



# Matemàtica financera



Matemàtiques. 1r Batxillerat

## Estalvi i finançament

### *Interès simple*

1. L'Anna diposita 3000 euros en una caixa al 8% anual. Quins interessos rebrà al cap d'un any? I de dos anys? I de 5 anys?

*Fixa't que cada any obté els mateixos interessos pels seus diners i per tant podem escriure la següent fórmula per calcular els interessos:*

$$I = C \cdot i \cdot n$$

*I és l'interès que s'obté*

*C és el capital dipositat*

*i és el tipus d'interès en tant per u*

*n és el temps expressat en anys.*

2. En Ferran té 6000 euros a interès simple al 7% anual. Quins interessos rebrà al cap de 10 anys?

*Aquest tipus d'interès no és el que habitualment apliquen les entitats financeres a les seves operacions.*

### *Interès compost*

*En tractar el tipus d'interès simple suposem que, al final del període liquidat, es retiren els interessos. Però aquest no és el cas habitual en les operacions financeres, sinó que el que es sol fer és ajuntar els interessos produïts al capital inicial. **D'aquesta manera els interessos produeixen interessos també.***

3. La Sra. Noèlia Estruc diposita 12000 euros en un banc durant tres anys a un tipus d'interès anual del 2,5% i no retira cap quantitat al llarg d'aquest període. Quins seran els interessos al cap de tres anys? Quants diners tindrà la Sra. Estruc en finalitzar el període de dipòsit?

a) Creus que acumular els interessos al final de l'any amb el capital inicial és el mateix que fer un augment sobre aquest capital? Raona la teva resposta.

b) Quin seria el factor pel que cal multiplicar el capital inicial per obtenir el capital del final del primer any ( $C_1$ )?

c) I per obtenir els capitals al final del segon i del tercer any ( $C_2$  i  $C_3$ ) ?

d) Quina creus que seria la fórmula per calcular el capital final si la imposició és a 10 anys? I si és per n anys?

*Com a resultat del que hem vist en l'exercici anterior, la fórmula per calcular quin serà el capital final Cf si posem un cert capital inicial C<sub>0</sub> al i per u durant un cert temps n (mesurat en anys) serà*

$$Cf = C_0 (1+i)^n$$

*Fixeu-vos que si volem calcular els interessos produïts durant aquest temps només caldrà fer la resta entre el capital final i l'inicial.*

4. Hem dipositat 100000 euros durant quatre anys a un interès compost del 6% anual. Calcula els interessos i el capital final. I si fos en 6 anys?

*De vegades els interessos es capitalitzen **semestralment, trimestralment o mensualment**. Aleshores cal expressar el tipus d'interès i el temps en funció de període de liquidació.*

$$Cf = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n} \text{ on } k \text{ és el nombre de capitalitzacions anuals}$$

*Per exemple, suposem que tenim 30000 euros a un 4% d'interès anual i la capitalització és trimestral. Si volem saber quin seria el capital al cap de tres anys, haurem de calcular:*

$$Cf = 30000 \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{12}$$

*Ja que hi ha quatre trimestres en un any, en tres anys hi hauran  $3 \times 4 = 12$  trimestres. D'altra banda el 0.04 era anual per tant l'he de dividir per 4 per tal que sigui trimestral.*

5. Tornem amb el dipòsit de la Sra. Estruc de 12000 euros al 9,5% anual en un termini de tres anys. Calculem ara el capital final segons sigui la liquidació d'interessos: anual, semestral, trimestral o mensual.

6. Esbrina com evoluciona un capital de 1500 euros, col·locat al 5,2% d'interès compost anual, al cap de quatre anys segons es produeixi la capitalització d'interessos: anualment, semestralment, trimestralment o mensualment.

7. S'inverteixen 1200 euros, al 8% d'interès compost anual durant 10 anys. Quin és el capital acumulat al cap d'aquest temps? Quins són els interessos produïts pel capital invertit?

8. Repeteix l'exercici anterior, si la capitalització és trimestral, en lloc d'anual. Què li interessa més a l'inversor?

9. Compara els interessos produïts per un euro en un any, al tipus d'interès del 8 % anual nominal si la capitalització és:

- a) anual
- b) semestral
- c) quadrimestral
- d) trimestral
- e) mensual.

10. Si es va invertir una certa quantitat al 5% durant 20 anys i es van totalitzar 3190 euros, quina va ser la quantitat invertida?

11. Calcula quin interès es va acordar si en 5 anys 1200 euros, a interès compost, han doblat el seu valor .

12. Un capital de 600 euros es col·loca a un interès del 8% anual. Dibuixa el gràfic que relaciona els parells de valors: temps-interès reportat, segons que es consideri interès simple o interès compost. Compara els dos casos.

