Funció exponencial i logarítmica

Matemàtiques 1r Batxillerat

El creixement exponencial

F.1 Imagina't que prens un full de paper i el doblegues pel mig unes quantes vegades.

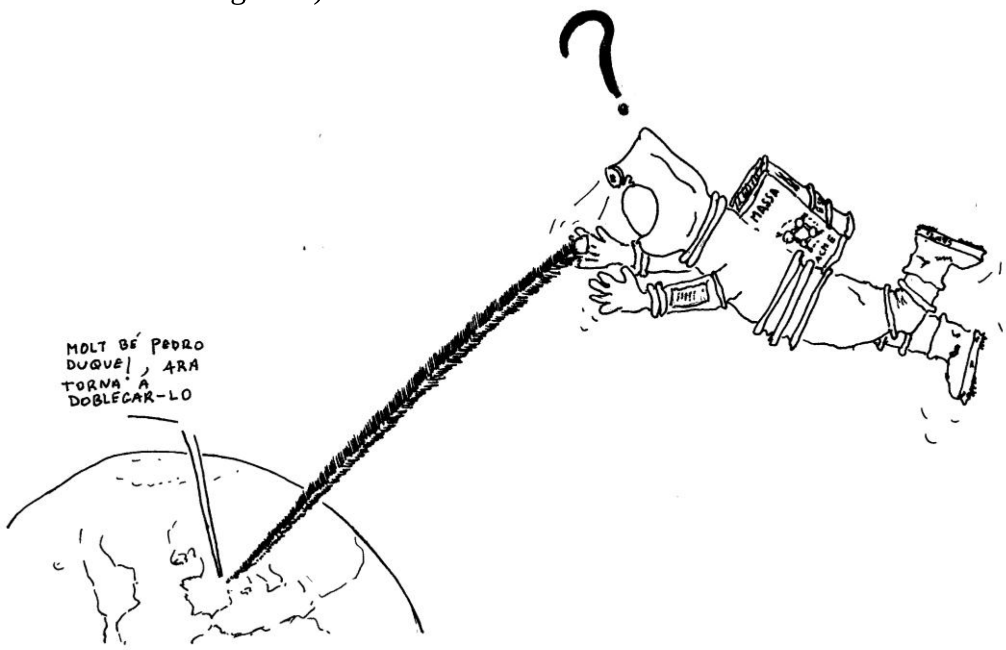
a) Si el gruix del full és de 0,1mm, calcula quin és el gruix del plec després de doblegar-lo cinc vegades i després de deu vegades.

b) Sense calcular-ho, fes una conjectura (una suposició a ull) de quantes vegades creus que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés 1km (considera que el full és prou gran com per poder anar-lo doblegant moltes vegades!).

c) Calcula els gruixos (en metres) fins que se superi el km. Organitza les dades en una taula com:

Nombre de doblecs : n	1	2									
Gruix del plec en metres : G_n (m)											

d) Sense calcular-ho, fes una conjectura de quantes vegades creus que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés la distància entre la Terra i la Lluna (imagina't que el full és prou gran com per poder doblegar-lo moltíssimes vegades!)



e) Utilitza la tecla **x^y** de la calculadora per investigar quants doblecs caldria fer per superar la distància Terra-Lluna.

f) Escriu la fórmula del gruix del plec en funció del nombre de doblecs.

g) Quin és el domini d'aquesta funció?

h) A la pràctica, quantes vegades pots arribar a doblegar un full DIN A4 ?

i) En quin tant per cent augmenta el gruix del plec cada vegada que el dobleguem?

SUCCESSIONS DE NOMBRES

Una col·lecció ben ordenada i infinita de nombres direm que és **una successió**. Cada un dels seus elements és un **terme** de la successió. Si la successió la simbolitzem com $\mathbf{a_n}$, la successió serà:

a_1 , a_2 , a_3 , ...a_n ,..........

Així en la successió dels nombres parells: 2, 4, 6, 8,...., el nombre 2 és el primer terme, el 4 el segon terme, etc. Si simbolitzem aquesta successió com a successió de terme general $\mathbf{a_n}$ tindrem que el primer terme serà $a_1=2$, el segon serà $a_2=4$ i el terme del lloc **n** serà $a_n=2n$.
Observeu que una successió ve donada per una funció amb domini els nombres naturals **N**. De manera que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \Rightarrow & \mathbf{R} \\ 1 & \rightarrow & a_1 \\ 2 & \rightarrow & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n & \rightarrow & a_n \end{array}$$

En una successió no s'acostuma a utilitzar el llenguatge simbòlic de les funcions sinó les expressions amb subíndex. Com a variable independent, que només agafa valors naturals, el més habitual és usar la lletra **n** en lloc de la lletra **x** que és la més utilitzada en les funcions de domini els nombres reals. Així en la successió de nombres parells escriurem $a_3=6$ i direm que és el tercer terme en comptes d'expressar-ho com $f(3)=6$ i dir que és la imatge de 3.

