1.-a) Enuncia el teorema del residu.

b) Aplica el teorema del residu per trobar el valor de a de forma que el polinomi $p(x)=7x^5-6x^3+5ax^2-3$ sigui divisible per $x+2$.

El polinomi $p(x)$ serà divisible per $x+2$, si el residu de la divisió $p(x):(x-2)$, és igual a 0. Com el residu es pot calcular trobant el valor numèric, el que farem és igualar el valor numèric a 0.

$$p(-2)=7\cdot(-2)^5-6\cdot(-2)^3+5a\cdot(-2)^2-3=0$$
$$7\cdot(-32)-6\cdot(-8)+5a\cdot 4-3=0$$
$$-224+48+20a-3=0$$
$$20a=224-48+3$$
$$\boxed{a=\frac{179}{20}}$$

c) Quin és el residu de la divisió de $5x^{191}-6x^{97}+8x-2$ entre $x+1$?

Només cal trobar el valor numèric quan $x=-1$

$$p(-1)=5\cdot(-1)^{191}-6\cdot(-1)^{97}+8\cdot(-1)-2=-5+6-8-2=\boxed{-9}$$

2.- Troba un polinomi de grau 4 que tingui únicament les arrels següents:

a) 2,-2, 1 i 3

$$p(x)=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$$

b) 3 doble, 0 i -2

$$p(x)=(x-3)^2\cdot x\cdot(x+2)=x^4-4x^3-3x^2+18x$$

c) 3,5,7,1 i -1

És impossible ja que amb cinc arrels el polinomi seria de grau 5.

d) 2, 3 i 5

És impossible ja que amb tres arrels el polinomi seria de grau 3.

3.- Resol l'equació $x^4 + x^3 + 4x + 16 = 12x^2$

Resoldre l'equació $x^4 + x^3 + 4x + 16 = 12x^2$*, és el mateix que trobar les arrels del polinomi* $p(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16 = 0$*. Per fer això factoritzarem el polinomi mitjançant el mètode de Ruffini.*

És fàcil veure que $x = -1$ *és una arrel. Si dividim* $p(x)$ *per* $x+1$*, ens queda el polinomi* $x^3 - 12x + 16$*. Si tornem a dividir el polinomi per* $x+4$ *veurem que ens queda* $x^2 - 4x + 4$*, polinomi que sabem que és igual a* $(x-2)^2$*.*

El polinomi ens quedaria: $p(x) = (x+1)\cdot(x+4)\cdot(x-2)^2$

A cada factor lineal li correspon una arrel del polinomi, d'aquí deduïm que les arrels són -1, -4 i 2 (arrel doble). O el que és el mateix *les solucions de l'equació són: 1, -4 i 2 (solució doble).*

4.- Simplifica la fracció algebraica següent:

$$\frac{x^5 + 7x^4 + 12x^3}{x^6 - 16x^4}$$

$$\frac{x^5 + 7x^4 + 12x^3}{x^6 - 16x^4} = \frac{x^3\cdot(x^2 + 7x + 12)}{x^4\cdot(x^2 - 16)} = \frac{x^2\cdot(x+4)\cdot(x+3)}{x^4\cdot(x+4)\cdot(x-4)} = \frac{x+3}{x\cdot(x-4)} = \boxed{\frac{x+3}{x^2 - 4x}}$$

5.- Realitza les operacions següents:

a) $\dfrac{2x}{x^2 + 6x + 9} - \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$

$$\frac{2x}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{2x}{(x+3)^2} - \frac{x+3}{(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{2x\cdot(x-3)}{(x+3)^2\cdot(x-3)} - \frac{(x+3)\cdot(x+3)}{(x+3)^2\cdot(x-3)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x}{(x+3)^2\cdot(x-3)} - \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+3)^2\cdot(x-3)} = \boxed{\frac{x^2 - 12x - 9}{(x+3)^2\cdot(x-3)}}$$

Per trobar el denominador comú hem trobat el MCM de $(x+3)^2$ *i de* $(x+3)\cdot(x-3)$ *que és* $(x+3)^2\cdot(x-3)$

b) $\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+7)}{(x+5)^2\cdot(x-3)} : \dfrac{x^2+5x-14}{x^2+2x-15}$

$$\frac{(x-2)^2\cdot(x+7)}{(x+5)^2\cdot(x-3)} : \frac{x^2+5x-14}{x^2+2x-15} = \frac{(x-2)^2\cdot(x+7)\cdot(x^2+2x-15)}{(x+5)^2\cdot(x-3)\cdot(x^2+5x-14)} =$$

$$= \frac{(x-2)^2\cdot(x+7)\cdot(x+5)\cdot(x-3)}{(x+5)^2\cdot(x-3)\cdot(x+7)\cdot(x-2)} = \boxed{\frac{x-2}{x+5}}$$