13. Per un préstec de 1200 euros se n'han retornat 1801 , al 7 % . Quant de temps es va trigar a pagar el préstec?

14. Quant de temps es necessita per transformar 1200 euros en 3311 euros al 7% d'interès compost?

15. No recordo quan temps fa que vaig posar 60 euros al banc a un interès compost anual que ara tampoc no puc recordar. Aquest matí he anat al banc i m'han dit que si ara retirés els diners em donarien 85,11 euros, però que si espero 2 anys me'n donaran 95,63 euros. Calculeu l'interès anual que em paga el banc i els anys que fa que hi tinc els diners.

*A vegades haurem de calcular el temps transcorregut entre dues dates, com per exemple entre el 17 de març del 1999 i el 25 de juny de 1999. Podem fer els càlculs de dues maneres:*

*a) **Temps exacte:** es compten els dies exactes transcorreguts entre les dues dates, queden*

*14 dies del mes de març*

*30 dies del mes d'abril*

*31 dies del mes de maig*

*25 dies del mes de juny*

*Total 100 dies*

*b) **Temps aproximat o comercial:** es resten les dues dates*

	25	6	1999
restem	- 17	3	1999
	8	3	0

*és a dir 3 mesos i 8 dies = 90 + 8 = 98 dies*

*En aquesta modalitat els mesos tenen 30 dies cada un i els anys 360 dies.*

*Què passa si la resta no és possible? Veiem un cas: Calculem els dies que hi ha entre el 25 d'agost de 1989 i el 13 de juny de 1990. La resta seria*

$$\begin{array}{r} 13 \quad 6 \quad 1990 \\ - 25 \quad 8 \quad 1989 \end{array}$$

*Per fer possible la resta, es passa un mes a dies*

$$\begin{array}{r} 43 \quad 5 \quad 1990 \\ - 25 \quad 8 \quad 1989 \end{array}$$

*Es passa un any a mesos*

$$\begin{array}{r} 43 \quad 17 \quad 1989 \\ - 25 \quad 8 \quad 1989 \\ 18 \quad 9 \end{array}$$

*Seran 9 mesos i 18 dies =  $9 \cdot 30 + 18 = 288$  dies.*

*Per períodes de temps superiors a l'any s'utilitza normalment el temps aproximat o comercial. Només s'utilitza el temps real per períodes inferiors a un any.*

16. Hisenda m'ha revisat la declaració de renda de l'any 96 i ha descobert que he deixat de satisfer la quantitat de 140 euros. Em reclama aquesta quantitat i els seus interessos al 6% anual de la data termini de presentació de la declaració de renda del 96 (el 15 de juny del 97) i l'1 de gener de 1999. Quina quantitat he de satisfer?

17. En un judici el jutge condemna el demandat a pagar un deute de 90150 euros amb els corresponents interessos al 12 % des del moment en què es va presentar la demanda. Si la demanda es va presentar el 12-10-95 i la sentència s'ha emès el 5-4-98, quina serà la quantitat a pagar?.

## Taxa anual equivalent o TAE

*Hem vist que al augmentar la freqüència de capitalització es produeixen més interessos, i per tant, el tipus d'interès real és més gran que l'interès teòric anual anomenat també interès nominal. Però quin és el tipus d'interès que en realitat s'obté si la freqüència de capitalització és menor que un any?. Ara ho veurem:*

El Sr. Bonet té 1.000 euros i els vol posar en un compte. En una entitat financera li ofereixen un interès del 2% trimestral, mentre que en una altra l'oferta és de 8% anual. Quina triaries tu, si saps que no traurà els seus diners en tot un any?

*Has vist que és millor el cas trimestral ja que s'obté més diners al final de l'any. Doncs l'interès anual que et produiria els mateixos diners a l'acabar l'any és el TAE. Per tant podríem definir el TAE com la taxa d'interès anual a que equival una taxa determinada d'interès corresponent a un temps diferent. Dit d'una altra manera, si amb una taxa d'interès corresponent a un temps diferent d'un any s'obtenen certs interessos per un capital, la taxa d'interès que, en un any, reportaria els mateixos interessos, per al mateix capital, és la taxa anual equivalent*

*La fórmula per al seu càlcul no depèn del capital, sinó només de l'interès:*

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

*i = tipus d'interès en tant per u*

*k = freqüència de capitalització.*

18. Completa la taula següent per a un tipus d'interès nominal del 3%

Període de capitalització	TAE
Anual	
Semestral	
Trimestral	
Mensual	

19. Una entitat bancària ofereix, en dipositar un determinat capital, un 4% d'interès nominal anual, amb liquidació semestral d'interessos. Una segona entitat bancària, ofereix un 3,5% nominal anual, amb liquidació mensual d'interessos. En quina entitat és més convenient col·locar el capital?