Recordant les variacions en percentatge

F.2 Resol les qüestions següents. En cada cas digues com es podria resoldre efectuant bàsicament una multiplicació i indica de forma clara **quin és el factor que cal utilitzar per calcular el resultat:**

a) Un poble que tenia 4570 habitants fa 10 anys ha augmentat en un 100% la seva població. Quants habitants té ara?
b) Si un partit que va tenir a les últimes eleccions 756.918 vots ha disminuït en un 30% el nombre de vots, quants vots ha tingut ara?
c) Si el preu d'una bicicleta era de 370 € i s'ha augmentat un 5%, quin preu té ara?
d) Si tenim una quantitat **x** i la variem en un **R%**, quina quantitat tindrem?

L'interès simple.

F.3 Una persona col·loca els seus diners, 6000 €, a una Caixa d'Estalvis a un interès simple del 2% anual.(Interès simple: els interessos no s'acumulen al capital; aquest es manté constant: només dóna interessos el capital inicial)

- **a)** Calcula quants diners tindria (saldo del compte: capital més interessos), al final de cada un dels 5 primers anys? (Per expressar els saldos pots indicar-ho com els termes d'una successió $\mathbf{S_n}$ on **n** és el nombre d'anys. Així el saldo al final del primer any serà S_1 i així successivament)
- **b)** Calcula S_{10} i S_{18}.
- **c)** Quina llei segueixen els nombres de la successió de saldos? Escriu la fórmula del saldo corresponent a n anys (S_n).
- **d)** Si representessis la successió de saldos en un sistema d'eixos de coordenades com la funció que et dóna el saldo segons el nombre d'anys, quin tipus de gràfic et donaria?

L'interès compost.

F.4 Una persona col·loca els seus diners, 6000 €, a una Caixa d'Estalvis a un interès compost del 2% anual. (Interès compost: els interessos s'acumulen al capital; per tant els interessos també donen interessos). Si considerem que $\mathbf{C_n}$ és el saldo al cap d' n anys:

- **a)** Calcula C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5.
- **b)** Calcula C_{10} i C_{18}
- **c)** Escriu una fórmula del terme general C_n .
- **d)** Compara els saldos de l'interès compost amb els de l'interès simple.

F.5 Imagina't que estàs a la sala d'espera del dentista i sents que una dona explica a una amiga com li van els negocis. Li diu:

"*Fa 10 anys vaig muntar un negoci amb una inversió inicial d'un capital de 5000 €, i la cosa m'ha anat força bé perquè el negoci ha tingut un rendiment anual aproximat d'un 25%*"

- **a)** Calcula quin és el capital que creus que té actualment el negoci.
- **b)** Compara la teva resposta amb la d'altres companys o companyes i reflexiona sobre les qüestions següents:

¿Tothom ha entès el mateix a l'hora d'interpretar què vol dir un rendiment anual d'un 25%?

És possible que hi hagi dues interpretacions:

- que el 25% és sempre sobre el capital inicial del primer any (com en el model de l'interès simple)
- o bé que el 25% és sobre el capital de l'any anterior (com en el model de l'interès compost).

Per saber com ha anat aquest negoci, creus que és important saber quina interpretació és la bona?

F.6 Considera les cinc successions següents com a funcions que tenen per domini els nombres naturals **N**:

- Funció f, tal que f(n) = 2n
- Funció g, tal que g(n) = n^2 .
- Funció h, tal que h(n) = 2^n
- Funció i, tal que i(n) = $(1,02)^n$
- Funció j, tal que j(n) = $(0,75)^n$

a) Fes una taula i representa en un mateix sistema de coordenades les 5 funcions. (Agafa una escala a l'eix d'ordenades que et permeti representar tots els punts del gràfic de les quatre funcions per a valors d'*n* entre 1 i 5. Tingues en compte que són successions és a dir la variable independent només agafa valors naturals)

Valors n	**2n**	**n^2**	**2^n**	**$(1,02)^n$**	**$(0,75)^n$**
1					
2					
3					
4					
5					
10					
20					
100					
300					
1000					

b) Encara que no ho puguis representar intenta ampliar la taula amb els valors n=10, 20, 100, 300 i 1000 i compara les imatges de les quatre funcions. Observes alguna cosa que et sorprengui?

c) Observa les successions que has obtingut en cada cas i intenta trobar una manera de trobar un terme de la successió a partir de l'anterior. Si ho trobes fes una frase en cada cas del tipus: *"Cada terme s'obté de l'anterior........"*

CREIXEMENT CONSTANT: PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

Als exercicis i problemes anteriors heu vist successions de nombres com la dels nombres parells o els saldos de l'interès simple en les quals **cada terme de la successió s'obté de l'anterior sumant una quantitat constant**. Aquest tipus de successions són les **progressions aritmètiques**.
En aquestes successions el creixement (o decreixement si la quantitat fixa que sumem és negativa) és un **creixement (o decreixement) constant**: el creixement és sempre el mateix quan passem d'un terme al següent.
La fórmula o terme general d'aquestes progressions és un **polinomi de primer grau** i el seu gràfic cartesià com a funcions de variable natural és un conjunt de punts alineats en **una recta**. Per això els fenòmens que tenen un comportament d'aquest tipus és diu que tenen un **comportament lineal o en progressió aritmètica**.

