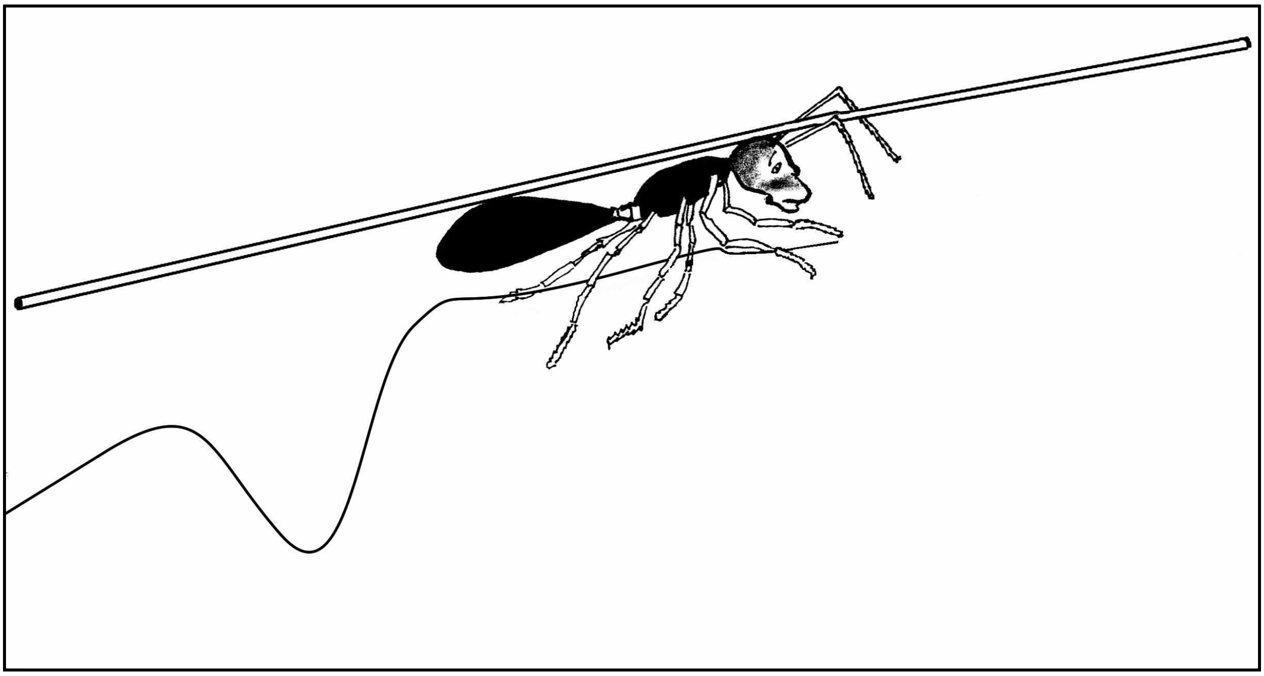
ies el SUI

LA FUNCIÓ DERIVADA



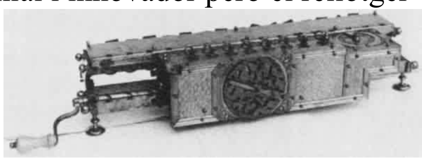
Matemàtiques. Batxillerat

LA FUNCIÓ DERIVADA

Newton i Leibnitz. La gran baralla

Pocs conceptes al llarg de la història han tingut un impacte tan gran com el concepte de la derivada. No sols en el mon de les matemàtiques si no en el mon científic i fins i tot en el social en general. (Pot ser la teoria de la relativitat d'Einstein és l'única comparable en quant a importància i impacte social)
En el camp de les matemàtiques, en particular, podem parlar d'un abans i un després. Abans de la derivada les matemàtiques eren prioritàriament geomètriques (amb regle i compàs), després les matemàtiques eren fruit d'un procés de càlcul analític i algèbric.

El descobriment de la derivada va estar envoltat de grans polèmiques. Començant per Descartes contra Fermat, desprès la gran baralla entre Berkeley i Newton i finalment la trifurca per endur-se els honors del descobriment entre Newton i Leibnitz (mireu la portada). Aquesta baralla va ser tant forta que va transcendir a la societat i es va convertit en un problema de nacionalitats, els anglesos contra França i Alemanya
La tècnica bàsica del concepte de la derivada ja la utilitzaven matemàtics anteriors com Barrow, o Fermat però al voltant del 1670 Newton va desenvolupar tot el gruix del concepte.
Leibnitz per aquella època estava ocupat en fabricar la primera màquina de fer multiplicacions de la història. El seu disseny era genial i innovador però el rellotger a qui li va encarregar va fer un aparell que s'encallava amb uns engranatges imperfectes.



Leibnitz va presentar aquest aparell la Royal Society a Londres i durant la seva estança en aquesta ciutat por ser va poder veure algun manuscrit del càlcul de Newton.
Els dos matemàtics van intercanviar alguna correspondència comentant alguns problemes diversos, però Newton era molt desconfiat i per evitar que Leibnitz copiés els seus mètodes quan feia referència al seu mètode del càlcul li escrivia amb anagrames que no s'entenien posant les vegades que sortiria cada lletra en una frase en comtes de la frase. Així en comptes de dir

Data aequatione quotcunque fluentes quantitates insolvente fluxiones inveniere, et vice versa
Li va posar:

6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 8t 12v x

Si Newton era tan desconfiat podia haver publicat els seus descobriments, però era tant cregut (possiblement amb raó) que pensava que ningú podia entendre els seus descobriments. No li faltava raó, però no perquè fos complicat si no perquè la notació que utilitzava era molt complicada.
Leibnitz, per la seva banda va desenvolupar el seu càlcul diferencial independentment que el de Newton uns 4 anys després, però el va publicar abans. Aviat va començar el creuament d'acusacions de plagi fetes per amics d'un o l'altre

o per ells mateixos amb escrits “anònims”. Les acusacions van anant incrementant fins que la situació era francament tensa.
Leibniz va sol·licitar a la Royal Society que es definís sobre l’autoria del descobriment, però aquesta societat estava controlada per Newton. Els membres de l’acadèmia, amics de Newton, van redactar un escrit (possiblement escrit pel mateix Newton) en el que donaven l’autoria absoluta a Newton.
Si haguessin tingut la paciència d’analitzar a fons els conceptes desenvolupats pels dos genis

haguessin vist que l’origen del raonament era diferent. No hi havia plagi, es complementaven. La greu conseqüència de la lluita va ser que els anglesos es van aïllar de la resta d’Europa i no van voler adoptar la genial i fàcil notació de Leibnitz (aquest ha estat un estigma constant en la trajectòria general dels anglesos). Això va endarrerir Anglaterra pel que fa al seu desenvolupament científic fins el segle XIX en que van decidir acceptar la notació de Leibnitz
Desprès de l’enterrament de Newton, Voltaire va escriure:

He vist com han enterrat a un professor de matemàtiques com si fos un magnífic Rey, i l’únic mèrit que ha fet ha estat ser gran a la seva professió.

Sobre l’enterrament de Leibnitz, però, es va escriure:

Quasi com un bandoler ha estat enterrat el més eminent savi de la seva època.

Ja que hem començat pel final (la baralla entre els dos descobridors) comencem també el dossier pel final: primer aprendrem a derivar i desprès ja intentarem entendre quin és el significat d’aquest concepte:

A. Derivades elementals

REGLES GENERALS DE DERIVACIÓ			
Regla del producte per una constant			
Regla de la suma			
Regla del producte			
Regla de quocient			
Regla de la cadena			
REGLES DE DERIVACIÓ DE FUNCIONS ELEMENTALS		**REGLES DE DERIVACIÓ DE FUNCIONS ELEMENTALS COMPOSTES**	

A.1 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions:

a) $y = 7x + 9$
b) $y = 3x^2-2$
c) $y = \sqrt{2}$
d) $y = 3x+5$
e) $y = \frac{1}{4}x+3$
f) $y = 13x^3-3x+5$
g) $y= \text{arctg } x$
h) $y = x^3 - 7x^2 + 2$
i) $y = 4x^5 - x$
j) $y = 7(2x^4 - 6x^2 + 3)$
k) $y = 4x^2-x+3$
l) $y = e^x$
m) $y = \frac{4x^2 - 5x + 2}{7}$
n) $y = \frac{1}{2x^5}$
o) $y = 4 \sin x$
p) $y = 1 - \cos x$
q) $y = \frac{1}{x^2}$
r) $y = x^{-2}$
s) $y = -x^2 + \sin x + e^x$
t) $y = \cos x-\sin x$
u) $y = \text{tg } x + \text{arctg } x$
v)

A.2 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions

a) $y = \frac{5}{6x^3}$
b) $y = \frac{\sin x}{4}$
c) $y = \sqrt[3]{x^5}$
d) $y = x^{\frac{2}{7}}$
e) $y = 2\sqrt{x} - e^x$
f) $y = -x^5 + 4x^3 - \sqrt{5}$
g) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5}$
h) $y = 6e^x$
i) $y = \ln x$
j) $y = 4 \log_3 x$
k) $y = 3^x$
l) $y = x^3$
m) $y = 3x^3-\text{arctg } x$
n) $y = 2x + \arcsin x + \arccos x$

A.3 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$
b) $y = 4x \cdot \sin x$
c) $y = (4x^2 - x + 3) \cos x$
d) $y = x\sqrt{x}$
e) $y = x^3 \cdot \cos x$
f) $y = \dfrac{3x^4 - 4x^2 + 2x - 3}{5x^3 + 6x^2 + x - 1}$
g) $y = \dfrac{3x + \cos x}{\tan x}$
h) $y = \dfrac{\ln x}{arctgx}$
i) $y = \dfrac{x^2 \cdot \sin x}{\cos x}$
j) $y = 5x^3 - 4x + \dfrac{\ln x}{3x^2 - 1} + 2$
k) $y = \dfrac{e^x}{\ln x} + 3$
l) $y = \dfrac{arctgx}{x + e^x}$
m) $y = \dfrac{5}{x^4}$
n) $y = \dfrac{e^x}{\ln x \cdot 2x^5}$

A.4 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions

a) $y = (2x - 3)^3$
b) $y = \cos(x + 4)$
c) $y = \sin^2 x$
d) $y = 3\cos(x)$
e) $y = 4x - 7$
f) $y = (1 - x)^5$
g) $y = (3x^2 - x)^6$
h) $y = \sin 3x \cdot \cos 4x$
i) $y = 10 \cos x^2$
j) $y = \sin(x^2 + x - 2)$
k) $y = x + (2x^4 + e^{3x} + \ln x)^3$
l) $y = \dfrac{1}{(3x^4 + 6x^2 - x + 2)^4}$
m) $y = 2x + (x + x^2)^2$

n) $y = 3x + 1 - \cos^2 x$
o) $y = \dfrac{\cos 3x^2}{\sin^2 2x}$

A.5 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$
2. $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 3x^3$
3. $f(x) = \frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{5} - \frac{1}{6}$
4. $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
5. $f(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$
6. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3}$
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$
8. $f(x) = (x^2 + 3x - 1)\cdot(2x^3 - 1)$
9. $f(x) = \frac{3x}{3x - 1}$
10. $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$
11. $f(x) = \frac{x^2}{5x + 2}$
12. $f(x) = \frac{3x}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 - 1}$
13. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$
14. $f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
15. $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
16. $f(x) = x^7 \cdot e^x$
17. $f(x) = (x^2 - x + 1)\cdot e^x$
18. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
19. $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$
20. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$
21. $f(x) = x \cdot 2^x$
22. $f(x) = 3^x \operatorname{Ln} x$
23. $f(x) = x \cdot \operatorname{Log} x$
24. $f(x) = \frac{\operatorname{Ln} x}{x^3}$
25. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{Ln} x}$
26. $f(x) = \frac{1}{x} + 2\operatorname{Ln} x - \frac{\operatorname{Ln} x}{x}$
27. $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$
28. $f(x) = e^x \cos x$
29. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
30. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cot} x$
31. $f(x) = x \cdot \operatorname{Arc\,sen} x$
32. $f(x) = \frac{\operatorname{Arc\,cos} x}{x}$
33. $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x$
34. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2)\cos x$
35. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x \cos x$
36. $f(x) = \operatorname{tg} x - \cot x$
37. $f(x) = \frac{x^2 \cdot e^x}{\operatorname{Ln} x}$
38. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)\operatorname{sen} x + 3x\cos x$
39. $f(x) = x \cdot \operatorname{Ln} x \cdot \cos x$
40. $f(x) = x^3 e^x \operatorname{sen} x \cos x$

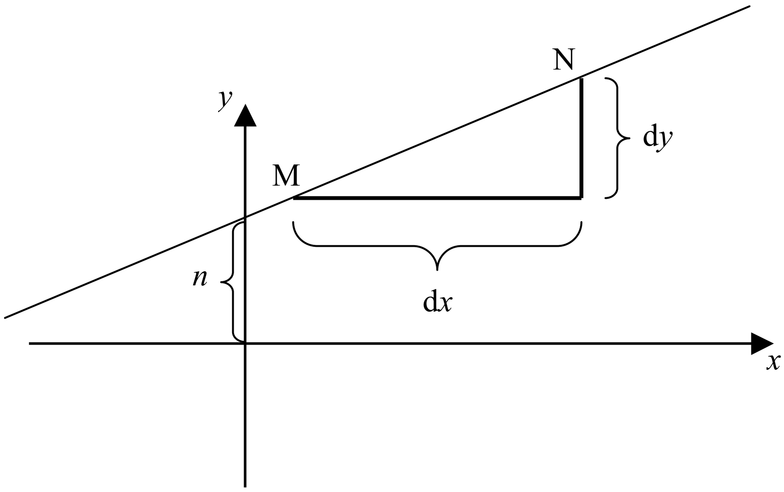
A.6 Troba, utilitzant les regles de derivació, les funcions derivades de les següents funcions

1. $f(x) = (1+3x^4)^5$
2. $f(x) = (1 + x + x^2)^3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^4}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^3}$
5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{2+5x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$
8. $f(x) = (5x^3+1)^3 \cdot (x^2+x+1)^4$
9. $f(x) = (5-3\cos x)^4$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$
12. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$
13. $f(x) = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$
15. $f(x) = (1+\operatorname{sen} 5x)^4$
16. $f(x) = \sqrt{x e^x + x}$
17. $f(x) = \sqrt[3]{2^x + x}$
18. $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{ln} x)$
19. $f(x) = \operatorname{Arc\,cos} \sqrt{x}$
20. $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
21. $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
22. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
23. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}(e^x)$
24. $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$
25. $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} x)$
26. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x$
27. $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$
28. $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$
29. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$
30. $f(x) = \left[\dfrac{x^2+x+1}{x^3-6}\right]^5$
31. $f(x) = \left[\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right]^3$
32. $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$
33. $f(x) = \sec(x^2) + \operatorname{cosec}(x^2)$
34. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{1+\cos(x^2)}$
35. $f(x) = (1 + e^{\operatorname{sen} x})^3$
36. $f(x) = \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x} - 1) - \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x} + 1)$
37. $f(x) = \operatorname{Ln} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
38. $f(x) = \operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
39. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}(x^2-1)$
40. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

El pendent d'una recta.

Recordem que les funcions afins són aquelles que tenen per gràfic una **recta** i que la seva fórmula és
$y = mx + c$.