20. S'ha invertit un capital de 6000 euros a un 4% TAE. Calcula el tipus d'interès que s'hauria d'aplicar per un període de capitalització semestral si volem que sigui equivalent al cobrament anual.

21. a) Calcula l'interès trimestral equivalent a un 3,6% TAE.

b) Comprova l'equivalència dels dos tipus d'interès per un capital de 8250 €.

## Anualitats

Una anualitat és una quantitat de diners que es paga cada cert temps a una entitat financera per tal de reunir un capital o saldar un deute.

## Anualitats d'amortització

La majoria de persones, quan volen comprar una casa o un pis, no disposen de prou diners i acudeixen a una entitat bancària perquè el avanci els diners que aniran tornant de mica en mica, juntament amb els seus interessos. El més habitual és que es vagi pagant cada mes una quantitat fixa durant un període de temps pactat fins que s'ha retornat el capital més els interessos. La fórmula que s'utilitza per a calcular l'anualitat d'amortització (el pagament fix) és la següent:

$$a = C \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$a$  = anualitat

$C$  = Capital a retornar

$n$  = n° de períodes en que pagaràs

$i$  = interès en tant per u, a cada període.

22. Un noi té un préstec de 10000 € al 8% d'interès compost anual durant tres anys. Quina és la quota d'amortització si paga al finalitzar cada un dels anys?  
Omple la taula d'amortització següent:

NO terminis (anys)	Anualitat	Interessos	Deute amortitzat	Deute pendent
1				
2				
3				

23. Ens han concedit un préstec hipotecari de 40000 € a un 5.5 % d'interès compost anual i amb una durada de cinc anys.
- Calcula l'anualitat que s'ha de pagar.
  - Completa la taula

NO terminis (anys)	Anualitat	Interessos	Deute amortitzat	Deute pendent

*La mateixa fórmula ens serveix en el cas d'amortitzar el deute en  $n$  períodes iguals encara que no siguin anuals, sinó per exemple, mensuals, trimestrals, semestrals. En aquest cas, el percentatge ha de ser mensual, trimestral, semestral.*

24. Es tracta d'amortitzar un deute de 1.500 € en tres anys al 5 per cent anual.

- a) Calculeu l'anualitat.
- b) Construïu la taula d'amortització.

25. La Maria i en Jaume s'acaben de casar i s'han comprat un pis valorat en 75000 €. Han lliurat 1000 € que tenien estalviades i han obtingut la resta d'un crèdit hipotecari a 10 anys al 6%. Calcula la quota mensual constant que hauran de pagar.

26. Calcula la quota d'amortització per un préstec de 80000 € a cinc anys, a un tipus d'interès del 8 %, suposant que els pagaments seran constants i la periodicitat mensual. Fes la taula d'amortització.

27. En Francesc i la Blanca han demanat un crèdit hipotecari a termini de 12 anys per reformar el seu habitatge . El tipus d'interès ha estat del 9,5% i les quotes mensuals seran de 300 €. Quin és l'import del crèdit que han demanat.?

28. Una entitat financera concedeix un préstec hipotecari de 15000 € a 7,5% nominal d'interès compost anual. El client efectuarà els pagaments cada semestre durant tres anys.

- a) Quina és la quota semestral a pagar pel client?.
- b) Fes la taula d'amortització d'aquest préstec.

29. Una família té un préstec hipotecari de 30000 € al 4 % d'interès compost anual durant sis anys. La família efectuarà els pagament cada mes al llarg dels sis anys. Quina quantitat abonarà cada mes a l'entitat que li ha fet el préstec.

30. Una persona paga un cotxe en 60 mensualitats de 334 euros. Si el preu dels diners està al 1% mensual quin serà el preu del cotxe si es paga al comptat?



## **Anualitats de capitalització**

*Les persones poden voler acumular un capital al llarg dels anys per diferents motius, que van des de preveure una renda per la jubilació fins a estalviar per un habitatge, tenir un fons d'inversió...La manera de fer-ho sol ser ingressant una certa quantitat en una entitat financera periòdicament durant un cert temps de manera que el capital que has anat dipositant més els interessos que han produït sigui el capital final desitjat. Per a calcular aquest capital final coneixent la quantitat fixa que ingressarem (anualitat de capitalització) s'utilitza la següent fórmula*

$$C = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

*a = anualitat de capitalització*

*C = capital que volem acumular*

*n = nº de períodes en que pagaràs*

*i = interès en tant per u, a cada període*

31. Una família pot estalviar anualment 4000 euros. i les ingressa cada primer d'any en un compte al 6% anual d'interès compost. Quants diners tindran al cap de 4 anys? Podran comprar-se el cotxe que tant volen i que val 18000 euros.?