La fórmula per tant és del tipus:

$$\mathbf{a_n = a \cdot n + b}$$

on la variable $n \in N$, **a** (seria el pendent de la recta) és la quantitat constant que hem de sumar per obtenir un terme a partir del terme anterior i **b** (seria l'ordenada a l'origen de la recta) és el valor del terme que ocuparia el lloc zero: $b = a_0$.
Aquesta fórmula correspon al model de la **funció afí**: $f(x) = mx + n$; $x \in R$.
Fixa't que si comparem les dues fórmules hi ha una lletra que apareix a les dues, però amb una interpretació totalment diferent! En un cas és la variable independent i en l'altre l'ordenada a l'origen.

CREIXEMENT EXPONENCIAL: PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

En els casos del gruix segons el nombre de doblecs d'un full o el saldo de l'interès compost, tenim successions en les quals **cada terme de la successió s'obté del terme anterior multiplicant-lo per una quantitat fixa**. Aquest tipus de successions s'anomenen **progressions geomètriques**.
En aquestes successions el creixement (o decreixement si la quantitat fixa que multipliquem és un nombre positiu més petit que 1) se'n diu **creixement (o decreixement) de tipus exponencial**.
Els fenòmens que es comporten d'aquesta manera es diu que tenen un **comportament exponencial o en progressió geomètrica**.
La fórmula o terme general d'aquestes progressions és una expressió **no polinòmica** del tipus

$$a_n = k \cdot a^n \qquad n \in N$$

on **a**, la base de la potència, és el factor pel qual s'ha de multiplicar un terme per obtenir el següent de la successió.

A diferència del que passava amb les progressions aritmètiques, no hem estudiat encara un tipus de funció com $f(x) = a^x$ on $x \in R$ que se'n diu **funció exponencial**. Aquesta funció de variable real l'estudiarem en el proper tema. Fixa't que caldrà donar sentit a operacions com $5^{0,25}$ que es poden calcular amb la calculadora científica però que no signifiquen res des del punt de vista del càlcul elemental, ja que si l'exponent indica el nombre de vegades que hem de multiplicar el nombre de la base per ell mateix, no té sentit multiplicar el nombre 5 "0,25" vegades per ell mateix.

Hauràs observat que el creixement en progressió geomètrica o exponencial té unes característiques molt diferents que el comportament lineal o en progressió aritmètica.

Mentre que les progressions aritmètiques tenen un creixement constant i per tant quan passem d’un terme de la successió al següent la variació absoluta (la diferència) és fixa, en el creixement exponencial el que és fix és la variació relativa (el quocient entre dos termes és constant) és a dir **hi ha el mateix percentatge de variació entre dos termes consecutius**.

Si considerem el gràfic cartesià, podem dir que quan el comportament és lineal el pendent és sempre constant: el gràfic són punts en línia recta, i en el creixement exponencial el pendent o variació per unitat no és constant sinó proporcional al valor de la funció o successió.

El model exponencial és el model matemàtic que cal aplicar als processos en els quals hi hagi una taxa de creixement constant és a dir un percentatge d'augment o disminució constant en cada pas del procés.

Per exemple si una població augmenta cada any amb una quantitat fixa de 100 individus, el creixement de la població serà en progressió aritmètica és a dir tindrà un comportament lineal. En canvi si una població augmenta cada any en un 8% el seu creixement serà en progressió geomètrica, és a dir exponencial.

F.7 Fes un esquema on es puguin comparar les característiques del creixement constant i el creixement exponencial. Si vols pots usar una taula com aquesta:

	CREIXEMENT CONSTANT	**CREIXEMENT EXPONENCIAL**
Nom del tipus de progressió		
Com s'obté un terme a partir de l'anterior		
Fórmula del terme general de la successió: a_n		
Nom del model o tipus de funció de variable real		
Fórmula general de la funció de variable real: f(x)		
Tipus de gràfic cartesià.		
Altres característiques.		
Exemples de processos o situacions on es dóna el tipus de creixement.		

Treball de recerca: La música

Pitàgores i els membres de la seva secta consideraven la música com una ciència més. Gran quantitat de coneixements que tenim ara sobre la música parteixen dels seus estudis.
Per a la seva recerca inicial, Pitàgores va utilitzar el **monocordi**, un instrument amb una sola corda lligada per una banda i amb un pes penjant de l'altra. Amb el monocordi es pot modificar el pes i la longitud de la corda.