El coeficient de la x , el paràmetre m , és el **pendent** i indica la **inclinació de la recta**, és a dir, ens diu per cada unitat que varia la x, quant varia la y.
El terme independent, paràmetre n, és l'ordenada a l'origen, o sigui, el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades.
El seu esquema seria:



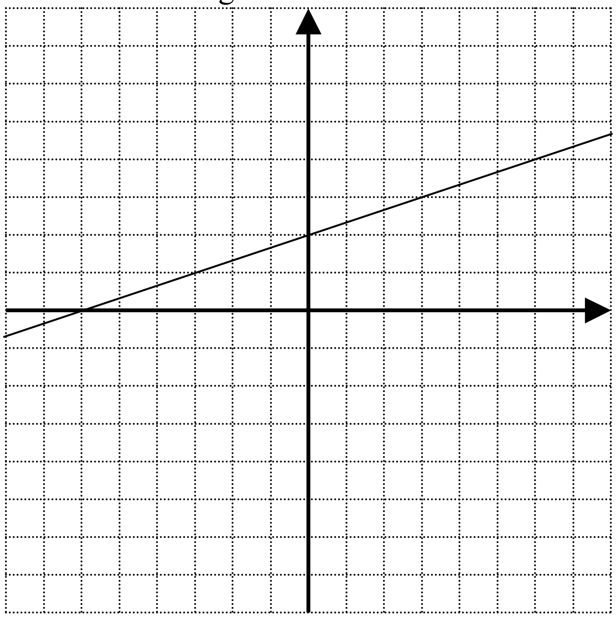
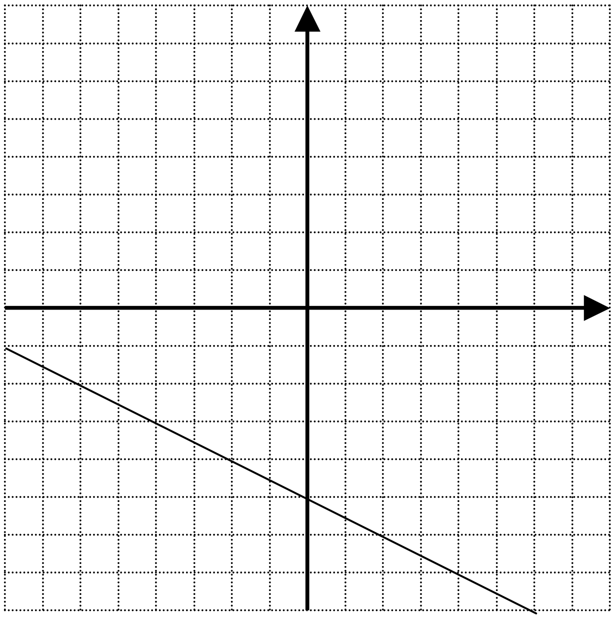
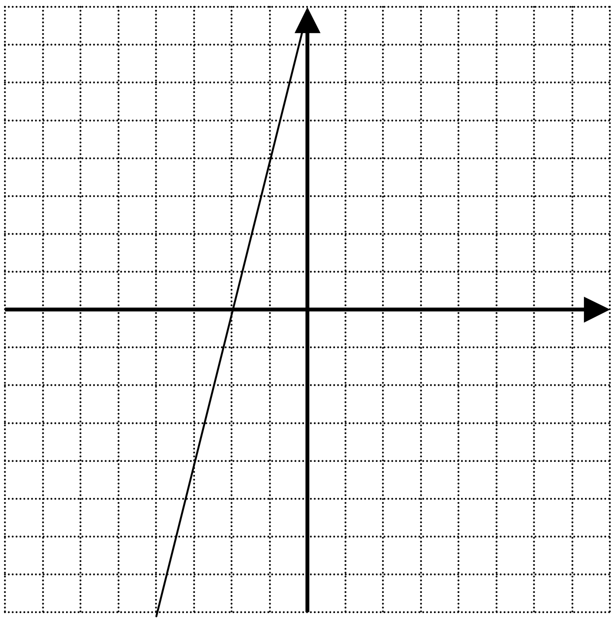
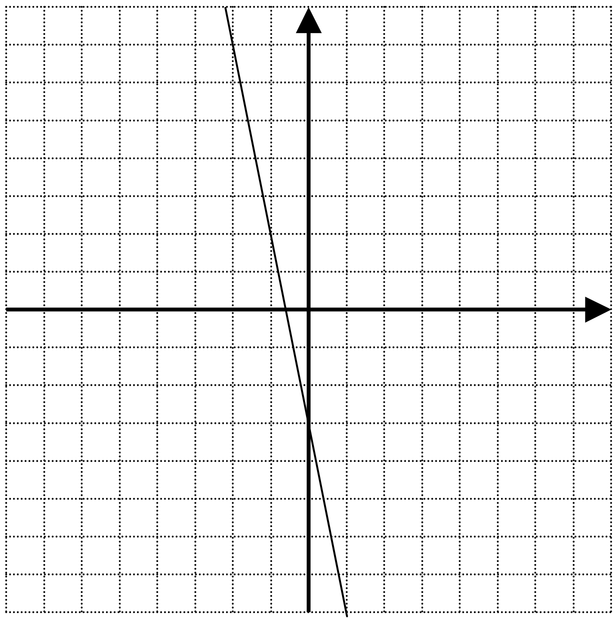
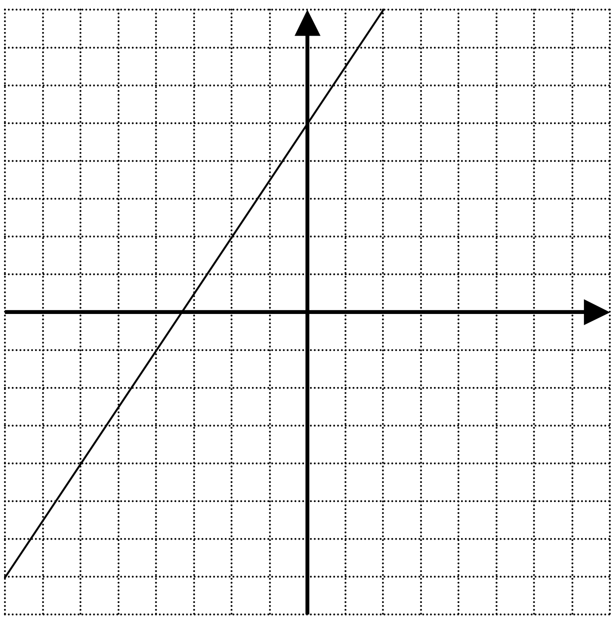
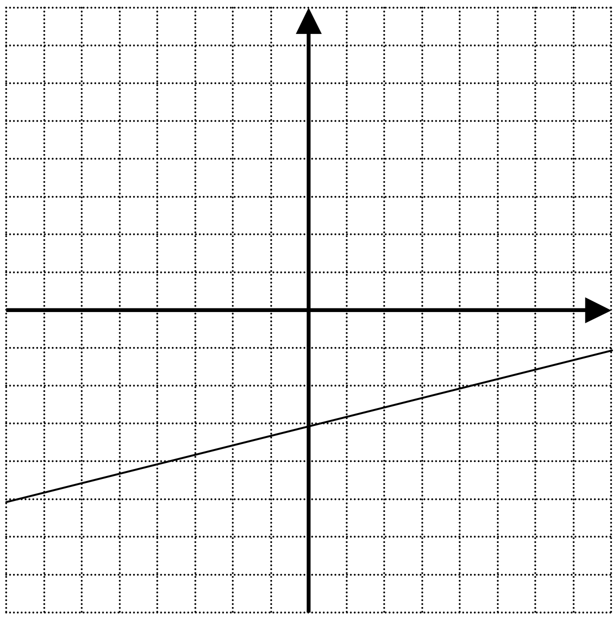
Si agafem dos punts qualsevol de la recta (M i N) el pendent serà el quocient entre la variació (o diferència)de les y *(dy)* i la variació o (diferència) de les x *(dx)*:

$$m = \frac{dy}{dx}$$

Algunes vegades, fins i tot es pot escriure l'equació de la recta directament amb el següent format:

$$y = \frac{dy}{dx} x + c$$

A.7 Troba la fórmula de les següents funcions afins, trobant el seu pendent i l'ordenada a l'origen

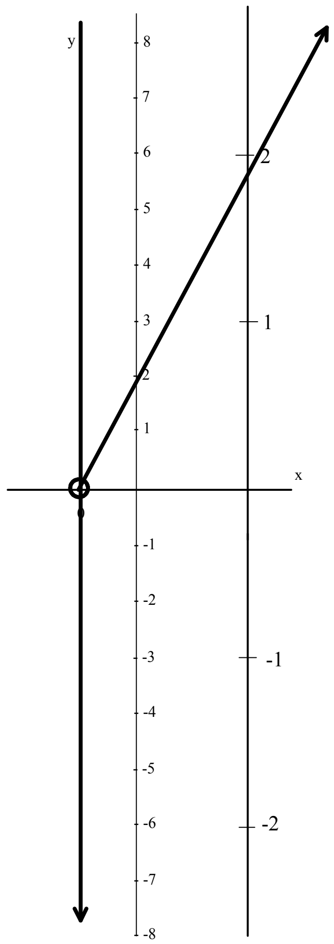
A.8 Calcula l'equació de les rectes següents:

a) Passa pel punt (1,3) i que te per pendent $m = 3$
b) Passa pels punts (-1,4) i (3, 2)
c) Passa per (-2,5) $m = -2$
d) Passa per ((2,-1) i (4,2)
e) Passa per (-3,-1) i $m = ¼$
f) Passa per (2,2) i per (2,5)
g) Passa per (4,2) i $m = 0$

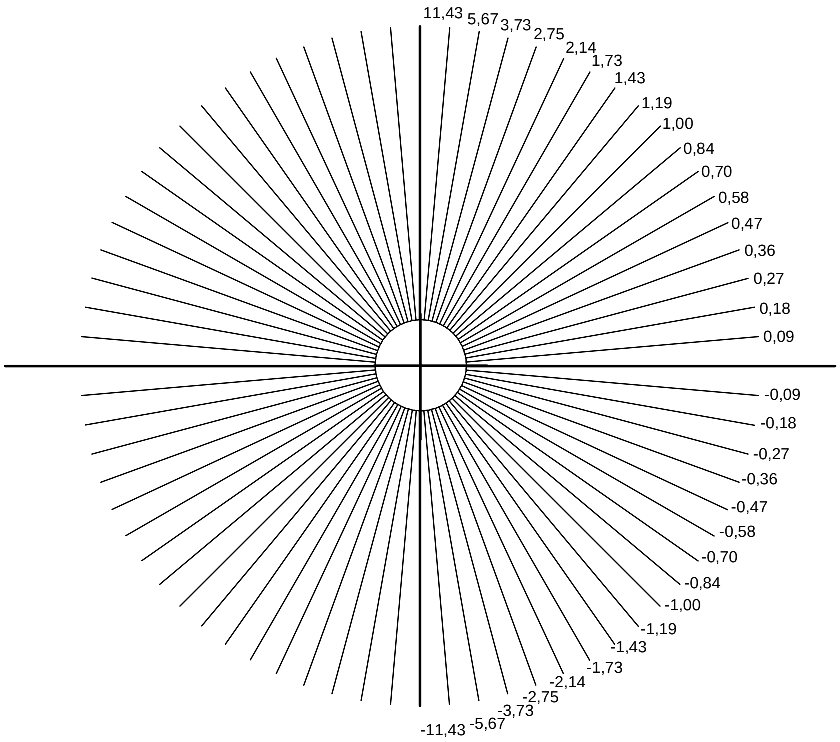
Com que haurem de calcular els pendents de moltes rectes gràficament i de forma ràpida el que farem serà construir un aparell per mesurar pendents.

A.9 Construcció d'un mesurador de pendents,

En un full transparent pintem uns eixos de coordenades perpendiculars. Enganxarem dues tires de paper mil·limetrat paral·leles a l'eix vertical per tal de poder fer la lectura del pendent més fàcilment. Hem de fer que la distància de l'origen de coordenades a cada una de les tires sigui exactament la mateixa que la unitat dibuixada a la tira. Enganxem el "braç" giratori a l'origen de coordenades i ja tenim el mesurador de pendents.
L'esquema podria ser:



Un altre tipus de mesurador de pendents consisteix en un cercle en paper transparent on s'hi ha dibuixat una sèrie d'angles per cada un dels quals es pot llegir directament el seu pendent. L'esquema seria aquest:



A.10 Per tal de comprovar si el teu mesurador de pendents funciona correctament, toma a calcular els pendents de les rectes de l'exercici 1 .

A.11 Donada la funció f : [-2,6] $\longrightarrow$ **R** definida a trossos per les fórmules

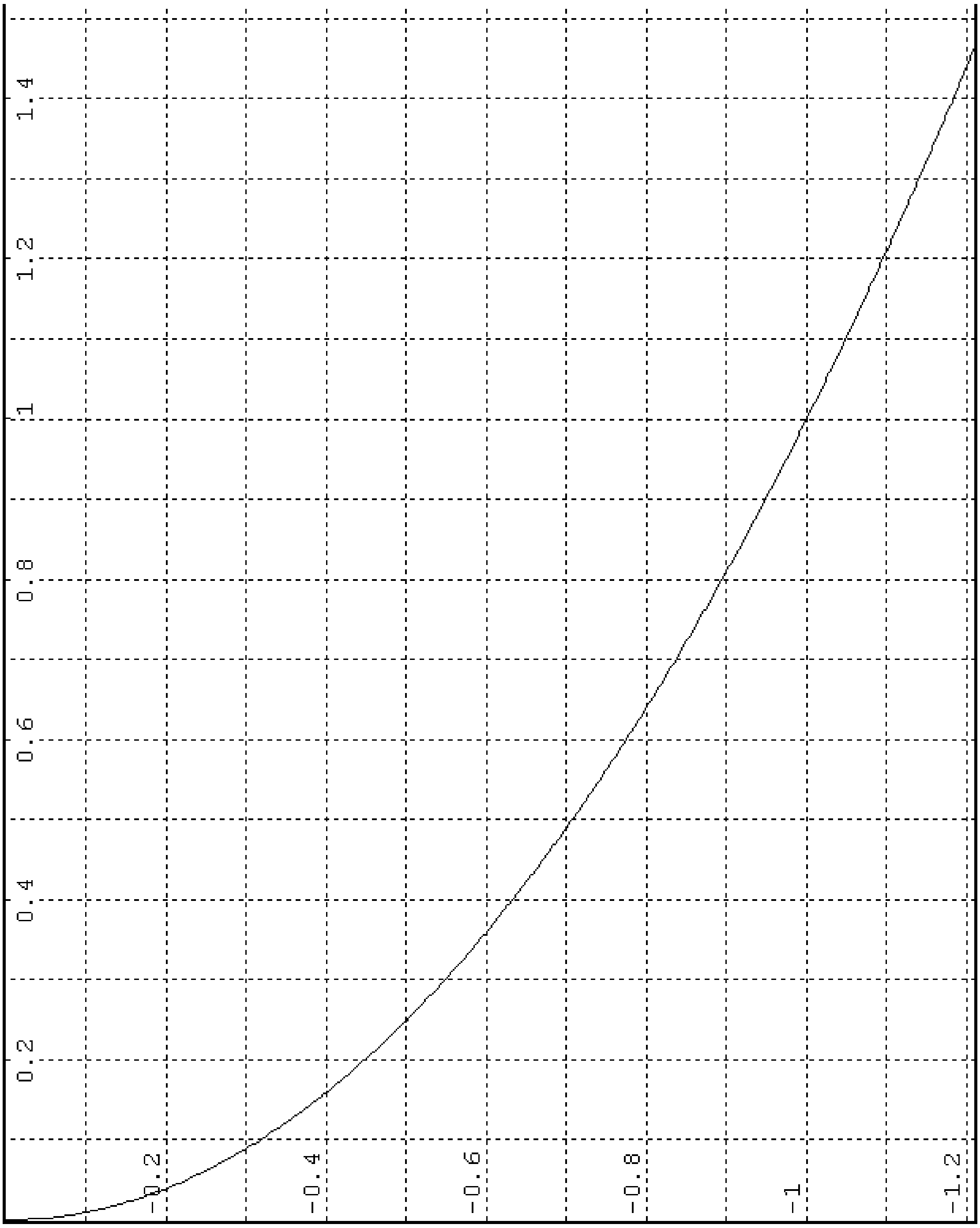
$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad -1 \le x \le 0 \\ x-2 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ -3x+6 & si \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) Representa-la.
b) Fes la taula del seu comportament.
c) Afegeix una fila a la taula anterior per indicar el pendent dels diferents segments. Quina relació hi ha entre el comportament de la funció i el pendent?

