

**Exercicis proposats del llibre Matemàtiques 1r de Batxillerat
(Editorial Santillana). Pàgina 26**

4.- Un dia dues amigues es troben després de molt de temps sense veure's. Interessades en conèixer la situació de cada una, durant la conversa tenen aquest diàleg:

- *Quina edat tenen ja els teus fills? –Pregunta la primera.*
- *Segur que ho endevines! –respon la segona–. El producte del nombre d'anys que tenen els tres és igual a 36 i la suma és igual al nombre de casa teva.*
- *No poc endevinar-ho –diu la primera–. Em falta una dada.*
- *Tens raó! –reconeix la segona–. El més gran és ros.*

Calcula les edats dels tres fills

Com el producte dels anys és igual a 36, anem a veure totes les possibilitats. També calcularem la suma que ens dona per intentar deduir quina de les ternes és la correcta.

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36, \text{ la suma serà igual a } 1 + 1 + 36 = 38$$

$$36 = 1 \cdot 2 \cdot 18, \text{ la suma serà igual a } 1 + 2 + 18 = 21$$

$$36 = 1 \cdot 3 \cdot 12, \text{ la suma serà igual a } 1 + 3 + 12 = 16$$

$$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9, \text{ la suma serà igual a } 1 + 4 + 9 = 14$$

$$36 = 1 \cdot 6 \cdot 6, \text{ la suma serà igual a } 1 + 6 + 6 = 13$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9, \text{ la suma serà igual a } 2 + 2 + 9 = 13$$

$$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6, \text{ la suma serà igual a } 2 + 3 + 6 = 11$$

$$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4, \text{ la suma serà igual a } 3 + 3 + 4 = 10$$

Una de les amigues diu que amb les dades que té no hi ha prou, això vol dir que el nombre de la seva casa es pot obtenir de dos o més formes diferents.

La única suma que és repeteix és 13. D'aquest fet deduïm que les edats dels fills han de ser 1, 6 i 6 o 2, 2 i 9. Com que ens diu que el més gran és ros, la solució correcta és dos fills de 2 anys i l'altre de 9.

15.- Calcula els valors de a i b perquè es compleixi la relació següent:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{a} = \frac{13}{6}$$

Primer realitzarem la suma i després imposarem que es resultats siguin iguals:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{a} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{a \cdot a}{3 \cdot a} + \frac{3 \cdot b}{3a} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{a^2 + 3b}{3 \cdot a} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow (a^2 + 3b) \cdot 6 = 13 \cdot 3a$$

A l'últim pas hem multiplicat en creu, ja que si dos fraccions són considerades iguals, no podem deduir que els numeradors i denominadors són iguals (per exemple $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$), el que podem assegurar és que són equivalents, llavors el producte en creu és el mateix.

Si dividim $(a^2 + 3b) \cdot 6 = 13 \cdot 3a$ per 3 ens queda $(a^2 + 3b) \cdot 2 = 13 \cdot a$ i si intentem aïllar la b deduïm que

$$(a^2 + 3b) \cdot 2 = 13a \Leftrightarrow 2a^2 + 6b = 13a \Leftrightarrow 6b = 13a - 2a^2 \Leftrightarrow b = \frac{13a - 2a^2}{6}$$

Encara que l'enunciat no ho diu, nosaltres suposarem que tan a com b són nombres enters positius, sinó les solucions serien infinites. Anem a veure quantes solucions positives tenim:

Si $a = 1$, llavors $b = \frac{13 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2}{6} = \frac{11}{6}$, que no és una solució possible.

Si $a = 2$, llavors $b = \frac{13 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2}{6} = \frac{26 - 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$, deduïm que $a = 2$ i $b = 3$ és una solució possible.

Si seguim fent proves observarem que per que $a = 6$ i $b = 1$ tenim una altra solució i que a partir d'aquí ($a > 6$) els valors de b són negatius.

16.- Calcula els valors de a i b perquè es compleixi la relació següent:

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{7}{b} = \frac{14}{9}$$

Si realitzem la multiplicació, ens surt que els valors a i b han de verificar la relació $\frac{7a}{3b} = \frac{14}{9}$. En una visió superficial podríem deduir que $7a = 14 \Rightarrow a = 2$ i

que $3b = 9 \Rightarrow b = 3$. Aquest parell de valors verifiquen la relació, però no són els únics, ja que la igualtat es verificarà si les dues fraccions són equivalents. És a dir, s'ha de verificar el següent:

$$7a \cdot 9 = 3b \cdot 14 \Leftrightarrow 3a = 2b \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2}$$

Qualsevol parell de valors enters que compleixin aquesta relació verificaran la relació de l'enunciat. Com és natural, hi ha infinits, ja que si a és parell, llavors b és un nombre enter.

17.- Transforma la fracció 34/125 en una altra d'equivalent el denominador de la qual sigui potència de 10.

Com que $125 = 5^3$, només caldrà multiplicar el numerador i denominador per 2^3 per obtenir una potència de deu.

$$\frac{34}{125} = \frac{34 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{272}{1000}$$

21.- Demuestra que les fraccions 1.988/5.138 i 568/1.468 són equivalents. Calcula la fracció equivalent que sigui irreductible.

Per comprovar que són equivalents podríem trobar la fracció irreductible de cadascuna i comprovar que és la mateixa. També podem veure que si multipliquem en creu ens dona el mateix resultat.

Com que $1988 \cdot 1468 = 5138 \cdot 568 = 2918384$ deduíem que són equivalents. Ara hi ha prou simplificar el màxim possible una de les fraccions per trobar la fracció irreductible. Ho farem amb la que té valors més petits.

$$568 = 2^3 \cdot 71 \quad \text{i} \quad 1468 = 2^2 \cdot 367, \quad \text{així} \quad \frac{568}{1468} = \frac{2^3 \cdot 71}{2^2 \cdot 367} = \frac{2 \cdot 71}{367} = \frac{142}{367}$$