L'escala dels harmònics:

F.8 Com que no tenim un monocordi utilitzarem una guitarra. Assegureu-vos primer, que la guitarra és ben afinada. Colpegeu una corda qualsevol i desprès torneu a colpejar-la prement molt lleugerament amb un dit la corda just pel mig. Observareu com sona la mateixa nota però una octava més aguda. Si premeu lleugerament la corda a 1/3, ¼, 1/5, etc observareu que sempre sonen noves notes. Aquestes notes s'anomenen els harmònics. Colpegeu ara una sola corda sense tocar cap altra corda. Si atureu la vibració de la corda colpejada observareu com, per simpatia les altres cordes estan vibrant. Les notes que sonen son justament els harmònics de la nota copejada. Si volem construir una escala musical i ho fem sense incloure els harmònics, com que aquestes sonen per simpatia, el resultat musical seria desastrós perquè ens estaries sonant constantment notes que no formen part de l'escala musical. Anem a buscar, doncs, l'escala dels harmònics.

Per crear una escala musical hem de tenir en compte les següents regles:

- Si multipliquem o dividim una freqüència entre 2 (o potencies de 2) obtenim la mateixa nota encara que tingui una freqüència diferent. (per exemple la nota DO té per freqüència 264 vibracions per segon. La nota amb 2*264=528 també és la nota DO tot i que té una freqüència diferent i sona molt més aguda)
- Si multipliquem una freqüència per un nombre enter obtenim un harmònic..
- Contra més harmònics tingui una escala, millor.
- Una escala sencera seran totes les notes que vulguem incloure entre una freqüència inicial f i el doble d'aquesta freqüència $2f$ (es a dir entre, per exemple un DO i el DO següent amb doble freqüència)
- Si repetim el procediment entre $2f$ i $4f$ hem d'obtenir una escala equivalent a la primera (amb les mateixes notes) però més aguda

a) El primer Harmònic $3f$ és dins l'escala de notes que va de f a $2f$?.
b) Com podem crear una nota equivalent a $3f$ que estigui dins l'escala?
c) El segon harmònic seria $4f$. Aporta una nova nota a l'escala que busquem? Per què?
d) Per al següent harmònic $5f$ crea una nota equivalent que estigui dins l'escala.
e) Crea totes les notes de l'escala que es poden generar amb els harmònics fins el $15f$

f) Ordena totes les notes que has creat de menor a major.
g) Es tracta d'una progressió aritmètica, geomètrica o cap de les dues? per què?.
h) Calcula les freqüències corresponents si la nota principal és DO = 264 vibracions/segon.

F.9 Pots escoltar aquesta escala amb l'ordinador (demana-li al professor/a)
F.10 Aquesta escala té dos problemes greus:
a) L'escala té els harmònics de la nota principal f, però estan els harmònics de les altres notes?
b) La segona nota de la següent escala $2f$-$4f$ s'ha de poder treure sumant la diferència de la progressió aritmètica i també duplicant la segona nota de l'escala f-$2f$. Es això cert?
F.11 Escolta l'escala harmònica en progressió geomètirca (la podeu trobar dins la carpeta matemàtiques de la unitat "s").
a) Explica la sensació que et produeix.
.

L'escala Pitagòrica

Pitàgores es va adonar que no podia construir una escala amb tots els harmònics de totes les notes. Calia crear una escala en que totes les notes tinguessin l'harmònic més important $3f$, i, si pot ser, algun harmònic més. Per tant va començar a encadenar:
$f \to 3f \to 3(3f) \to 3(3(3f))$ es a dir, cada nota sortia en buscar el tercer harmònic del tercer harmònic que havia afegit anteriorment.

F.12 Anem a crear l'escala de Pitàgores
a) A partir de la nota principal f quina és la nota de l'escala f-$2f$ que genera el tercer harmònic d'f
b) Fas el tercer harmònic de la nota que has obtingut a l'apartat anterior i redueix-la entre f i $2f$
c) A partir de la nota anterior torna a crear el tercer harmònic dins l'escala.
d) Repeteix el raonament fins tenir 7 notes inclòs la nota principal f
e) Ordena les 7 freqüències de menor a major.
f) Ha aparegut algun altre harmònic de la nota principal?
g) És tracta d'una progressió aritmètica, geomètrica o cap de les dues?

F.13 L'escala de Pitàgores es va utilitzar durant molts segles. A les 7 notes que hem obtingut anteriorment (DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI) es van afegir 5 notes més seguint el criteri de buscar els tercers harmònics de les notes anteriors. (no cal que ho facis). Però aquesta escala tenia un greu inconvenient.
a) L'escala serà bona si el cicle tanca bé. Es a dir després de fer tots els 12 tercers harmònics obtenim un altre cop la nota principal però més aguda $2f$. Comprova si, efectivament l'harmònic $3^{12}f$ coincideix amb $2f$.