B. Descartes i Fermat. La primera baralla

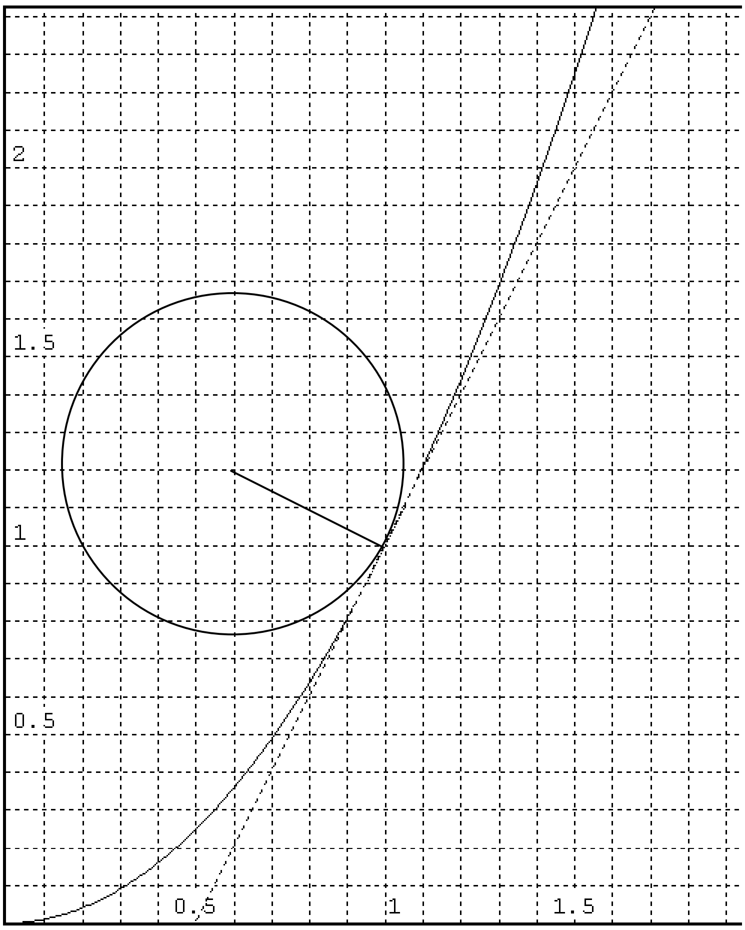
Al voltant de l'any 1630 es va *posar de moda* en el mon de les matemàtiques la recerca de rectes tangents a corbes, passant de mètodes de regle i compàs a mètodes de càlcul analítics. Comencem per un mètode una mica rudimentari:

B.1 Dibuixa la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 1$. Fes-ho "a ull" amb la màxima precisió que puguis. Escriu, després, l'equació d'aquesta recta tangent.



El mètode de les tangents de Descartes

Descartes, a l'any 1635 va trobar una tècnica per resoldre aquest problema que era a cavall d'una tècnica geomètrica pura i una tècnica de càlcul. No entrarem en profunditat en detalls, sols direm que bàsicament es tractava de buscar una circumferència que toques a la corba sols en un punt, aleshores la recta tangent no era més que la recta perpendicular al radi de la circumferència. Mira el dibuix:



El mètode de les tangents de Fermat

A l'any 1636 Fermat va resoldre el mateix problema però amb una tècnica molt diferent. Imaginarem, ara que **tu** ets Fermat i resoldràs el problema d'una manera similar a com ell ho feia. (Per evitar-te confusions posteriors utilitzarem en tots els exercicis i exemples la notació més propera a Leibnitz possible)

B.2 Volem calcular el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció f(x) = x^2 en el punt d'abscissa 1. Utilitza el dibuix de la pàgina següent.

a) A l'exercici **C.1** has dibuixat la recta tangent en un punt. Creus que el pendent de la recta que has trobat és totalment exacta? ¿per què?

b) Si tinguéssim 2 punts de la recta en comtes d'un, podríem calcular el pendent amb absoluta precisió?

c) Calcula ara el pendent de la recta que talla el gràfic (secant) en els punts d'abscissa 1 i 1,5. Fes-ho amb tota precisió utilitzant la fórmula de la funció. El que acabes de calcular és el pendent de la recta **secant** i correspon a la **taxa de variació mitjana** de la funció x^2 entre 1 i 1,5

d) Posa el resultat obtingut a l'apartat anterior al lloc corresponent de la taula següent. Fes el mateix per a les rectes secants al gràfic en els punts d'abscissa 1 i diversos valors de x propers a 1 i omple les dues taules:

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1 ,0001
$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

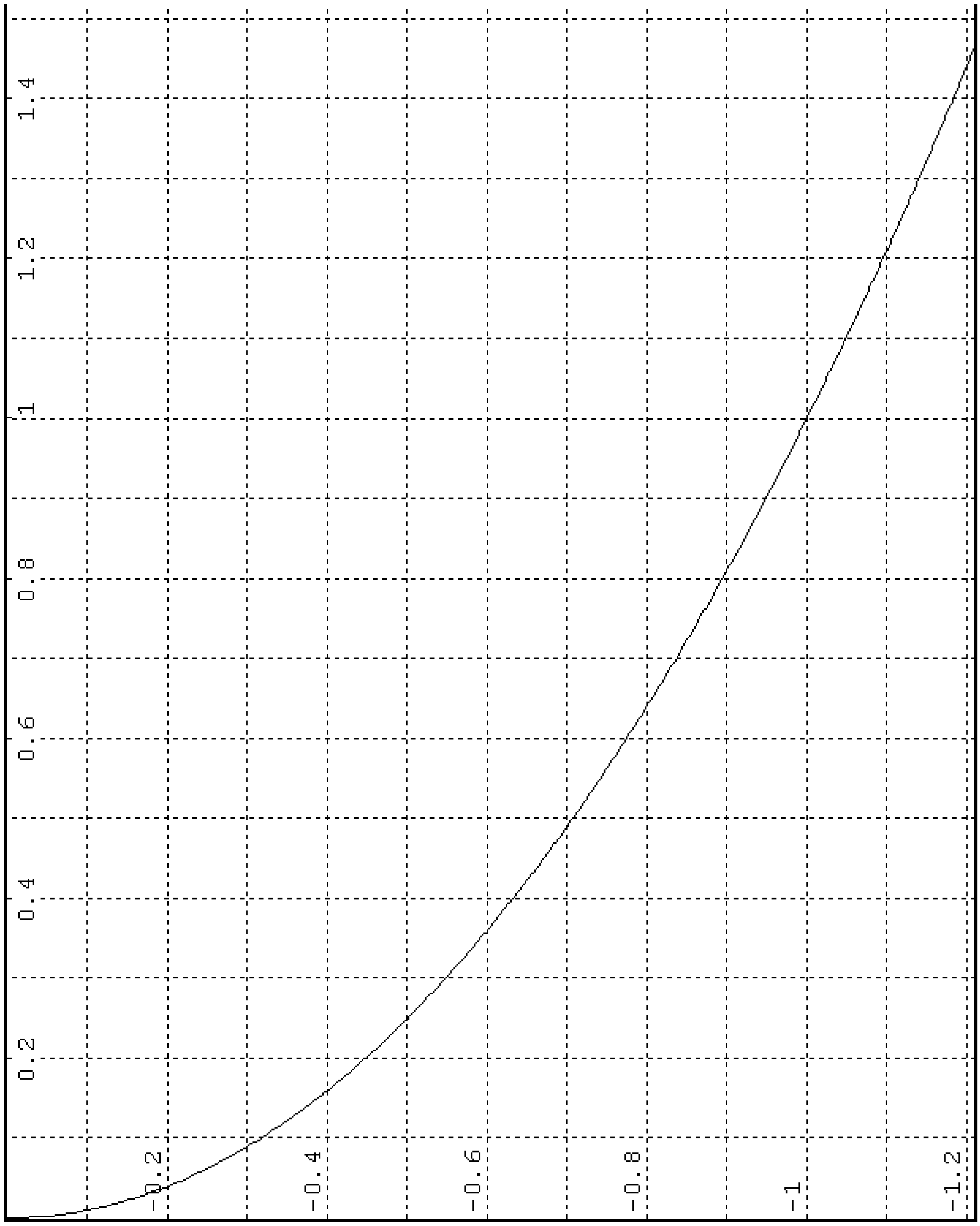
x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

e) Observa les successions de les dues files que has omplert a les taules: cap a quin nombre tendeixen aquestes successions? Podem dir quin és el pendent de la recta tangent? Coincideix amb l'estimació feta a l'apartat b?

f) Calcula la derivada de $f(x)$ = x^2 i substitueix-la en x = 1 ¿què has obtingut?

g) Troba l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'abscissa 1.

Gràfic de la funció $f(x) = x^2$



B.3

a) Calcula numèricament el pendent de la recta tangent a la funció $y = 3x^2 + 1$ en el punt d'abscissa x = 2. Per fer-ho pots fer dues taules com les de l'exercici anterior.

x	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$					

x	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$					

b) Calcula ara $f'(2)$

c) Troba l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'abscissa 2.

Anomenem **derivada** d'una funció en un punt al **pendent de la recta tangent** en aquest punt

La baralla entre Descartes i Fermat

Si observes detingudament el mètode de Fermat i l'analitzes a fons, és una barbaritat: El que fem és dividir les diferències de les y entre les diferències de les x: $\frac{dy}{dx}$, però anem fent aquestes diferències més i més petites fins que ¡ES FAN ZERO! Aleshores, el quocient d'aquest resultat és el pendent, però ¿el quocient de què?. ¡ el quocient de $\frac{0}{0}$!!!!!

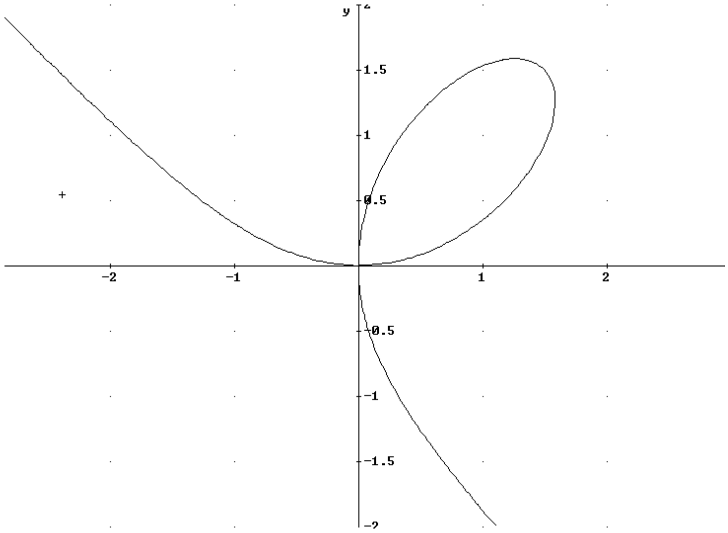
Fermat era un matemàtic genial amb un sentit del humor una mica abjecte. És difícil pensar que Fermat no era conscient de l'aberració matemàtica que suposava el seu mètode, però lluny de fer qualsevol mena d'autocrítica va escriure:

> *El mètode mai falla, pot, fins i tot, fer-se extensiu a una quantitat de problemes molt macos, amb el seu ajut trobarem les rectes tangents de gran quantitat de corbes i moltes altres coses més de les que, pot ser, informaré en un altre moment, si trobo temps per fer-ho.*

Descartes era un matemàtic extremadament formal i clàssic, quan va veure aquesta aberració és va posar com una moto, el comentari, a més, li sonava a provocació i burla. Va criticar a Fermat amb duresa i, ja que el seu mètode "mai falla", el va reptar a aplicar-lo amb una corba molt complicada, es tractava de la corba que sortiria si aïllem la y a la següent expressió.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

En aquell temps ja coneixien que el gràfic d'aquesta corba tant complicada és la del dibuix de la dreta.



Fermat no es va deixar impressionar pel enfurismament de Descartes i va resoldre el problema en pocs minuts!

Des d'aquest dia, a aquesta corba tant estranya i maca a la vegada se la coneix com *la fulla de Descartes.*
Aquesta no és l'única *broma* que Fermat va dedicar a la comunitat de matemàtics. En aquest dossier no hi ha temps ni espai per explicar-ne més però pot ser el vostre professor pot tenir l'amabilitat d'explicar-vos la *gracieta* que Fermat ens va fer amb el seu famós *Teorema de Fermat*.

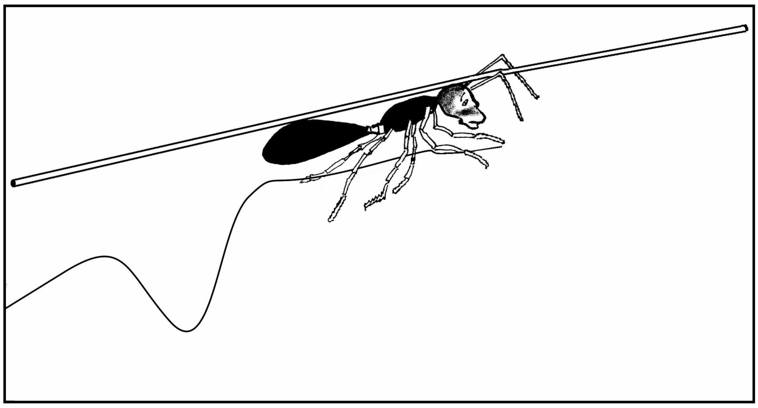
Tornem al nostre problema i analitzem la situació. Fermat tenia raó en una cosa, el mètode és molt efectiu i aplicable a moltes corbes diferents. Però Descartes tenia raó en la qüestió bàsica: El mètode és, conceptualment, una autèntica aberració matemàtica.

C. La generalització del mètode. Newton

Una de les frases mítiques de Newton és:

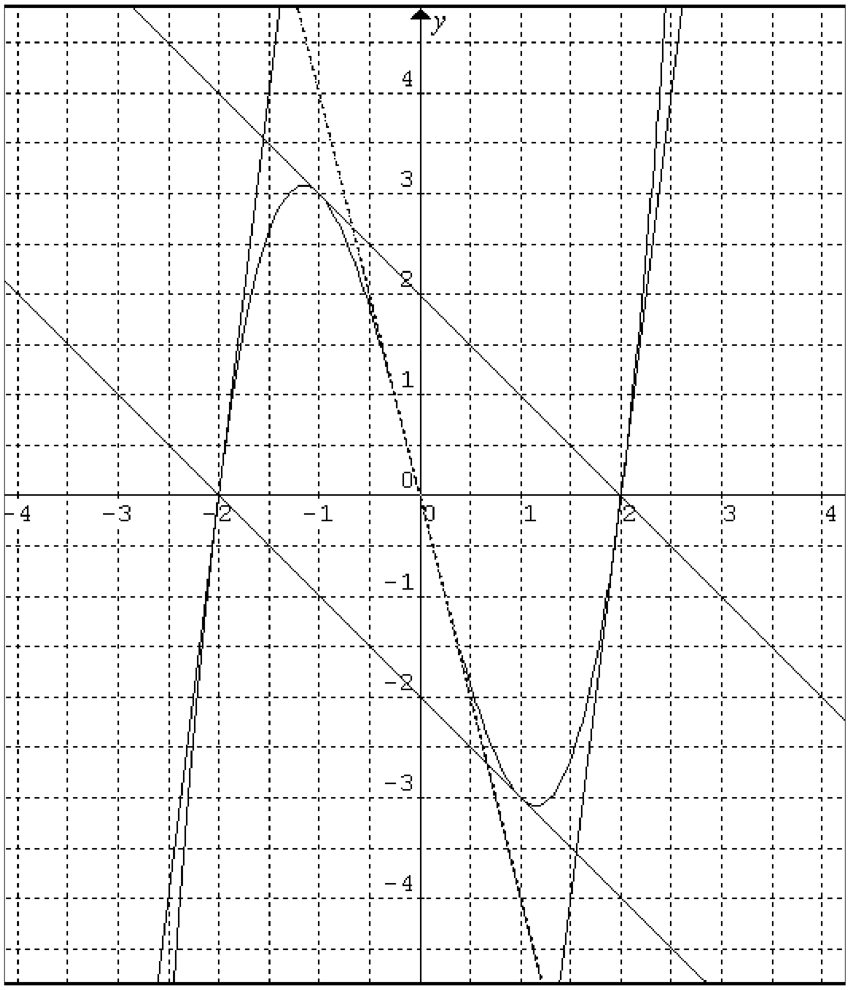
Si he arribat tant alt és per què m'he recolzat en els espatlles de gegants.

