+7}{3n-4}$,

a. Trobeu el terme que es troba en el lloc 150 (és a dir a_{150})

Solució:

$$a_{150} = \frac{2 \cdot 150 + 7}{3 \cdot 150 - 4} = \frac{307}{446}$$

b. Trobeu en quin lloc es troba el terme $\frac{191}{272}$

Solució:

$$\frac{2n+7}{3n-4} = \frac{191}{272}$$
$$272 \cdot (2n+7) = 191 \cdot (3n-4)$$
$$544n + 1904 = 573n - 764$$
$$544n - 573n = -764 - 1904$$
$$-29n = -2668$$
$$n = \frac{-2668}{-29} = 92$$

El terme es trobarà al lloc 92.

3.- Sabem que $a_6 = 17$ i $a_{16} = 23$, són dos termes d'una progressió aritmètica. Calculeu

a. La diferència d i el primer terme a_1.

Solució:

$$a_{16} = a_6 + 10 \cdot d$$
$$23 = 17 + 10d$$
$$10d = 6$$
$$\boxed{d = \frac{3}{5}}$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$
$$17 = a_1 + 5 \cdot \frac{3}{5}$$
$$17 = a_1 + 3$$
$$\boxed{a_1 = 14}$$

b. El terme general.

Solució:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$
$$a_n = 14 + \frac{3}{5} \cdot (n-1)$$
$$a_n = \frac{70}{5} + \frac{3n-3}{5}$$
$$\boxed{a_n = \frac{3n+67}{5}}$$

c. La suma dels 101 primers termes de la progressió.

Solució:

$$S_{101} = \frac{(a_1 + a_{101}) \cdot 101}{2}$$
$$a_{101} = \frac{3 \cdot 101 + 67}{5} = 74$$
$$S_{101} = \frac{(14 + 74) \cdot 101}{2} = \boxed{4444}$$

4.- Si $a_4 = 6$ és un terme d'una progressió geomètrica i $r = \frac{1}{3}$, calculeu.

a. El tres primers termes de la progressió.

Solució:

$$a_3 = a_4 / r = \frac{6}{1/3} = 18$$
$$a_2 = a_3 / r = \frac{18}{1/3} = 54$$
$$a_1 = a_2 / r = \frac{54}{1/3} = 162$$

b. $S_{10}, S_{100,} S_{1000}$

Solució:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - a_1}{r-1} = \frac{162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 162}{\frac{1}{3} - 1} = 242.99588$$

$$S_{100} = \frac{a_1 \cdot r^{100} - a_1}{r-1} = \frac{162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{100} - 162}{\frac{1}{3} - 1} = 243$$

$$S_{1000} = \frac{a_1 \cdot r^{1000} - a_1}{r-1} = \frac{162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} - 162}{\frac{1}{3} - 1} = 243$$

c. La suma de tots els termes de la progressió.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{162}{1-\frac{1}{3}} = \frac{162}{\frac{2}{3}} = \frac{162 \cdot 3}{2} = 243$$

5.- Escull un d'aquests tres problemes.

a. Calcula el camí recorregut per un viatger que tarda 19 dies en fer un viatge, augmentant el recorregut en mig quilòmetre diari, i arribant a recórrer 14.5 km. el darrer dia.

Solució:

Clarament el camí recorregut diàriament és una progressió aritmètica de diferència d= 0,5 i ens demanen trobar la suma dels 19 primers termes. Per això en fa falta conèixer a_1 *i* $a_{19} = 14,5$

Per trobar a_1 *fem:*

$$a_{19} = a_1 + d \cdot (19-1)$$
$$14,5 = a_1 + 0,5 \cdot 18$$
$$14,5 = a_1 + 9$$
$$a_1 = 5,5$$

Per trobar S_{19}

$$S_{19} = \frac{(a_1 + a_{19}) \cdot 19}{2}$$
$$S_{19} = \frac{(5,5+14,5) \cdot 19}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

El camí recorregut serà de 190 km.

b. Quants anys de servei porta un obrer que va rebre com a gratificació el primer any 100€ i que va anar augmentant en 5 € cada any, fins a cobrar el darrer any 155 €? Quants diners haurà rebut en tots els anys de servei?