L'escala temperada

L'escala pitagòrica es va utilitzar durant molts anys. Com que l'últim harmònic no coincidia amb la nota principal $2f$ Els músics a aquest últim harmònic l'anomenaven harmònic **del llop** per què udolava com un llop

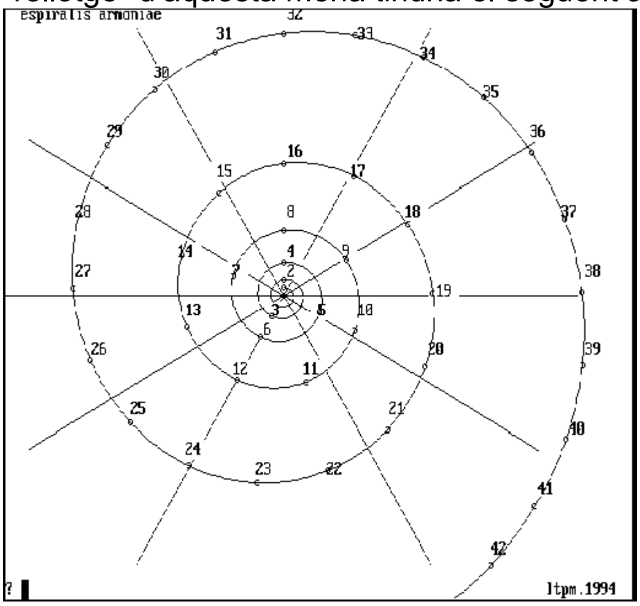
Joan Sebastià Bach es va adonar que aquesta escala donava molts problemes a l'hora d'afinar un instrument de teclat.

Bach va demanar ajut al matemàtic Johann Bernouilli (1667, 1748) Tercer fill de Nicolaus Bernouilli, pare de 3 matemàtics més, avi de tres més, besavi d'un altre i rebesavi d'un altre més.
Bernouilli de seguida es va ajudar a fer el següent raonament.

F.14 Observa l'escala pitagòrica. Pensa que en realitat té 12 notes

- **a)** Si hem de triar entre progressió aritmètica o geomètrica quina creus que funciona millor? Per què?
- **b)** Quina ha de ser la raó entre dues notes que estan separades per una octava?
- **c)** Quina haurà de ser la raó entre dues notes consecutives? (separades per mig to)
- **d)** Bach va decidir partir del la=440 per crear la nova escala que va anomenar temperada. Completa les freqüències de totes les notes de l'escala
- **e)** Escolta ara l'escala temperada
- **f)** Bach va afinar un clavecí amb aquesta nova escala i va compondre una sèrie de peces anomenades "el clave ben temperat" per aquest nou instrument. Aquesta sèrie de composicions comença amb un preludi que no és més que una presentació de l'instrument, desprès mostra el seu potencial amb peces molt complexes. Escolteu-les.

Tot i que Bach utilitzava estructures matemàtiques per a fer les seves composicions no era matemàtic i no entenia massa bé com sortien les notes d'aquesta escala i li va demanar a Bernouilli que li fes una explicació visual. Bernouilli es va adonar que en realitat les notes funcionaven d'una manera cíclica com un rellotge (de fet el rellotge té 12 hores igual com les notes de l'escala) però les notes iguals *f*-2*f* tenen duplicada la freqüències. Un "rellotge" d'aquesta mena tindria el següent aspecte:



G. La funció exponencial

Hem vist que les progressions geomètriques tenien un fórmula o terme general del tipus:

$$a_n = k \cdot a^n \qquad n \in N$$

Hi ha molts fenòmens que tenen un comportament exponencial i que la variable independent pot agafar valors no naturals: negatius, fraccionaris o irracionals. Per tant hem d'estudiar quin sentit cal donar a les potències d'exponent no natural. O sigui hem de donar significat a expressions del tipus 2^{-3}, $4^{\frac{1}{5}}$, $3^{\sqrt{2}}$. . . . . D'aquesta manera obtindrem una funció exponencial que tindrà per domini tots els nombres reals.

Concentració de bacteris en un cultiu: tenen sentit els exponents negatius?