Efectivament els mètodes utilitzats ja per Fermat i Barrow (professor de Newton) van facilitar la tasca a Newton. ¿quin és doncs el seu mèrit?. Per una banda va ser capaç de generalitzar el mètode a totes les corbes possibles , per altra banda va ser capaç de passar del concepte de la recta tangent en un únic punt a la recta tangent en tots els punts. No s'ha de desmerèixer, també, l'intent fracassat de donar una definició satisfactòria del mètode (Mes endavant en parlarem)



Newton entenia les corbes com **un punt en moviment**, Imagina que una formigueta amb les potes brutes camina per un full, la corba seria el rastre que deixa la formigueta. Imagina ara que aquesta formigueta carrega a les espatlles una llarga canya, aquesta canya representa la recta tangent en cada moment. Si anem calculant la recta tangent cada moment podem arribar a dibuixar una nova funció: **la funció derivada**:

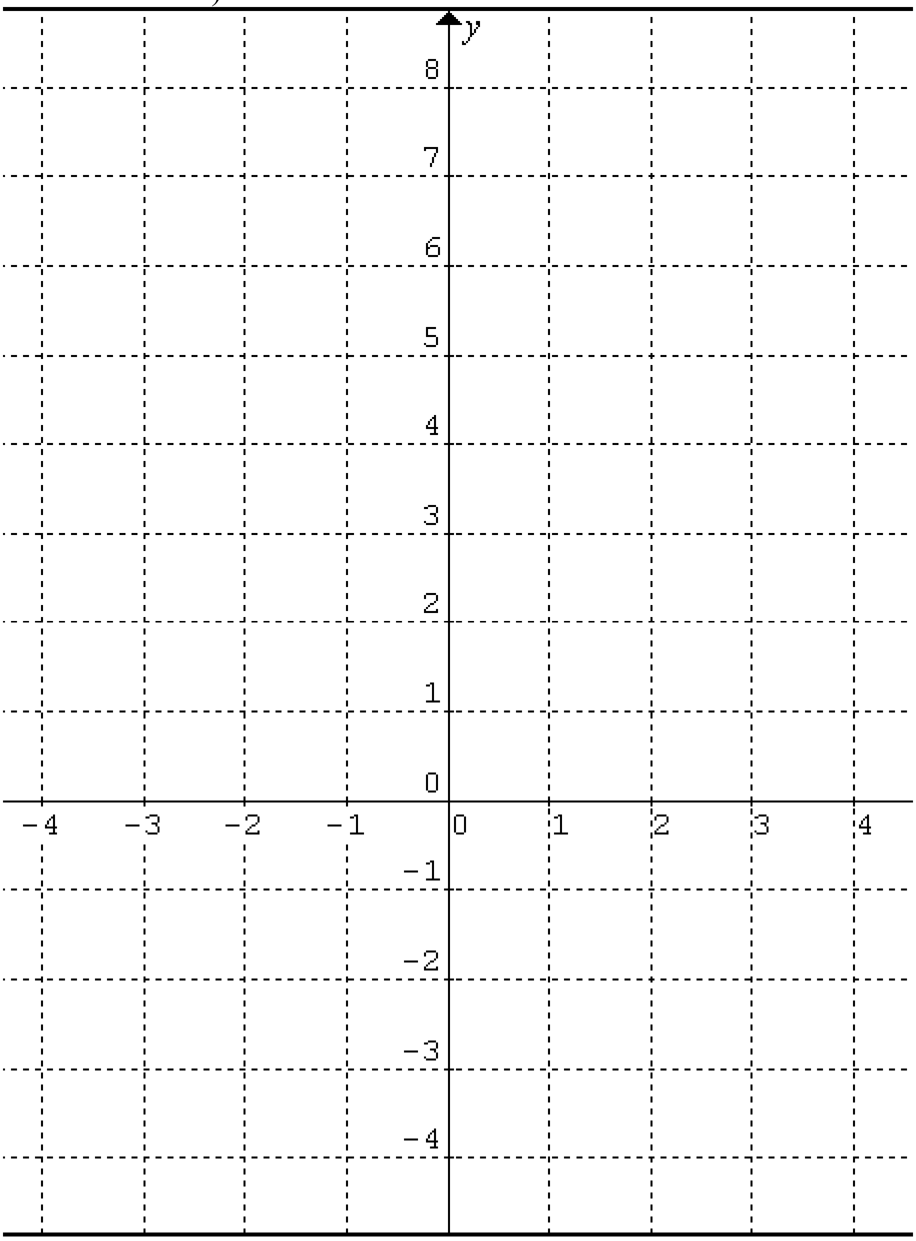
C.1 Observa la següent corba. La *formigueta* s'ha passejat per tota la corba i hem fet 5 *fotografies* una a cada unitat, des del -2 fins el 2



a) Omple la següent taula a partir de l'observació del dibuix:

x	-2	-1	0	1	2
y					
$y' = \dfrac{dx}{dy}$					

b) Dibuixa la funció derivada (es tracta de considerar les files x, y' com la seva taula de valors)



c) La funció en la que estem treballant és $y = x^3 - 4x$ Deriva aquesta funció i omple la taula següent **utilitzant la calculadora**.

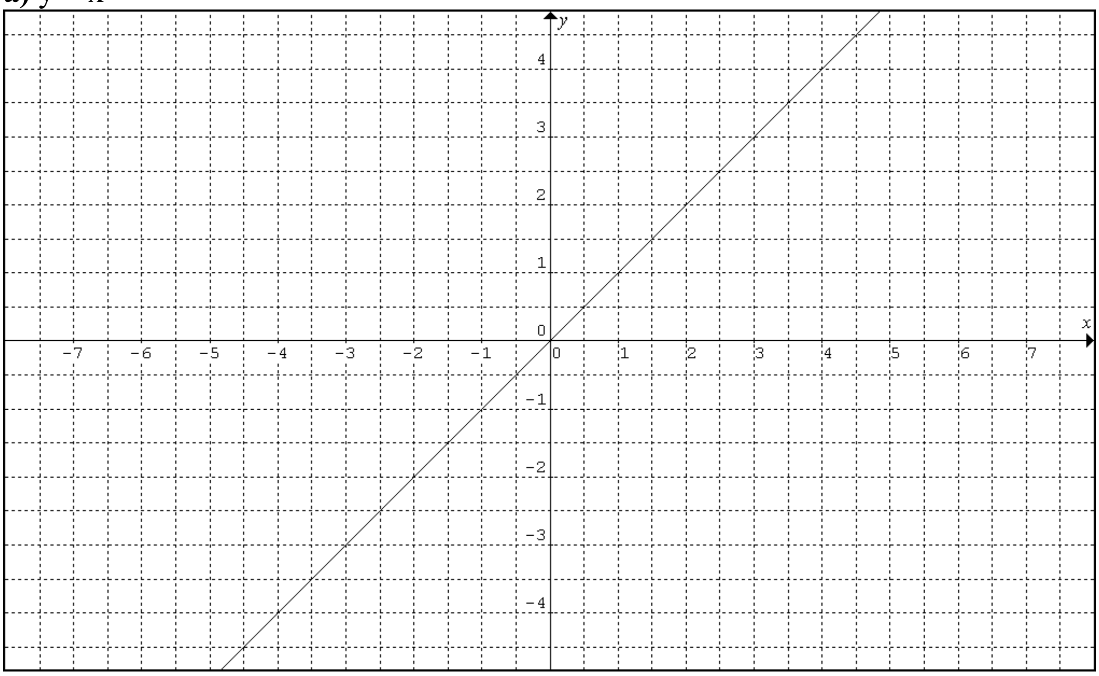
x	-2	-1	0	1	2
y					
$y' = \frac{dx}{dy}$					

d) Comprova, amb una calculadora gràfica, que el gràfic de *y'* és, efectivament el gràfic anterior

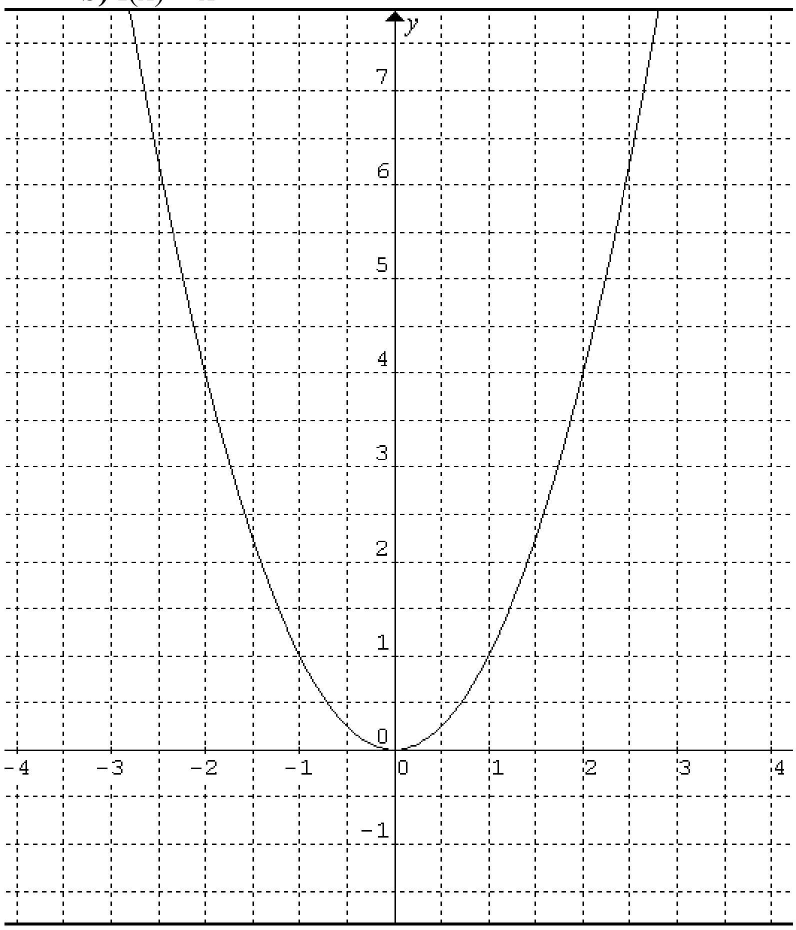
Anomenem **funció derivada** d'una funció f(x) a la funció f'(x) que s'obté assignant a cada valor de la *x* el del pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa *x*

C.2 Fes un esbós de la funció derivada d'algunes de les funcions elementals **utilitzant el mesurador de pendents**. Comprova després, amb una calculadora gràfica, que el dibuix que has fet és correspon amb la funció derivada que ja coneixes (pots fer el dibuix en els mateixos eixos)

