



1.- Donats els nombres complexos següents: $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 1 - i$ i $z_3 = -i$. Calcula,

a) $z_1 \cdot z_2 = (5 + 3i) \cdot (1 - i) = 5 + 3i - 5i - 3i^2 = 5 - 2i + 3 = \boxed{8 - 2i}$

b) $\overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{(5 + 3i) + (1 - i) - i} = \overline{6 + i} = \boxed{6 - i}$

c) $z_1^2 = (5 + 3i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3i + (3i)^2 = 25 + 30i + 9i^2 = 25 + 30i - 9 = \boxed{16 + 30i}$

d) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = (5 + 3i + 1 - i) \cdot (-i) = (6 + 2i) \cdot (-i) = -6i - 2i^2 = \boxed{2 - 6i}$

e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 3i}{1 - i} = \frac{(5 + 3i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{5 + 5i + 3i + 3i^2}{1 - i^2} = \frac{5 + 8i - 3}{1 + 1} = \frac{2 + 8i}{2} = \boxed{1 + 4i}$

f) $z_2^7 = (1 - i)^2 \cdot (1 - i)^2 \cdot (1 - i)^2 \cdot (1 + i) = (-2i)^3 \cdot (1 - i) = 8i \cdot (1 - i) = 8i - 8i^2 = \boxed{8 + 8i}$

Observació: $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

g) $z_3^{2721} = (-i)^{2721} = -i^{2721} = -i$. Observació: $i^{2721} = i^1$ perquè el residu de la divisió de 2721 entre 4 és igual a 1.

(0,75 punts cada apartat)

2.- Troba el valor de x de forma que el producte $(3 - 2i) \cdot (x + 3i)$ sigui un nombre real.

$(3 - 2i) \cdot (x + 3i) = 3x + 9i - 2xi - 6i^2 = 3x + 6 + (9 - 2x)i$. Aquest nombre complex serà un nombre real si la part imaginària és igual a 0. Així cal que es compleixi que:

$$9 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{9}{2}}$$

(1,25 punt)

3.- Resol les equacions següents:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

Les dos solucions de l'equació seran: $x_1 = \frac{4 + 6i}{2} = \boxed{2 + 3i}$ i $x_2 = \frac{4 - 6i}{2} = \boxed{2 - 3i}$

b) $x^3 + x - 10 = 0$

Com és una equació de tercer grau hem de trobar a ull una arrel del polinomi $x^3 + x - 10$ i descomposar per Ruffini. És fàcil comprovar que ens queda $x^3 + x - 10 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5)$.

Per resoldre l'equació $x^2 + 2x + 5 = 0$ fem servir la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

Les dos solucions d'aquesta equació seran: $x_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = \boxed{-1 + 2i}$ i

$$x_2 = \frac{-2 - 4i}{2} = \boxed{-1 - 2i}$$

Així, les solucions de l'equació de tercer grau són: $\boxed{x_1 = -1 + 2i}$, $\boxed{x_2 = -1 - 2i}$, $\boxed{x_3 = 2}$

(2,25 punts)

4.- Quins nombres complexos representen els punts dels pla que es troben a l'eix d'ordenades? I els que es troben a l'eix d'abscisses?

Els nombres complexos representen els punts dels pla que es troben a l'eix d'ordenades són els nombres imaginaris, i els que es troben a l'eix d'abscisses són els nombres reals.

(0,5 punts)

5.- Donat un nombre complex z qualsevol.

- a) Quina relació tenen les representacions gràfiques (afixos) de z i el seu conjugat $\bar{z}$?

Són simètrics respecte l'eix d'abscisses (horitzontal)

- b) Quina relació tenen les representacions gràfiques (afixos) de z i el seu oposat?

Són simètrics respecte l'origen de coordenades.

- c) Si trobem primer el conjugat i després l'oposat d'aquest, quina relació tindran les representacions gràfiques de z i el complex resultant?

El conjugat de $a + bi$ és $a - bi$. Si ara trobem l'oposat ens surtirà: $-(a - bi) = \boxed{-a + bi}$ Com es pot veure s'ha canviat el signe de la part real. L'afix serà simètric respecte l'eix d'ordenades (vertical).

(0,75 punts)