G.1 A l'intestí humà hi ha un tipus de bacteri, anomenat *Escherichia Coli*, encarregat de sintetitzar la vitamina K (antihemorràgica). Aquest bacteri, quan està en un cultiu en condicions apropiades, duplica la seva concentració cada 20 minuts.
Suposem que en tenim una suspensió en un líquid amb una concentració d'un milió de bacteris per cm^3. Al cap d'un període de 20 minuts podem preveure que la concentració serà de 2 milions i al cap de dos períodes, de 4 milions. En canvi, 20 minuts abans la concentració era només de mig milió, dos períodes abans un quart de milió.

a) Completa la taula següent de la funció *y = f(x)* que ens dóna la concentració en milions de bacteris per cm^3 segons el nombre de períodes transcorregut:

x: temps transcorregut expressat en nombre de períodes	**1**	**2**	**3**	**4**
y = f(x) concentració en milions de bacteris per cm^3	2			

b) Quin tipus de creixement té la concentració de bacteris ? Escriu la fórmula de la funció.
c) D'entrada el domini de la funció podem considerar que és **N**, o sigui els valors dels períodes són els nombres naturals 1, 2, 3,.... Per tant, quin tipus de progressió formaria la successió de concentracions?
d) Pensa en un nombre de períodes zero o nombres negatius (períodes anteriors) i completa la taula:

x: temps transcorregut expressat en nombre de períodes	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
y = f(x) concentració en milions de bacteris per cm^3			1/2=0,5		2	

e) Si la fórmula de la funció que has trobat a l'apartat **c)** ha de continuar essent vàlida per a períodes 0 o negatius, completa les igualtats següents d'acord amb la taula anterior.

$f(0) = 2^0 =$

$f(-1) = 2^{-1} =$

$f(-2) = 2^{-2} =$

$f(-3) = 2^{-3} =$

f) Segons això, com et sembla lògic definir què significa 2^{-n}

Un gràfic precís.

G.2 Considera la funció dels bacteris de l'exercici anterior. Fes un gràfic de la funció a partir de la taula de l'apartat **d)** de l'exercici anterior, tenint en compte que el domini són nombres enters i seguint les instruccions següents:

- Utilitza un full de paper mil·limetrat dinA4 sencer.
- Agafa unitats de 5 cm a l'eix d'ordenades i de 2 cm al d'abscisses.
- Posa els eixos de manera que puguis representar tots els punts de la taula.

Té sentit unir els punts del gràfic? Quin valor hem de donar a $2^{1/2}$?

G.3 Continuem amb els bacteris.
Té sentit plantejar-nos quina serà la concentració de bacteris quan hagi transcorregut només mig període (10 minuts)? Quant val aquesta concentració, o sigui, quina és la imatge de 0,5 per la funció f? Per contestar aquesta pregunta pots seguir tres camins. Segueix els tres camins en l'ordre que estan proposats i digues al final amb quin tipus d'estudiant et sents més identificat.

a) Qui veu millor les coses a partir d'un gràfic.
Uneix amb llapis i a mà alçada els punts del gràfic que ja has dibuixat a l'exercici anterior de manera que la línia sigui una corba suau sense canvis bruscos en el seu pendent. A partir del gràfic troba quin valor aproximat creus que tindria f(1/2).

b) Qui vol saber només el resultat sense preguntar-se el perquè d'aquest resultat.
Utilitza la fórmula de la funció, que de moment només té sentit per a valors d'*x* enters, per trobar amb la calculadora, amb la tecla $\mathbf{x^y}$, $f(1/2) = 2^{0,5}$. Compara el valor obtingut amb el valor obtingut amb el gràfic.

c) Qui es pregunta el perquè i vol raonar les coses
Raonarem quins càlculs ha fet la calculadora per donar-te el resultat
El fenomen que estem estudiant té un comportament exponencial: les concentracions de bacteris al passar d'un període al següent estan en progressió geomètrica, augmenten en una taxa o percentatge fix: un 100%, o sigui es multipliquen per 2. Si en comptes del període de 20 minuts

haguéssim agafat com a unitat de temps un període de 10 minuts, com que es tracta d'un creixement exponencial, tindríem també unes concentracions en progressió geomètrica (observeu l'esquema següent). Per tant en 10 minuts (1/2 període) la concentració hauria d'augmentar en un factor fix que al multiplicar-lo dues vegades (en 20 minuts, o sigui en 1 període) ens donés el factor 2. Per tant: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$, o sigui que $2^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{2}$.

Fixa't que ens hem quedat amb el valor positiu de l'arrel quadrada perquè el negatiu no té sentit en el gràfic, ni en el context del problema.

Comprova que l'arrel quadrada de 2 coincideix amb el valor que has obtingut abans amb la calculadora.

<table>
<tr><td rowspan="7">2^x</td><td>x períodes</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Cada 20 min</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>factor</td><td colspan="3">↘·2 ↗</td><td colspan="2">↘·2 ↗</td><td colspan="2">↘·2 ↗</td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>x períodes</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Cada 10 min</td><td>1</td><td>$2^{0.5}$</td><td>2</td><td>$2^{1.5}$</td><td>4</td><td>$2^{2.5}$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>factor</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td>↘· $2^{0.5}$↗</td><td></td></tr>
</table>

$$\boxed{2^{0.5} \cdot 2^{0.5} = 2 \;\Leftrightarrow\; \left(2^{0.5}\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; 2^{0.5} = \sqrt{2}}$$

L'ARREL ENÈSIMA D'UN NOMBRE:

En l'estudi de la funció exponencial hem hagut de calcular una arrel. A continuació veurem el significat de l'operació anomenada **radicació**.