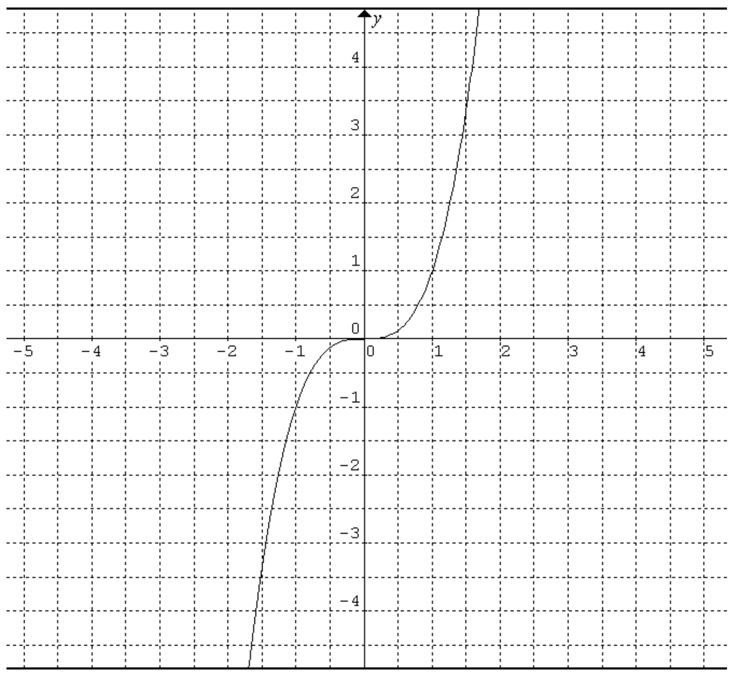
a) y = x



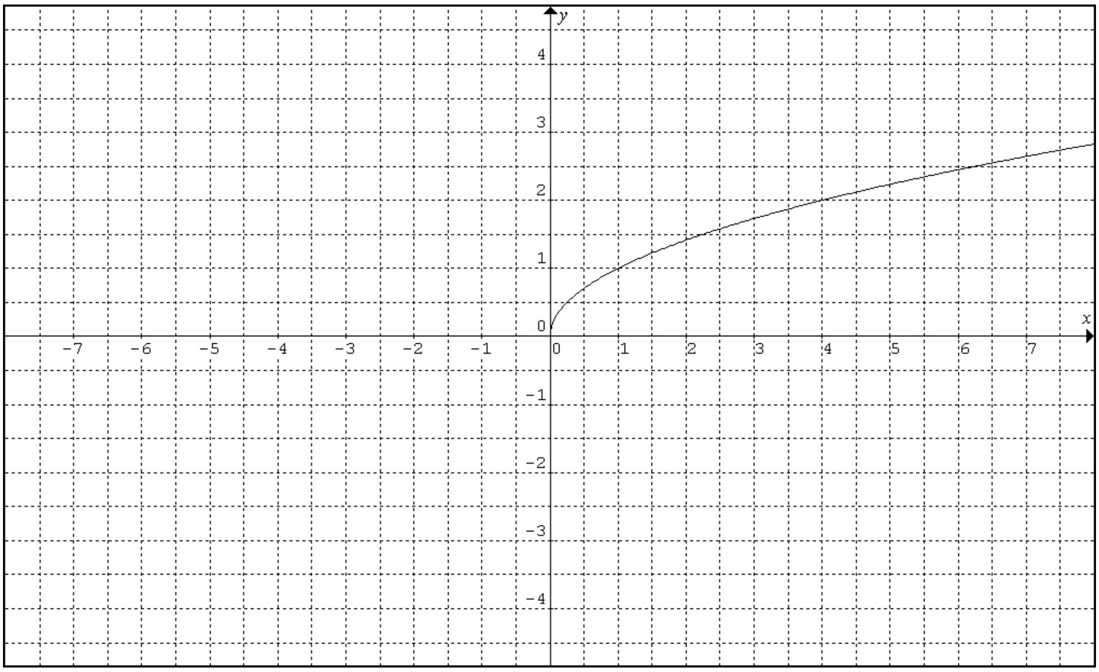
b) $f(x) = x^2$



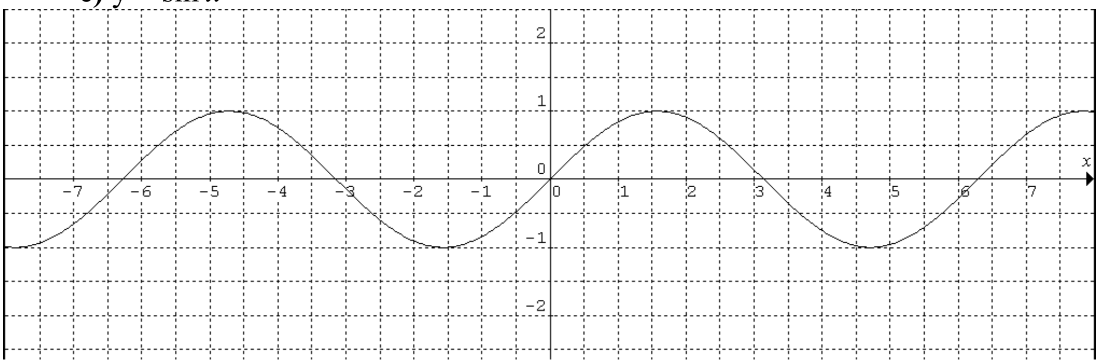
c) $y = x^3$



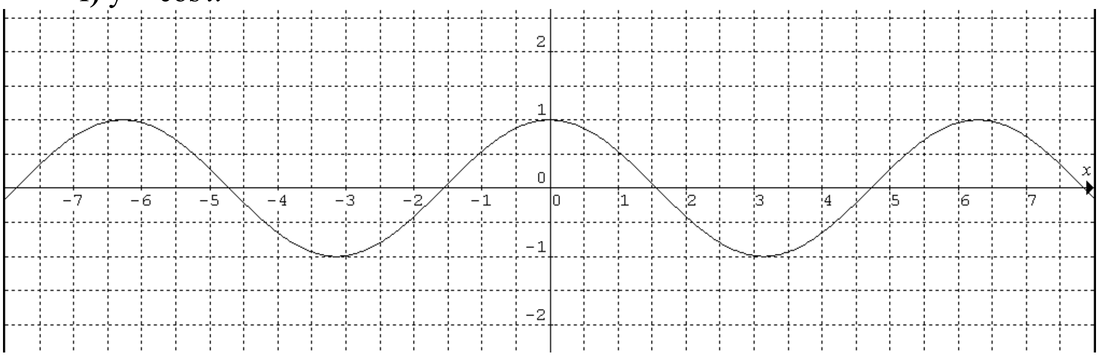
d) $y = +\sqrt{x}$



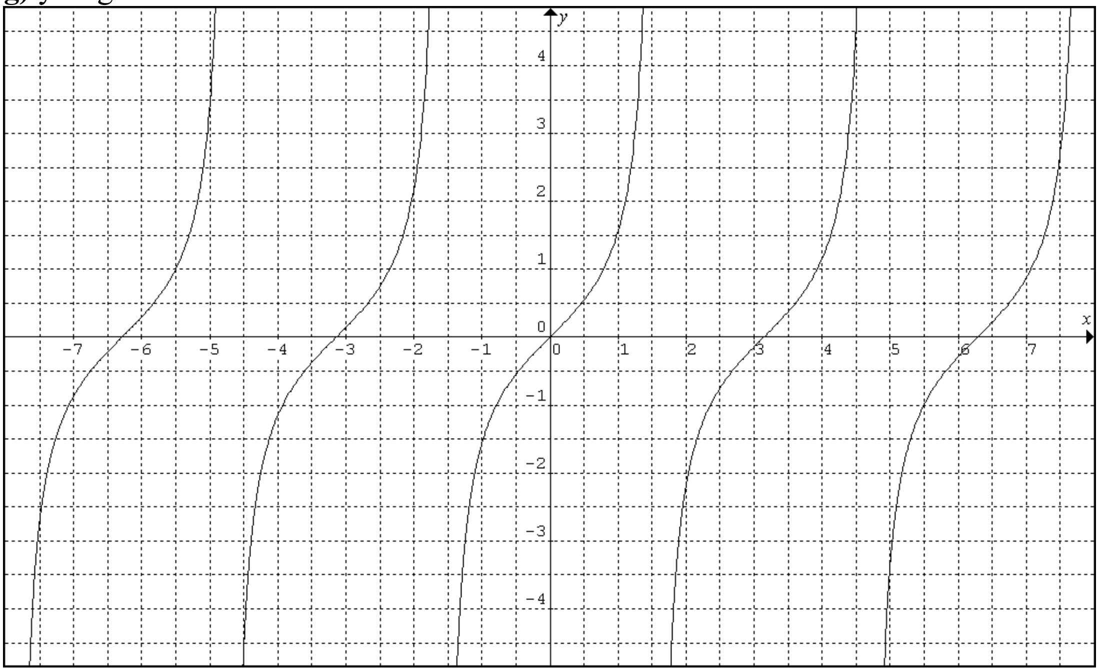
e) y = sin x



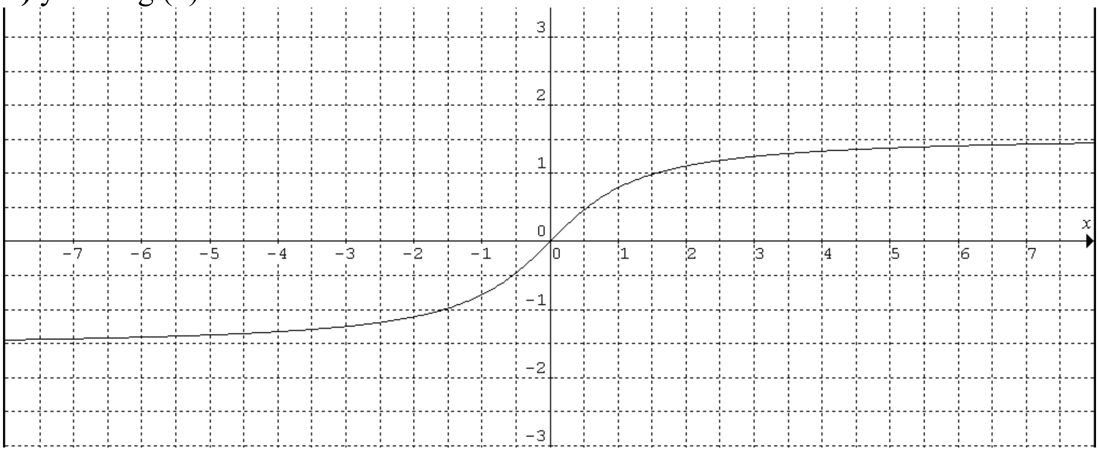
f) y = cos x



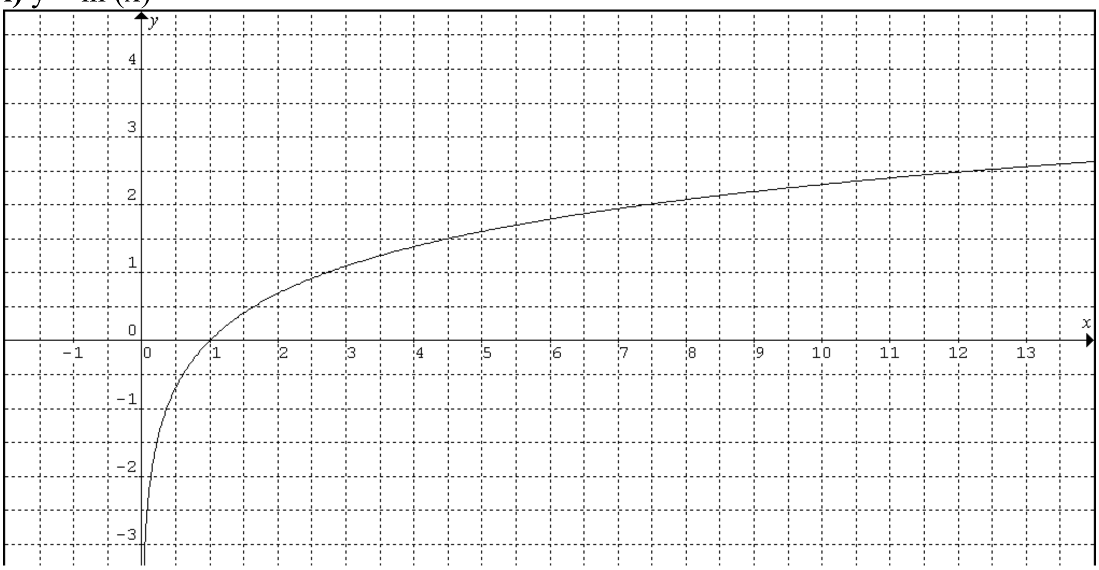
g) y = tg *x*



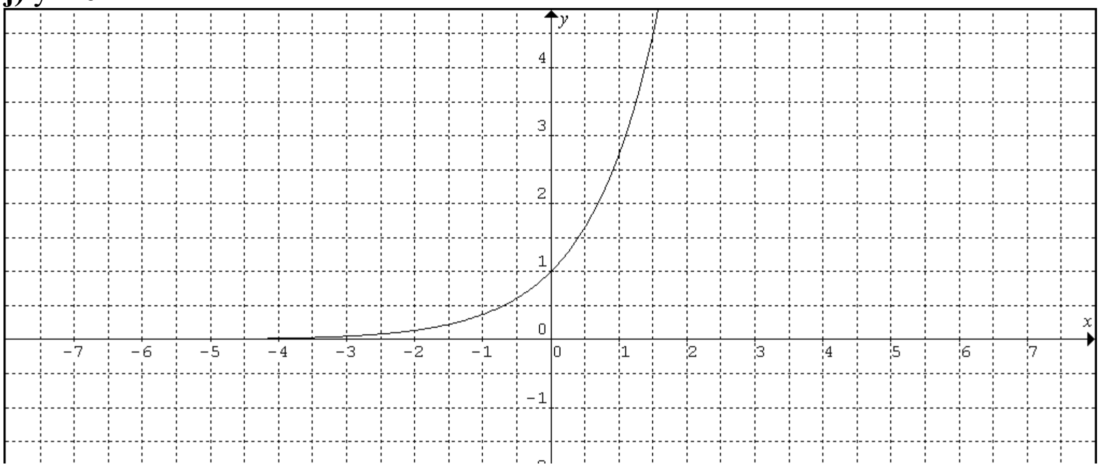
h) y = arctg (x)



i) y = ln (x)

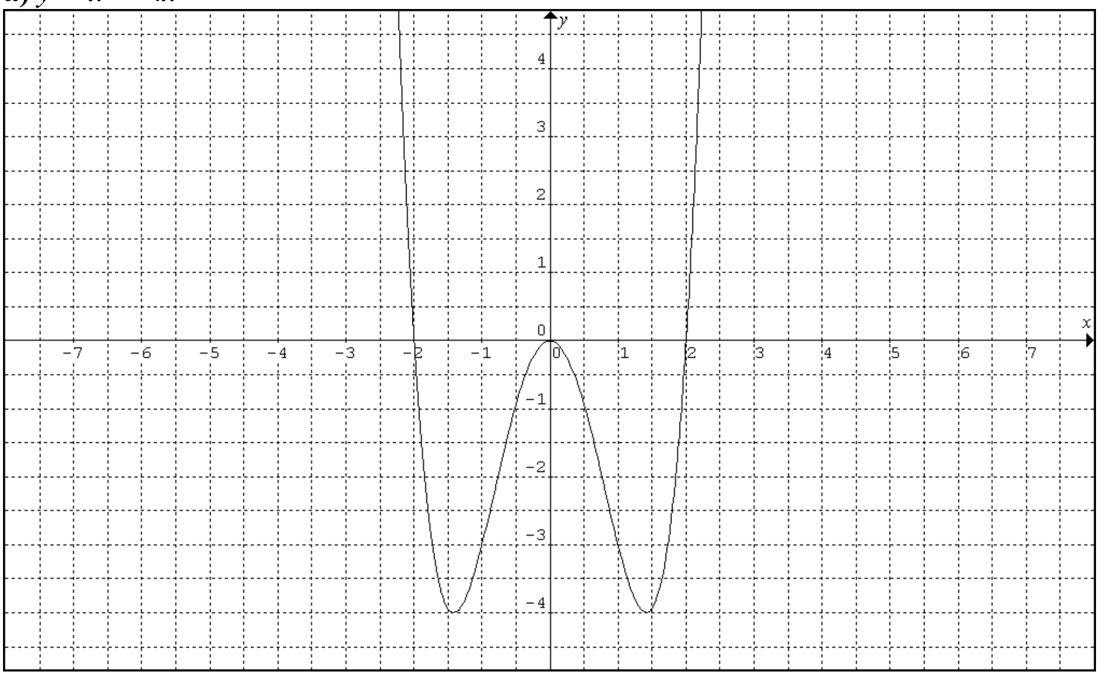


j) y = e^x

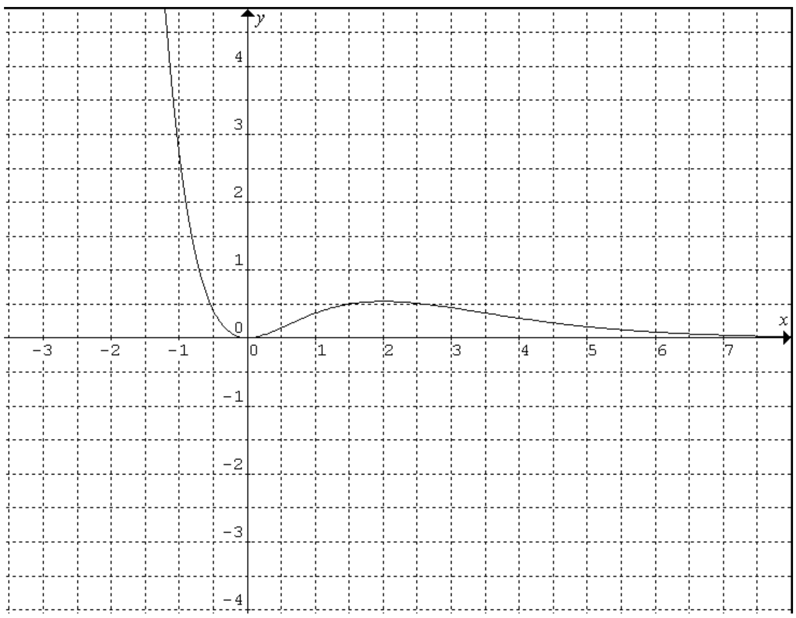


C.3 De les següents funcions, fes un esbós de la funció derivada. Calcula després la derivada i comprova, amb una calculadora gràfica, si el dibuix que has fet és correcte (pots fer el dibuix en els mateixos eixos)