32. La Sra. Núria Freixa, que té 35 anys, vol estalviar de cara a la seva jubilació. Amb aquesta finalitat, diposita cada any, al mes de gener, 15000 €. en un compte d'estalvi en el Banc de St. Joan. Aquest li ofereix un 9% anual, en un règim de capitalització composta. El primer pagament el va efectuar al gener de 1994, i el darrer l'efectuarà al gener de l'any 2024. El gener del 2025 es produirà la seva jubilació, i la Sra. Freixa disposarà dels seus estalvis. Quin serà l'import total que podrà rebre en aquell moment?.

33. Troba el capital final corresponent a un Pla d'Estalvi-Habitatge a dos anys, amb una quota trimestral constant de 900 € i un tipus d'interès del 12% anual.

*Si volem saber quina serà l'anualitat a pagar durant un cert temps per aconseguir un capital determinat, només cal aïllar la a de la fórmula anterior i obtindrem*

$$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}$$

34. Calcula quina quota anual caldrà pagar per rebre, al cap de deu anys, un capital de 120000 € en un règim de capitalització composta al 6.5% anual.

35. El Sr. Miquel Valls vol subscriure's a un pla d'estalvi. En el seu banc l'informen que pot decidir entre fer capitalitzacions anuals, trimestrals, trimestrals o mensuals. Esbrina quina de les opcions següents li permet de capitalitzar més diners al cap de 10 anys:

- Quotes anuals de 1800 €. al 9,25% anual.
- Quotes trimestrals de 900 € al 9,25 % anual.
- Quotes trimestrals de 450 €. al 9% anual.
- Quotes mensuals de 150 € al 9% anual.

36. El Sr. Salvador Espasa vol tenir, per al moment en què es jubili, 30000 €, amb els quals espera poder-se pagar un llarg viatge al voltant del món. Per a aquest moment encara falten 10 anys. Quina quantitat anual haurà de dipositar en un Compte d'Estalvi que ofereix un interès del 5,5% en un règim de capitalització composta?

37. Uns pares obren una llibreta pla d'estalvi juvenil per a la seva filla de deu anys. Volen assegurar-se que als vint-i-cinc anys la filla disposi d'un capital de 20000 €. L'entitat els assegura un 3,5% d'interès compost anual. Quina anualitat han d'ingressar al començament de cada any?

38. Decidim ingressar 240 euros a començament d'any durant deu anys. En els 6 primers anys ens donen un 4,6% anual i a partir del setè un 4,2%. Quin és el saldo final?

### ***Problemes d'amortització i de capitalització***

39. Quina és la mensualitat que hem de pagar per un crèdit de 60.000 EUR al 5,75 % d'interès anual durant 20 anys?

40. Un capital inicial s'ha col·locat al 6,5 % d'interès compost, amb abonament d'interessos anual i una retenció d'Hisenda del 25 % dels interessos anuals. Després de 5 anys el capital s'ha convertit en 4.440,46 EUR . Quin era el capital inicial?

41. Quant de temps ha de romandre un capital de 24.000 EUR per obtenir un capital de 38.552,89 EUR a un tipus d'interès compost anual del 9%?

42. Quant de temps ha de romandre un capital de 6.000 EUR a un tipus d'interès simple del 8% anual per arribar a tenir 6.540 EUR?

43. Ens ofereixen finançar la compra d'un cotxe amb una taxa d'interès nominal anual del 8 %. Normalment s'ha de pagar mensualment, però ens ofereixen alternativament pagar-ho cada trimestre. Quina serà la TAE en cada cas?

44. El finançament per la compra d'un cotxe consisteix en una entrada de 3.000 EUR i 24 quotes mensuals de 240 EUR cadascuna. Si la TAE és del 8%, quin és el preu al comptat del cotxe?

45. Quina és la TAE d'una imposició remunerada al 9% d'interès nominal anual amb abonament d'interessos mensual?

46. Un fons d'inversió de renda variable de 24.000 EUR s'ha convertit en 34.031,76 EUR després de 4 anys i mig. Quina TAE d'interès representa?

47. Un fons d'inversió de renda variable que es va comprar fa 5 anys per 60.000 EUR, s'ha convertit en 88.146,50 EUR un cop descomptat el 18 % que s'emporta Hisenda. Quina ha estat la TAE resultant sense el descompte d'Hisenda?

48. Es van invertir 28.800 EUR i després de 7 anys s'han convertit en 43.200 EUR. L'abonament d'interessos al compte era semestral, i els interessos s'acumulen al capital. Quin ha estat l'interès anual de la capitalització, i a quina TAE correspon?