Quan escrivim una expressió com $\sqrt[n]{a}$, essent *n* un nombre natural i *a* un nombre real, volem indicar un nombre que elevat a l'exponent n ens doni el nombre *a*. O sigui:

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$$

Per tant $\sqrt[5]{32} = 2$ perquè $2^5 = 32$

En una expressió com $\sqrt[n]{a}$:

- el nombre natural *n*, $n \in N$, s'anomena **índex**.
- el nombre real *a*, $a \in \Re$, s'anomena **radicant**.
- el símbol $\sqrt{}$, s'anomena **radical**.

Quan l'índex és el nombre 2, no cal posar-lo i l'expressió $\sqrt{a}$ s'anomena **arrel quadrada** d'*a*, quan l'índex és un 3, s'anomena **arrel cúbica** d'*a*. Per als altres índexs parlarem d'arrel quarta, arrel cinquena, etc. Si l'índex és un nombre genèric indicat per *n*, $\sqrt[n]{a}$ ho llegirem com **arrel enèsima** d'*a*.

Quan l'**índex és un nombre parell**, com en el cas de l'arrel quadrada, l'arrel, o bé té dos valors (dos nombres oposats) en el cas que el radicant sigui positiu, o bé no té valor en el cas que el radicant sigui negatiu. Per exemple:

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ o sigui 3 i -3, perquè tant $3^4 = 81$ com $(-3)^4 = 81$

I en canvi $\sqrt[4]{-81}$ no té cap valor real perquè un nombre elevat a l'exponent 4 sempre ens dóna un resultat positiu.

Quan l'**índex és un nombre senar**, com en el cas de l'arrel cúbica, l'arrel té un únic valor real del mateix signe que el radicant:

$\sqrt[3]{125} = 5$ i $\sqrt[3]{-125} = -5$

En els exemples que hem posat en aquest apartat les arrels tenien valor enter. Però en general ja saps que no és així. Per exemple $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ és un nombre no enter i no racional: és el que s'anomena **nombre irracional**, un nombre que no el podem expressar en forma de fracció, és a dir en forma decimal amb un nombre finit o periòdic de xifres. Això sí, en podem calcular un valor decimal aproximat, i tan aproximat com vulguem!.
La majoria de les arrels ens donen nombres irracionals. En aquests casos, i si no ens cal una aproximació decimal, les deixarem indicades amb el radical.
A més de la majoria de les arrels, hi ha molts d'altres nombres irracionals. Per exemple el nombre π. Tot i que fins ara no has treballat amb gaires nombres irracionals, a partir d'ara n'usaràs molts. Has de tenir en compte que hi ha infinits nombres irracionals, i encara més: entre dos nombres racionals qualssevol, per petita que sigui la seva diferència, per exemple entre 0,001 i 0,002, hi ha sempre infinits nombres irracionals!

G.4 Calcula per tempteig utilitzant la calculadora, una aproximació arrodonida a la segona xifra decimal de les arrels següents utilitzant només l'operació de multiplicar.

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt[4]{361}$

ELS EXPONENTS NO NATURALS

D'acord amb el que hem vist anteriorment el significat dels exponents és:

Per a **exponents enters positius**:

$$a^n = a \cdot \overset{n \text{ factors}}{\cdots} \cdot a \qquad \text{exemple: } 3^4 = 3\bullet3\bullet3\bullet3 = 81$$

Per a l'**exponent 0**:

$$a^0 = 1$$

Per a **exponents negatius**:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \qquad \text{exemple: } 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Per a **exponents fraccionaris**

$$a^{\frac{m}{n}} = +\sqrt[n]{a^m} \qquad \text{exemples: } 25^{\frac{1}{2}} = +\sqrt[2]{25} = +\sqrt{25} = 5$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} \approx 3{,}66$$

La justificació d'aquestes definicions es basa en la lògica de l'ampliació de la funció exponencial de manera que tinguin sentit les imatges corresponents, però la seva justificació rigorosa s'ha de trobar en les propietats que compleixen els exponents naturals i que només amb aquestes definicions es mantenen per a qualsevol tipus d'exponents.
Tot seguit estudiarem aquestes propietats.