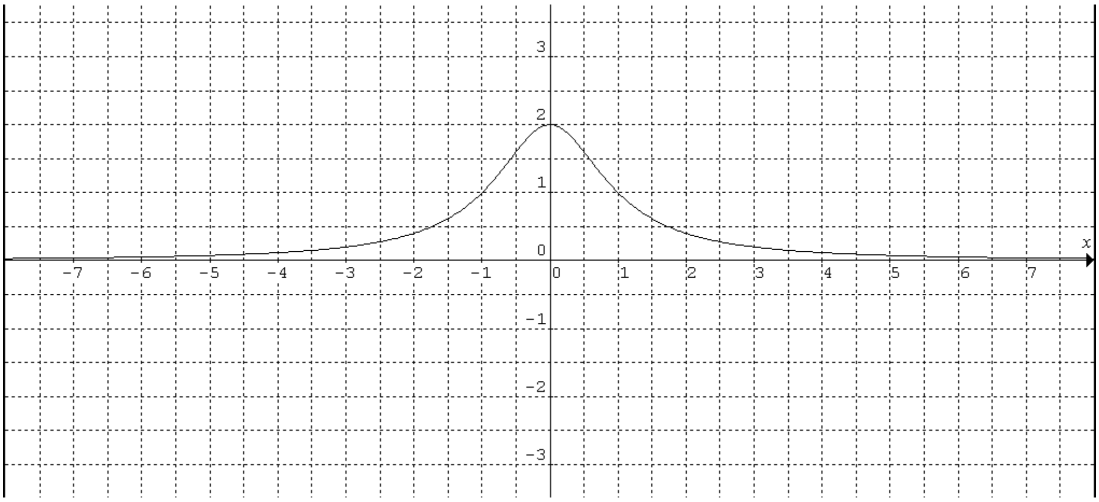
a) $y = x^4 - 4x^2$



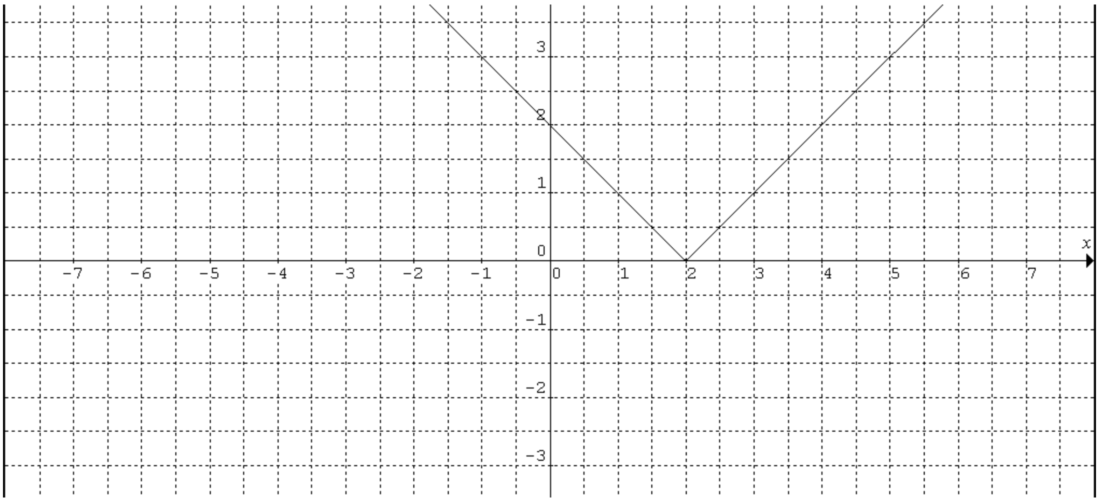
b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$



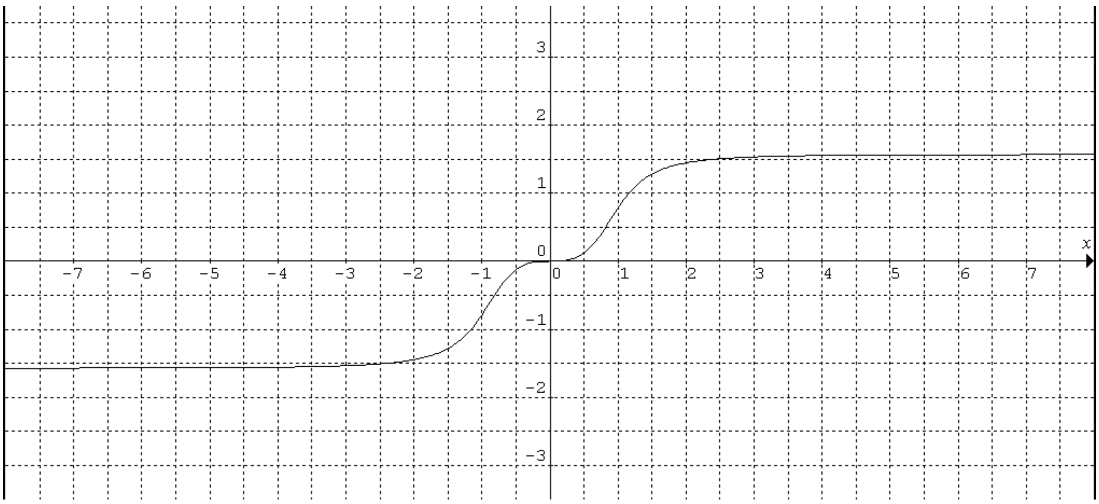
c) $y = \dfrac{2}{x^2+1}$



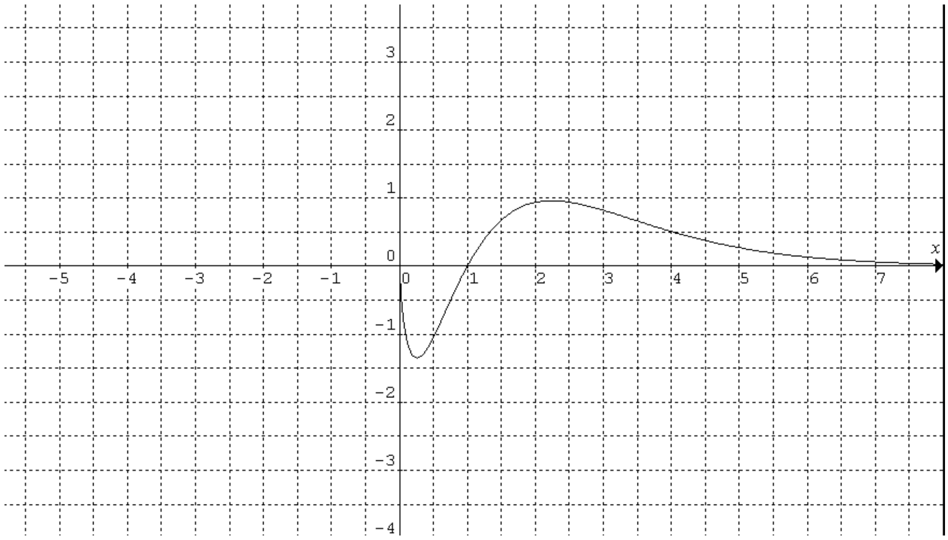
d) $y = |x-2|$



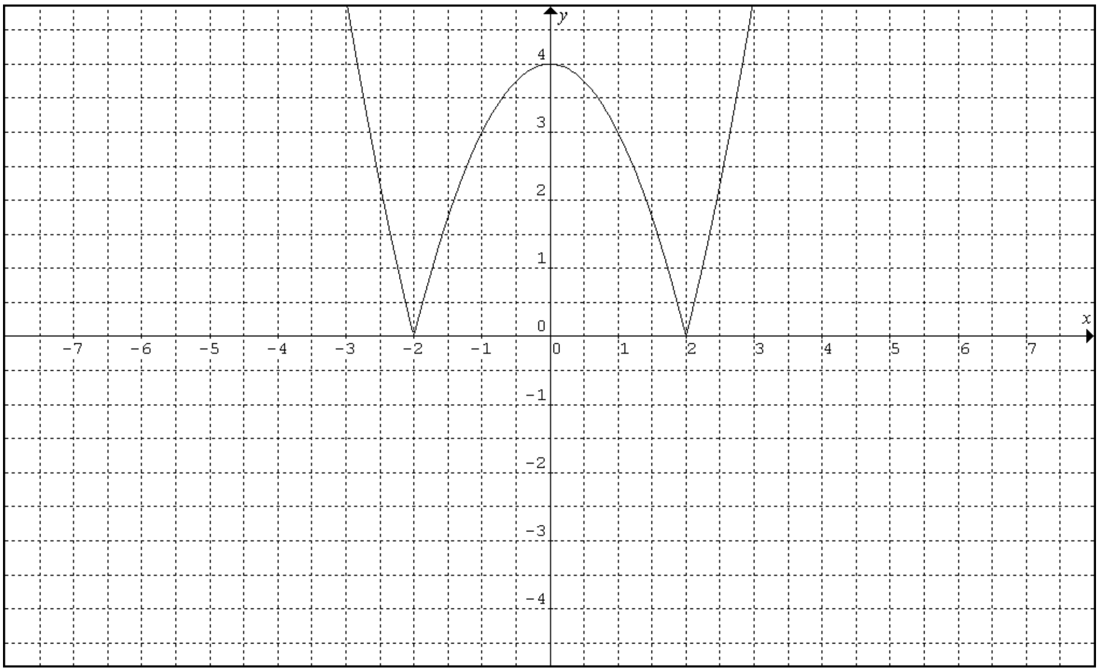
e) $y = \arctan(x^3)$



f) $y = \dfrac{5x \ln x}{e^x}$



g) $y = \left|x^2 - 4\right|$

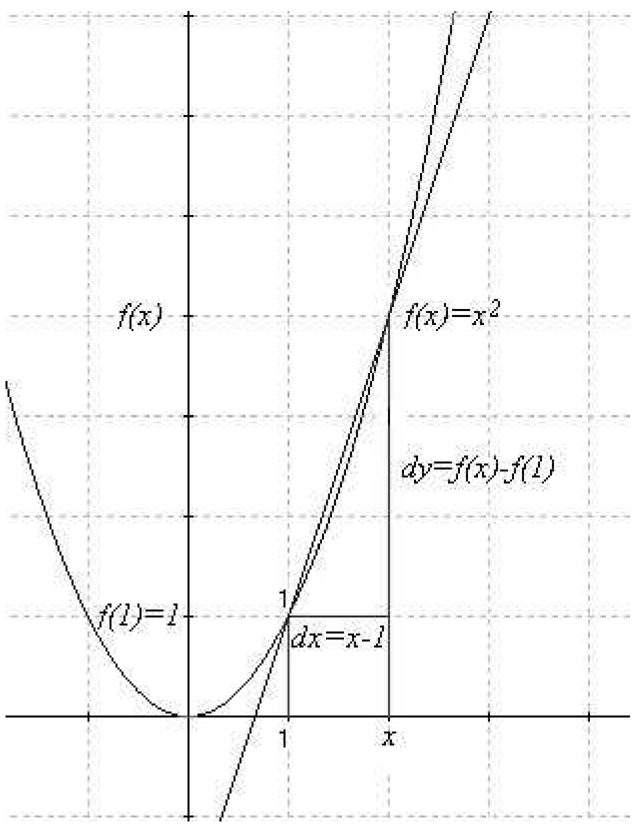


D. Càlcul analític de la funció derivada. El llarg camí al concepte de límit

(*Aquest capítol pot ser opcional per alumnes de lletres. Si hi ha manca de temps es recomana un petit resum per part del professor*)

Derivada en un punt

A l'exercici **C.2** i **C.3** hem calculat la derivada en un punt. Hem anat calculant els pendents de les rectes secants (que passen per dos punts de la funció) i hem anat ajuntant els punts fins que la recta ha estat tangent. Fermat, en realitat, no utilitzava el mètode tal com ho hem fet en els exercicis anteriors. Mira com ho feien:
Continuem considerant el mateix exemple $f(x) = x^2$ i volem calcular el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa x = 1 Comencem calculant el pendent de la recta secant que passa pel punt (1, f(1)) i (x, f(x)) i *desplacem* (utilitzant la notació de límit) el punt (x, f(x)) fins a fer-lo coincidir amb el punt (1, f(1))



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

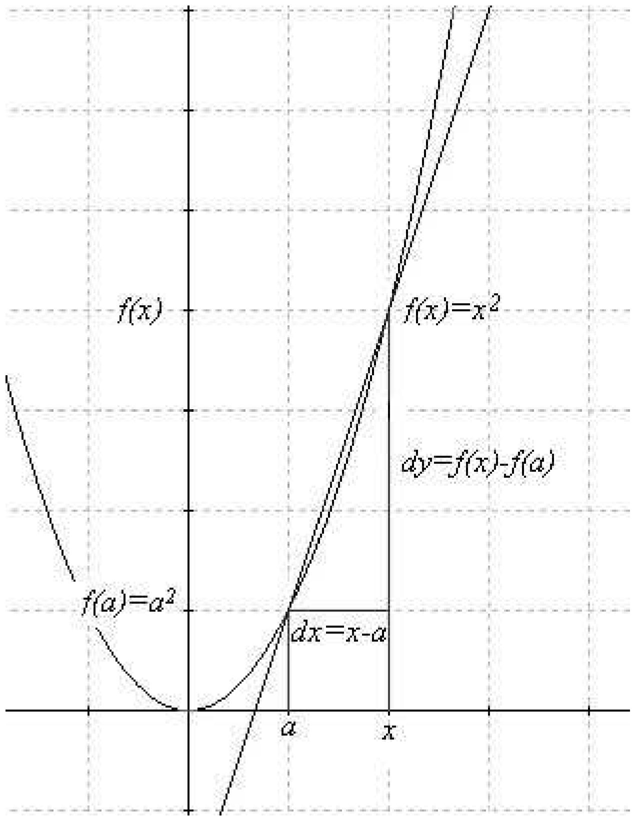
Descomposem el numerador en factors i simplifiquem la fracció eliminant del numerador i denominador (x -1). Ara sols cal substituir x = 1 (observa que x s'apropa a 1) i ens dona el pendent de la recta tangent 1+1 = 2

D.1 Repeteix el procediment anterior amb la funció y = $3x^2 + 1$ en el punt d'abscissa x = 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$$

Funció derivada

D.2 Repeteix el procediment anterior amb la funció y = x^2 però en el punt d'abscissa qualsevol $x = a$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

D.3 Repeteix el procediment anterior amb la funció y = $3x^2 + 1$ en el punt d'abscissa x = a

El problema conceptual

Fermat en realitat no utilitzava la idea de límit en el seu càlcul. Ell, directament feia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{(x+1)\cdot 0}{0} = x + 1 = 2$$

Això és una barbaritat com un piano ja que $\frac{(x+1)\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}$ és matemàticament inacceptable

Ara podem entendre perquè Descartes es va enfadar tant. Descartes tenia raó, però la qüestió és que el mètode ¡funcionava!

El intent de Newton

Ja hem dit que el mèrit de Newton va estar en generalitzar el mètode i fer-lo utilitzable a totes les funcions possibles. Newton era conscient que el mètode no era matemàticament vàlid i va intentar donar-li consistència. Per aconseguir-ho ell parlava de **raó** (divisió) **d'increments** (diferències) **evanescents** (que es van desfent). Aquest vocabulari era un intent frustrat d'expressar correctament la idea de límit.

La baralla entre Newton i Berkeley

George Berkeley era, a més de filòsof, bisbe. Un dia el van avisar que un amic seu estava agonitzant i va anar corrent a donar-li el sacrament de l'Extrema Unció. L'amic es va negar a rebre el sacrament perquè deia que el matemàtic Halley li havia dit que com podia creure amb les falsedats absurdes de la religió si les comparava amb les veritats absolutes de la matemàtica. Berkeley es va enfadar molt, va comprar un exemplar del càlcul diferencial de Newton i se'l va estudiar. Està clar que Berkeley tenia una intel·ligència singular, ja que va entendre el càlcul amb la notació de Newton i va ser capaç de trobar les greus incongruències del mètode.:

¿i què son aquestes derivades? Les velocitats dels increments evanescents. ¿i què son aquests mateixos increments evanescents?. No son quantitats finites, ni quantitats infinitament petites, ni tampoc es redueixen a no res. ¿no podríem anomenar-les els fantasmes de les quantitats desaparegudes?...

El concepte de límit

200 anys van trigar els matemàtics en donar una definició correcta de derivada. El concepte de límit, correctament definit dóna consistència definitiva a la derivada. No és gens fàcil definir bé què és un límit i no ho podem fer ara, Però aquest concepte ens permet fer el *malabarisme matemàtic* de poder simplificar (x-1) a l'expressió

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1$$

ja que $x\neq 1$ i desprès podem fer

$$\lim_{x\to 1}x+1=2$$

ja que $x\to 1$ i, per tant, de fet x = 1.