Solució:

És un problema semblant a l'anterior, però aquí ens falta saber la quantitat d'anys que ha estat treballant (n *). Sabem quer* $a_1 = 100$ *,* $d = 5$ *= i* $a_n = 155$

Per trobar n *fem*

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$
$$155 = 100 + 5 \cdot (n-1)$$
$$155 = 100 + 5n - 5$$
$$155 - 100 + 5 = 5n$$
$$n = \frac{60}{5} = 12$$

Per trobar S_{12} *fem*

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2}$$
$$S_{12} = \frac{(100+155) \cdot 12}{2} = \frac{255 \cdot 12}{2} = 1350$$

El treballador ha cobrat 1350 € de gratificació.

c. Durant el mes d'agost un senyor pinta la línia continua de la carretera que travessa el Sàhara. El dia 1 va pintar 5 km i cada dia pinta 100 m menys que el dia anterior; quants diners li pagaran si cobra a 0,05 € el metre pintat? *(Nota: Agost té 31 dies)*

Solució:

En aquest problema hem de fer la suma del 31 primers termes d'una progressió aritmètica. Sabem que $a_1 = 5000$ *i que* $d = -100$.

Trobem a_{31} *i* S_{31}

$$a_{31} = 5000 - 100 \cdot (31-1) = 2000$$

$$S_{31} = \frac{(a_1 + a_{31}) \cdot 31}{2} = \frac{(5000 + 2000) \cdot 31}{2} = 3500 \cdot 31 = 108500$$

El diners que li pagaran seran: 108500·0,05 = 5425 €

(2 punts)

6.- Escull un d'aquest dos problemes

a. Volem pagar un deute i pactem amb el nostre creditor els següents terminis: el primer any pagarem 1000 € i cada any incrementarem la quantitat pagada l'any anterior en 40€. Quants anys trigarem a pagar un deute de 33120 €?

Solució:

En aquest problema sabem la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica (33120) però desconeixem la quantitat de termes. Sabem el primer terme (1000) i la diferència (40)

$$a_n = 1000 + 40 \cdot (n-1) = 40n + 960$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1000 + 40n + 960) \cdot n}{2} = \frac{1960n + 40n^2}{2}$$ *, si igualem aquesta expressió a 33129 ens queda l'equació amb la qual obtindrem la quantitat d'anys.*

$$\frac{1960n + 40n^2}{2} = 33120$$

$$1960n + 40n^2 = 66240$$

$$49n + n^2 = 1656$$

$$n^2 + 49n - 1656 = 0$$

$$n = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 + 4 \cdot 1656}}{2} = \frac{-49 \pm \sqrt{9025}}{2} = \frac{-49 \pm 95}{2}$$

Les dues solucions de l'equació són 23 i -46. Però en el nostre problema la única solució que té sentit és $n = 23$

Trigarem 23 anys en pagar el deute

b. En una ciutat amb 29.524 habitants més grans de set anys, una persona s'assabenta d'una notícia a les dotze del migdia. Un minut després se la comunicat a 3 dels seus amics. Cadascú d'aquets la comunica en un altre minut a 3 persones diferents, les quals continuen proclamant la notícia de la mateixa manera, i així successivament. A quina hora s'hauran assabentat tots els habitants? *(Observació: per acabar el problema us caldrà factoritzar un nombre)*

Solució:

En aquest problema sabem la suma dels primers termes d'una progressió geomètrica (29524). Sabem també el primer terme (1) i la raó (3). Hem de trobar el termes que cal sumar per arribar el total (n)

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{3^n - 1}{3-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$\frac{3^n - 1}{2} = 29524$$

$$3^n - 1 = 59048$$

$$3^n = 59049$$

$$3^n = 3^{10}$$

$$n = 10$$

Cal factoritzar 59049 per trobar la solució del problema.

A les 12 hores 10 minuts s'hauran assabentat tots els habitats de la ciutat.