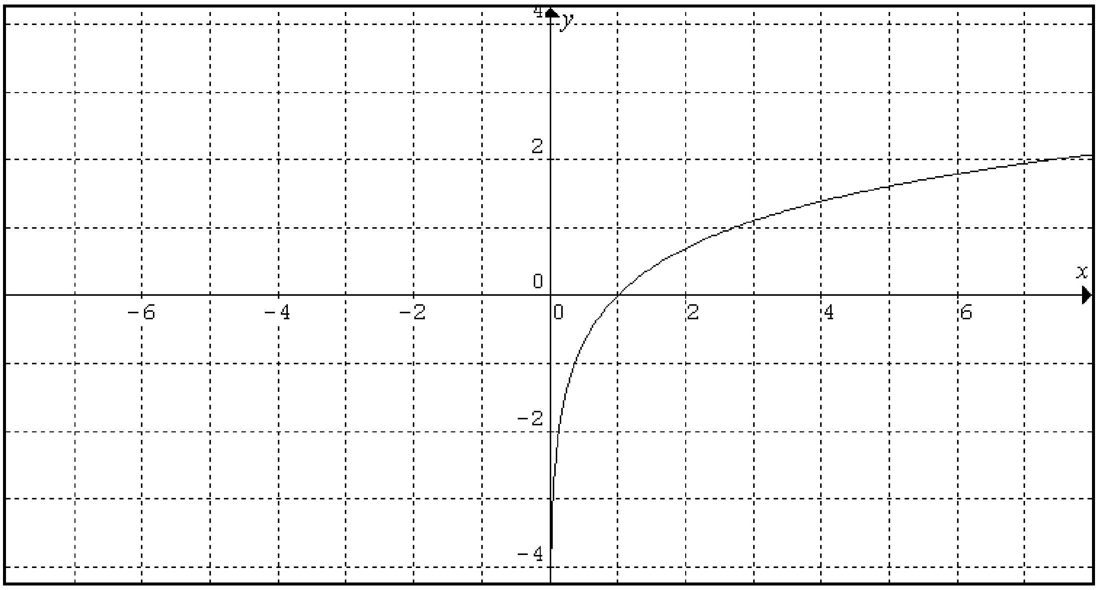
APLICACIONS DE LA DERIVADA

E. La recta tangent a una corba

E.1 Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^3 - 4$, en el punt d'abscissa x = 2.

E.2 Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x \cdot e^x$, en el punt d'abscissa x = 0

E.3 Busca un punt $(a, f(a))$ de la funció $f(x) = \ln x$ en que la recta tangent tingui per pendent $f'(a) = 1$. Busca'l primer a ull sobre el dibuix i busca'l desprès analíticament.



E.4 Busca un punt del gràfic de la funció $y = x^2 - 2x + 1$ en que el pendent de la recta tangent sigui $m = 4$. Calcula, desprès, l'equació d'aquesta recta.

E.5 Troba el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^3 - 3x + 4$, en el punt d'abscissa x = 1. ¿quin significat geomètric te aquest punt dins de la funció? ¿Per què?

E.6 La recta normal a una corba en un punt de la mateixa, també anomenada simplement la normal en el punt, és una recta que passa pel punt i és perpendicular a la recta tangent.

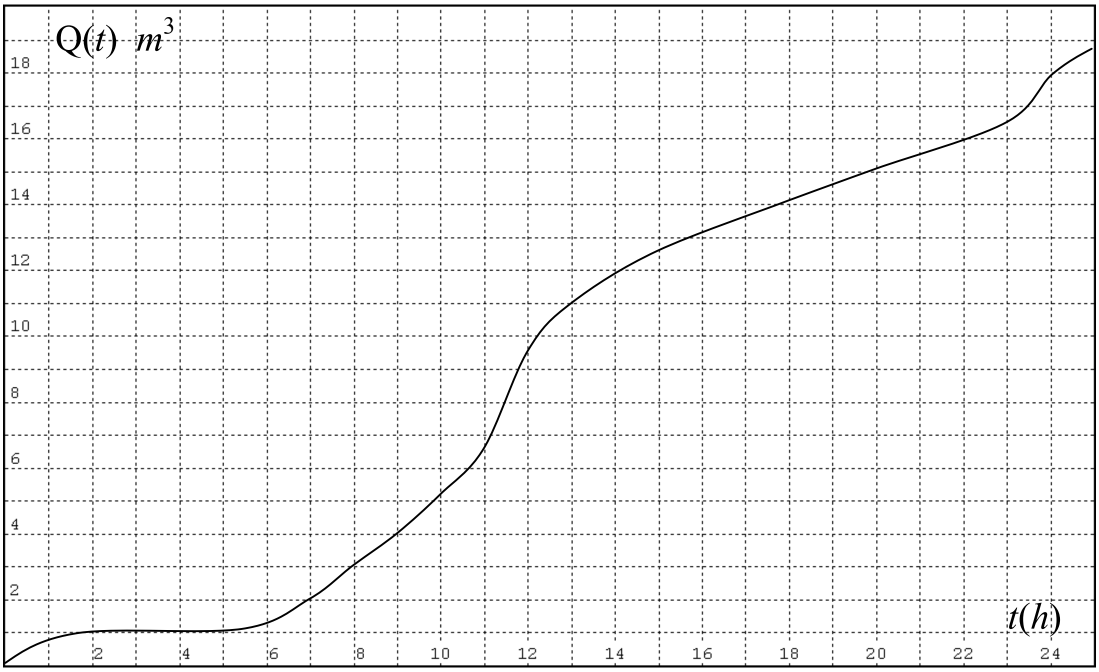
a) Troba l'equació de la normal a la corba y = sin x en el punt d'abscissa 0.

b) Troba un punt de la corba en el qual la normal sigui paral·lela a l'eix d'ordenades.

E.7 En quin punt del gràfic de la funció $y = -x^2 + 1$ la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant?

F. De la taxa mitjana a la taxa instantània

F.1 L'hotel Alps té 156 habitacions. El seu consum d'aigua calenta és força elevat. La funció Q(t), el gràfic de la qual és l'indicat, ens dóna el consum total d'aigua calenta des de mitjanit (0 h) fins a les t hores. Aquest gràfic correspon a un dia determinat, però s'ha observat que cada dia, durant la temporada d'estiu, es repeteix amb petites variacions..



a) Quin és el consum total d'aigua calenta al llarg del dia?
b) Quina quantitat d'aigua s'ha consumit entre les 9 hores i les 15 h.
c) Què pots dir del consum d'aigua calenta entre les 2 i les 5 h.
d) Què pots dir del consum d'aigua entre els 20 i les 23 h.
e) En quin moment s'està consumint més aigua, a les 13 h o a les 22 h? Justifica la resposta.
f) Troba el m^3/h que s'estan consumint a les 7 en punt. Explica com ho fas.
g) En quin moment del dia et sembla que s'està consumint més aigua calenta? Justifica la resposta
h) La pressió que arriba a l'hotel fa que tinguin que engegar una bomba d'aigua addicional si el consum augmenta de 1,2 m^3/h. Volen posar un temporitzador que engegui i apagui la bomba automàticament. ¿entre quines hores han de programar el temporitzador?

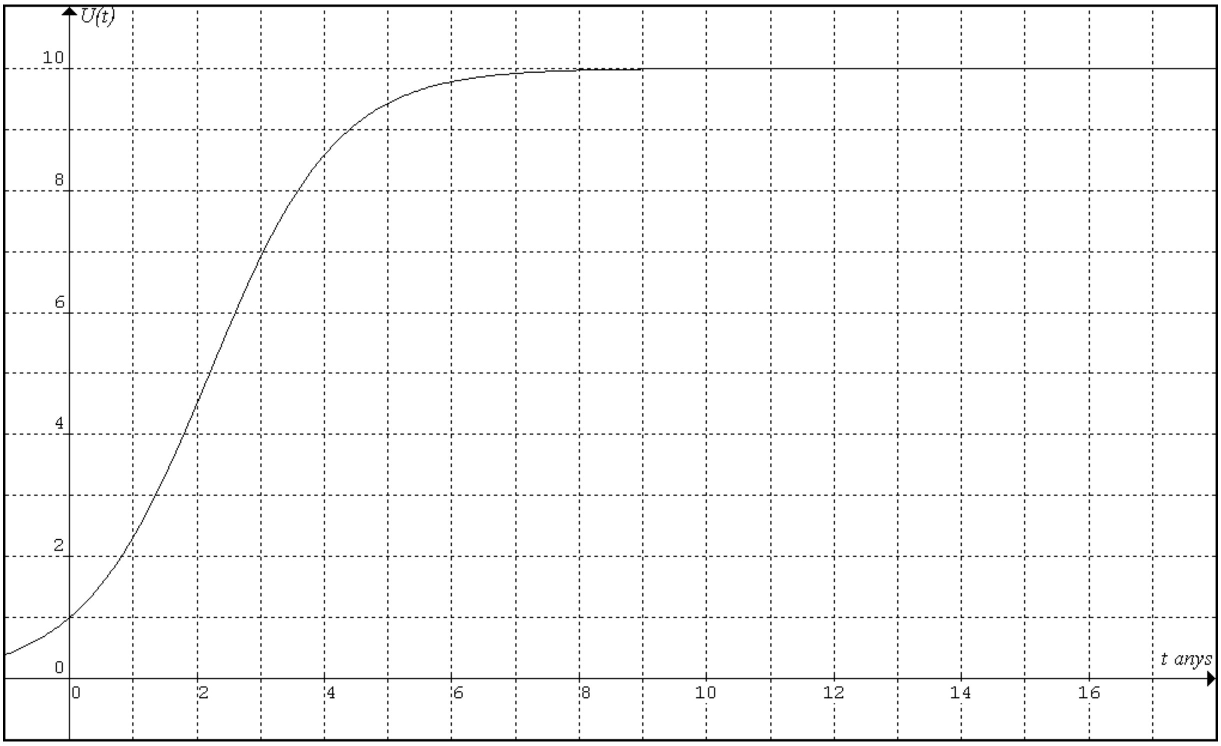
F.2 La funció **logística** és un model matemàtic que descriu el creixement de la població (tant humana com animal). En aquest model matemàtic, uns individus disposen d'uns recursos determinats que permeten créixer a la població d'una manera exponencial fins que els recursos s'esgoten. En aquest moment el creixement es frena i, en el millor dels casos, s'estabilitza. Habitualment es produeix una variació en els recursos que precipiten una davallada de la població, això permet una recuperació dels recursos i el cicle s'inicia de nou.
La funció logística és també aplicable a l'evolució econòmica de les empreses que creixen d'una manera exponencial fins que el mercat se satura. En aquest cas, amb una mica de sort, pot haver estabilització.

L'empresa de telefonia mòbil ACMOBIL vol llençar al mercat el model 3PK. Ha fet un estudi de mercat i considera factible arribar a vendre el model a unes 10 000 persones. La Ines Sapmolt, matemàtica de l'empresa, ha dissenyat un model matemàtic que descriu, d'una manera molt fiable, l'evolució de les vendes al llarg del temps. La funció logística que ha obtingut és

$$U(t) = \frac{10}{1+9e^{-t}}$$

On $U(t)$ és la quantitat d'Unitats venudes en milers, en funció del temps en anys t

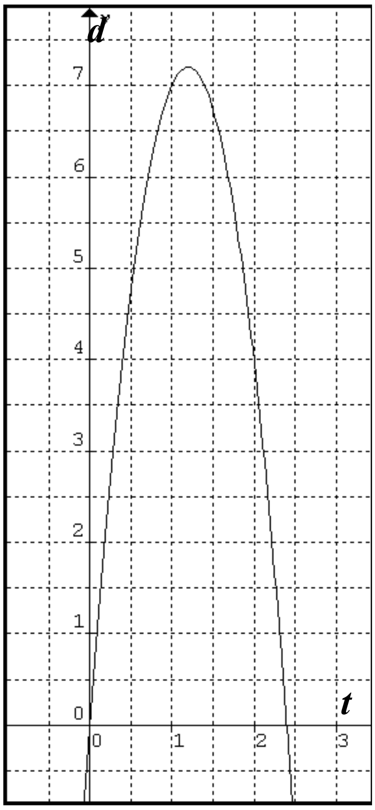
El gràfic d'aquesta funció és.



a) Abans de res, deriva la funció U(t) i simplifica-la al màxim. Utilitza-la, després, en tots els apartats que calgui.
b) Per trobar la funció la Inès ha necessitat conèixer l'evolució prèvia de les vendes del producte durant un curt termini de temps, després del qual s'inicia la funció teòrica amb temps $t = 0$. ¿quantes unitats havien venut en el moment de fer l'estudi?
c) ¿quantes unitats esperen vendre al cap de 3 anys?
d) ¿quina és la taxa mitjana esperada de vendes anuals dels 3 primers anys?
e) ¿quina és la taxa instantània en Unitats/any esperada just en el moment en que es compleixen els 3 anys. (fes un càlcul aproximat amb el dibuix i calcula'l després de manera exacta amb la derivada)
f) Dibuixa el gràfic aproximat de la evolució de taxes instantànies (derivada).
g) El cap de personal de l'empresa considera que si l'índex de vendes supera les 2000 Unitats/any necessitarà contractar personal addicional per fabricar més aparells, però necessita saber-ho amb temps per poder fer la selecció de personal. Imagina que tu ets la Inès i calcula l'interval de temps en que aquest fet és presumible que passi. (fes una estimació prèvia a partir del gràfic i intenta calcular-ho amb precisió amb la funció derivada)

G. La velocitat i el moviment d'un mòbil

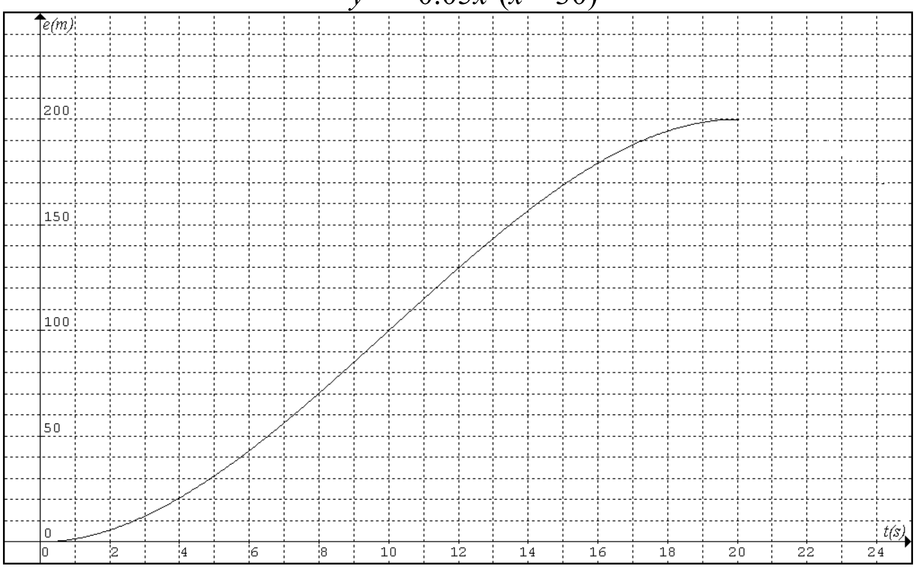
G.1 En llançar enlaire una pedra verticalment, amb una velocitat inicial de 12 m/s, la seva alçària en metres al cap de t segons ve donada per la funció: $d(t) = 12t - 5t^2$ i el seu gràfic és el que et donem.



a) ¿Quina és l'alçària de la pedra al cap de mig segon? ¿l al cap d'un segon? ¿I al cap de 2 segons?
b) ¿Com s'explica que l'alçada al cap d'un segon sigui més gran que la corresponent als 2 segons?
c) ¿Quina és l'alçada màxima assolida per la pedra? En quin moment hi arriba?
d) ¿En quin moment la pedra torna a caure terra?
e) Calcula la fórmula de la velocitat instantània
f) ¿quina és la velocitat de la pedra en el moment de llançar la pedra?
g) ¿quina és la velocitat de la pedra al cap d'un segon? ¿i al cap de 2 segons?
h) ¿com 'explica que la velocitat al cap de 2 segons sigui negativa?
i) ¿quina velocitat te la pedra just en el moment en que la pedra assoleix la màxima alçada?
j) ¿quina velocitat te la pedra en el moment de caure a terra?

G.2 L'Aitana Prats treballa com a matemàtica en el departament de control de seguretat de la SEAT i ha d'analitzar els efectes de la col·lisió d'un vehicle a determinades velocitats. Per evitar col·lisionar gaires cotxes en l'estudi, genera un model matemàtic que descriu el moviment d'un cotxe durant els primers 20 segons. L'Aitana ha trobat que la fórmula següent descriu força bé aquest moviment:

$$y = -0.05x^2(x - 30)$$

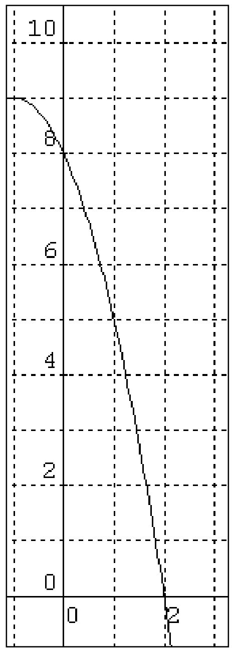


a) Troba la velocitat instantània als instants 0 segons, 4 s, 10 s, 16 s, 20 s.
b) Fes el gràfic aproximat de la velocitat.

G.3 Des d'una finestra a 8 metres d'altura es posa una rampa i es deixa caure una bola. La fórmula del recorregut de la bola ve donada per la funció següent on la x és el recorregut horitzontal i la y el recorregut en vertical:

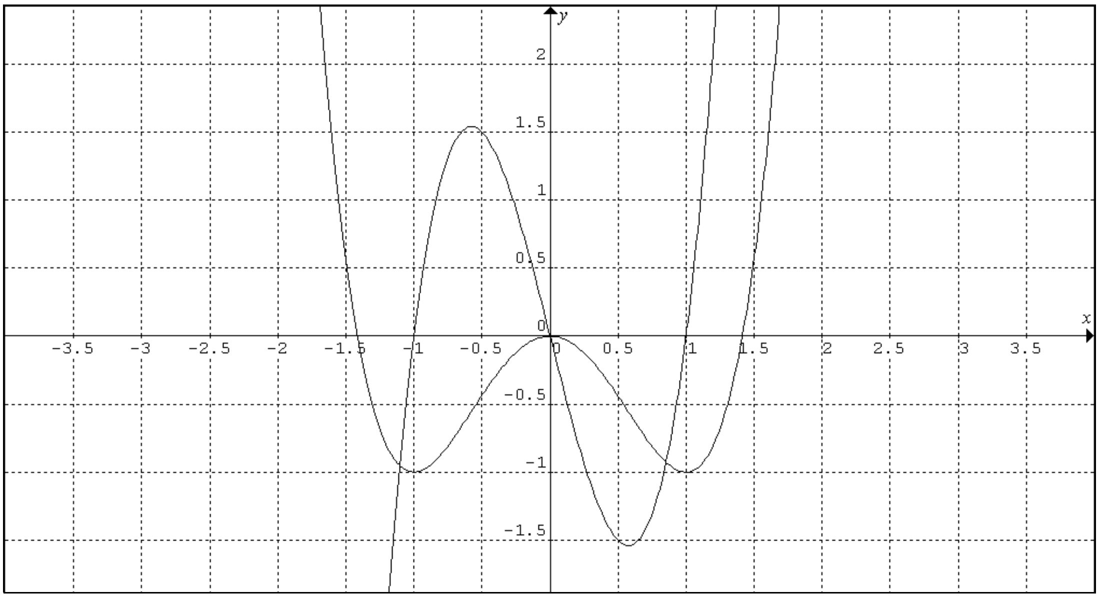
$$y=-x^2-2x+8$$

a) ¿A quina distància de la paret cau la bola?
b) ¿quin és el pendent en que estava posada la rampa des del que s'ha llançat la bola?
c) ¿quin és el pendent de la direcció de la bola en el moment en que cau al terra?



H. El comportament d'una funció

H.1 Observa els gràfics de la funció $y = x^4 - 2x^2$ i de la seva derivada $y' = 4x^3 - 4x$



a) Compara el **comportament de la funció** amb el **signe de la derivada** omplint la següent taula de comportament: (t'omplo jo algunes caselles per a que vegis els símbols que et cal utilitzar)

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
y	$\searrow$	-1					
y'	**-**	0					
		Mínim					

Observa que a la taula de comportament únicament tenim en compte els valors de la x de la funció que afecten al seu **comportament** amb un sentit estricte de **creixement i decreixement**. No ens interessen els valor en que la funció canvia de signe.

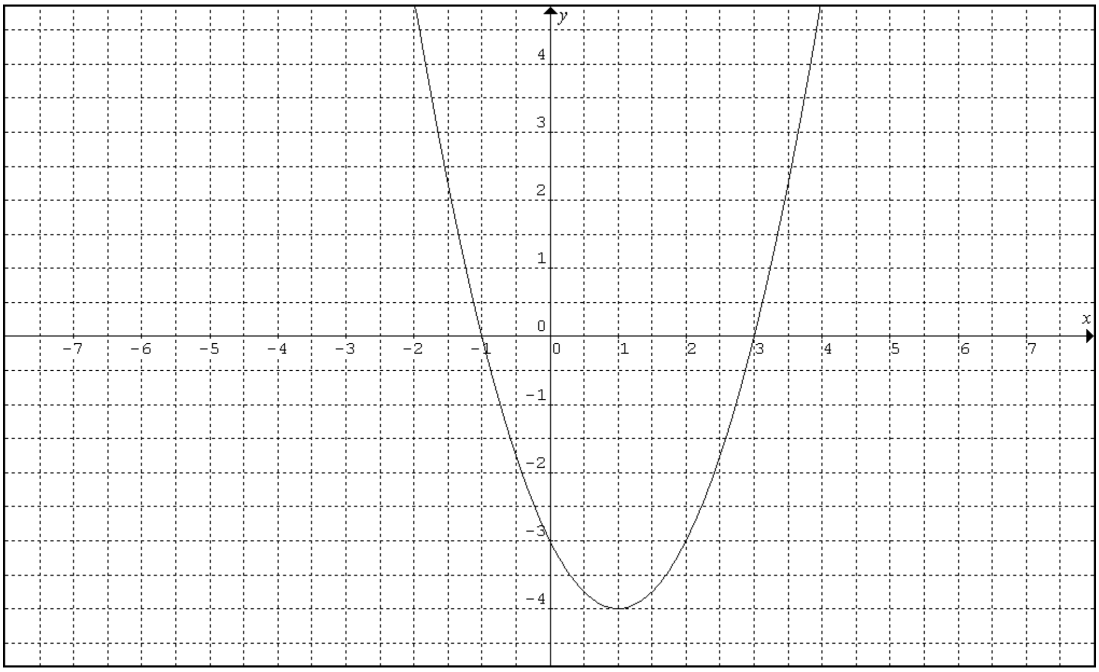
H.2 Omple la taula següent:

Si la funció f(x)...	**La derivada és**	**Perquè**
$\nearrow$		
$\searrow$		
Té un màxim		
Té un mínim		

H.3 Omple la taula següent: (observa que amb derivada zero hi ha tres casos possibles, explica'ls bé ajudant-te d'un dibuix)

Si la derivada és	**La funció**	**Perquè**
+		
-		
0		

H.4 Sabem que el gràfic de la **funció derivada** d'una funció és.



Sabem també que f(-1) = (2) i que f(3)= -1

a) Fes la taula de comportament de la funció.

b) Fes un esbós aproximat de la funció.

H.5 D'una funció només saps que $f(2) = f'(2) = -3$ .Aquesta informació et dóna alguna idea per saber com seria el seu gràfic? Representa una funció que compleixi la condició donada.

H.6 D'una funció $f:[-2,8] \longrightarrow +R$ coneixem les dades següents:
$f(-1) = 0$; $f(0) = 2$, $f(2) = 4$; $f(4)=6$;
$f(7) = f'(1) = f'(4) = f'(7) = 0$ i $f'(1) = -\frac{1}{2}$
Fes el gràfic d'una funció que s'ajusti a aquestes condicions.

H.7 Estudia els intervals de creixement i els màxims i mínims relatius i fes la taula de comportament i finalment fes el gràfic de les funcions següents:

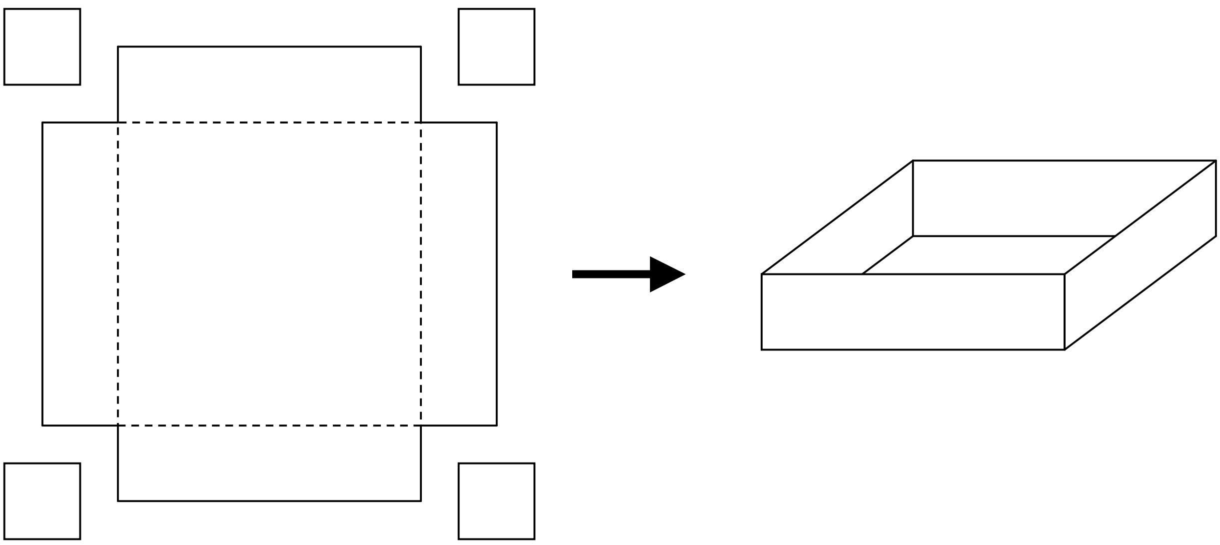
a) $f(x) = x^2 - 3x$
b) $g(x) = -3x^2 + 2x - 1$
c) $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2$
d) $k(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 7$
e) $l(x) = x^4 - 32x$
f) $m(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
g) $n(x) = 10 - 2x^2$
h) $r(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

H.8 Demostreu que la funció $f(x)=1/x$ és decreixent en tot el seu domini

H.9 Demostreu que la funció: $f(x)=1/(x+1)$ és creixent en tot el seu domini.

I. Problemes de màxims i mínims

I.1 En una tintoreria necessiten uns dipòsits per a posar-hi tint, i per construir-los volen aprofitar unes xapes quadrades de 60 cm de costat. Volem estudiar la possibilitat de construir amb aquestes xapes dipòsits de volum màxim pel procediment de retallar les puntes de les planxes en la forma indicada a la figura, doblegar i després per la línia de punt i soldar.



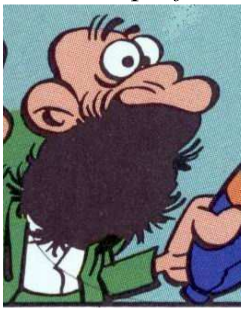
a) Considera x el costat dels quadrats que retallem i y el volum final de la caixa. Busca la fórmula que et calculi el volum y en funció de la variable x.

b) Utilitzant aquesta fórmula fes una taula de valors en la que vagis calculant diferents volums en variar el quadrat inicial. Fes un esbós del gràfic que descriu aquesta variació:

c) Calcula el l'amplada del quadrat x que hem de retallar per tal que el volum final sigui màxim.

I.2 Un pagès ha de construir una tanca de forma rectangular per al bestiar al costat d'un riu. Només té 800 m de fil electrificat i vol aconseguir el màxim de superfície per a la pastura. Si considerem que el costat que dóna al riu no cal posar-hi fil, quines dimensions ha de tenir la tanca?

I.3 El *professor bacterio* (el famós personatge del còmic del *Mortadelo* i

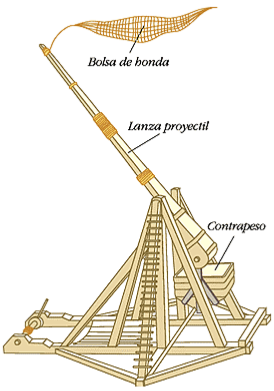


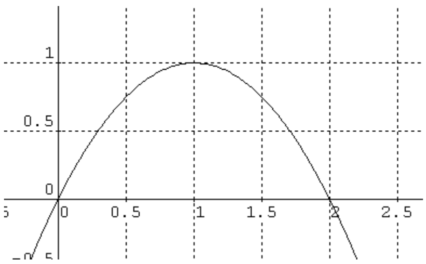
Filemón) llueix una espessa barba per tapar-li la cara ja que és lletgíssim. A la Història de les matemàtiques hi ha un precedent d'aquest fet singular, es tracta de **Nicolo Fontana**. Quan en Nícolo era petit un soldat francès li va regalar un cop de sabre a la cara que el va deixar mig mort. En aquella època (1520) no hi havia cirurgia estètica, així que va optar per tapar-se la cara, amb una barba. A més de lleig en Nicolo es va quedar tant tartamut, que fins i tot ell mateix signava els seus escrits amb el sobrenom de **Tartaglia** (tartamut en italià).

No va perdonar mai al soldat francès ja que va dedicar gran part de les seves energies en millorar les tècniques de llançament de projectils, calculant la inclinació o pendent en que s'havia de llançar un projectil per arribar a un objectiu determinat. Si llancem un projectil amb una inclinació de pendent m l'equació que determina la trajectòria bé donada per:

$$y = -\frac{5}{v^2}(1+m^2)x^2 + mx$$

on la x representa la trajectòria horitzontal, la y la trajectòria en vertical, la v la velocitat de sortida del projectil i m, com ja hem dit, la inclinació (pendent) del canó. Per exemple, imaginem que posem un canó amb una inclinació de pendent m = 2 , que expulsa el projectil a una velocitat de 5000 m/s = 5 Km/s El gràfic de la trajectòria (en quilòmetres) seria:





a) Substitueix v = 5 i m = 2 i simplifica-la.
b) Demostra que, efectivament, la inclinació del canó en el moment del llançament és de pendent m = 2
c) Calcula la inclinació en que caurà el projectil al terra
d) Calcula l'alçada màxima que aconseguirà aquest projectil
e) Calcula la distància a la que arribarà el projectil

Considera ara l'expressió de la trajectòria amb velocitat de 5 km/s però amb una inclinació variable.

$$y = -\frac{1}{5}(1+m^2)x^2 + mx$$

si volem calcular la distància a la que caurà el projectil haurem de considerar que l'alçada *y* del projectil és zero: $y = 0$, és a dir

$$0 = -\frac{1}{5}(1+m^2)x^2 + mx$$

f) Si aïlles en l'anterior expressió la x obtindràs una fórmula que et permet calcular la distància, en funció de *m*, a la que caurà el projectil. Et facilito el gràfic d'aquesta nova funció X(*m*)

g) Utilitza l'expressió anterior per calcular la distància a la que caurà el projectil si el pendent és *m* = ½, Torna-ho a fer per *m* = 1,5 i per *m* = 3 i per *m* = 5 (observa com el resultat obtingut coincideix amb el que es mostra al gràfic adjunt)
h) Calcula la inclinació que haurien de posar al canó per poder assolir una distància màxima (observa que ara la variable és *m* i per tant cal derivar en funció de *m*)
i) Calcula quina serà aquesta distància màxima.
j) Calcula quina inclinació caldrà donar-li al canó per aconseguir tocar un objectiu que estigui a 1200 metres.
k) Busca una fórmula que et permeti trobar la inclinació necessària per a poder arribar a una distància determinada desitjada