G.5 Troba, usant la calculadora el valor decimal, arrodonit a la cinquena xifra decimal, de les potències següents. Fes-ho en cada cas de dues maneres diferents:

- primer, usant la tecla $\mathbf{x^y}$ o bé la $\mathbf{x^{1/y}}$
- segon, sense usar aquestes tecles, a partir de la definició dels exponents negatius i fraccionaris: pots usar només les tecles de les operacions elementals, suma, multiplicació, divisió, les arrels i la funció **1/x**.
  Expressa la potència de manera que es vegi quines operacions has fet.
  5^{-3}; $7^{\frac{1}{2}}$; $0{,}4^{\frac{3}{2}}$; $154^{-\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{2}{3}}$

G.6

a) Intenta trobar amb la calculadora usant la tecla **x^y** el valor de les expressions següents:

$\sqrt[5]{32}$ $\sqrt[5]{-32}$ $(-2)^5$ $\sqrt[4]{-16}$ $\sqrt[4]{16}$

b) Què passa quan la base de la potència és negativa? Comenta amb els teus companys o companyes si han trobat les mateixes dificultats a l'hora de trobar potències amb base negativa.

c) Calcula els valors de l'apartat **a)** que tinguin sentit.

PROPIETATS DELS EXPONENTS

Les potències tenen unes propietats que en direm **PROPIETATS FONAMENTALS**:

- producte de potències de la mateixa base: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- quocient de potències de la mateixa base: $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- potència d'una potència: $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Aquestes propietats es pot comprovar que són certes per als exponents naturals, però també per els altres tipus d'exponents. Justament **les definicions que hem donat dels diferents exponents es justifiquen per tal que continuïn essent vàlides aquestes propietats**.

G.7 Utilitzant les propietats fonamentals dels exponents, posa en forma de potència única les expressions següents:

a) en potència de base *a*: $a^3 \cdot a^5$

b) en potència de base 2: $\dfrac{2^3 \cdot 2^4}{2^9}$

c) en potència de base *b*: $b \cdot b^{-2}$

d) en potència de base *a*: $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$

e) en potència de base 3: $3^2 \cdot \sqrt{3}$

f) en potència de base 5: $0{,}2 \cdot \sqrt[3]{5}$ (hauràs de posar 0,2 com a potència de 5: pensa en els exponents negatius)

G.8 Escriu en forma de potència única de base 3:

$\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ $\quad 9 \cdot \sqrt{3}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

G.9 Escriu en forma de potència única de base *a* :

$\dfrac{a \cdot \sqrt[3]{a}}{a}$ $\quad \dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a}$ $\quad \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6}$

G.10 Escriu en forma de potència única:

$\left(2^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}\right)^4$ $\quad \dfrac{2^{\frac{5}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2^5}}{4^3}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{3^5}}$

G.11 Escriu en forma de potència única:

$\left(a^{\frac{4}{3}} \div a^{\frac{3}{2}}\right)^{-4}$ $\quad \left[\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{3}{4}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{125} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 0{,}2^{-2}}{25^{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}04^3}$

RACIONALITZACIÓ DE DENOMINADORS

De vegades convé suprimir els radicals que hi ha en un denominador. Per fer-ho, cal multiplicar-lo per l'expressió adequada. Naturalment, el numerador també es multiplicarà per aquesta expressió. Vegem els procediments per suprimir arrels del denominador.

- Per suprimir una arrel quadrada només cal multiplicar per la mateixa arrel

$$\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

- En una suma d'arrels se suprimeixen els radicals multiplicant per el seu conjugat.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7.(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}).(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{7.(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

G.12 Racionalitza

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{7}}$ d) $\frac{2}{\sqrt[5]{6}}$

e) $\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ f) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ g) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}$ h) $\frac{7}{3+\sqrt{7}}$

ESTUDI DE LA FUNCIÓ EXPONENCIAL

FUNCIÓ EXPONENCIAL DE DOMINI ELS NOMBRES REALS

Ja hem donat significat a les potències d'exponent un nombre racional, amb la qual cosa la funció exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ té per domini el conjunt Q dels nombres racionals. Però ens falta calcular potències d'exponent irracional per tal de tenir una funció definida en tots els nombres reals, o sigui de domini R. És a dir, ens falta trobar el valor d'expressions del tipus $2^{\sqrt{2}}$ *o* 2^{π}.

Com abans, quan hem donat significat a $2^{\frac{1}{2}}$, podríem trobar un valor aproximat de $2^{\sqrt{2}}$ a partir del gràfic, o buscar el valor amb la calculadora. Vegem, però, com es pot calcular una aproximació tan bona com vulguem de $2^{\sqrt{2}}$ a partir de potències d'exponents racionals.
Considerant $\sqrt{2}\cong 1{,}41$ tindrem que:

$1<\sqrt{2}<2 \quad\Rightarrow\quad 2^1<2^{\sqrt{2}}<2^2$

$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5 \quad\Rightarrow\quad 2^{1,4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}$

$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42 \quad\Rightarrow\quad 2^{1,41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,42}$

I així successivament. Agafant una bona aproximació decimal de $\sqrt{2}$ podem trobar una bona aproximació decimal de $2^{\sqrt{2}}$. Observa que les potències com són potències amb exponent racional, i per tant estan ben definides: $2^{1,41}=2^{\frac{141}{100}}=\sqrt[100]{2^{141}}$.

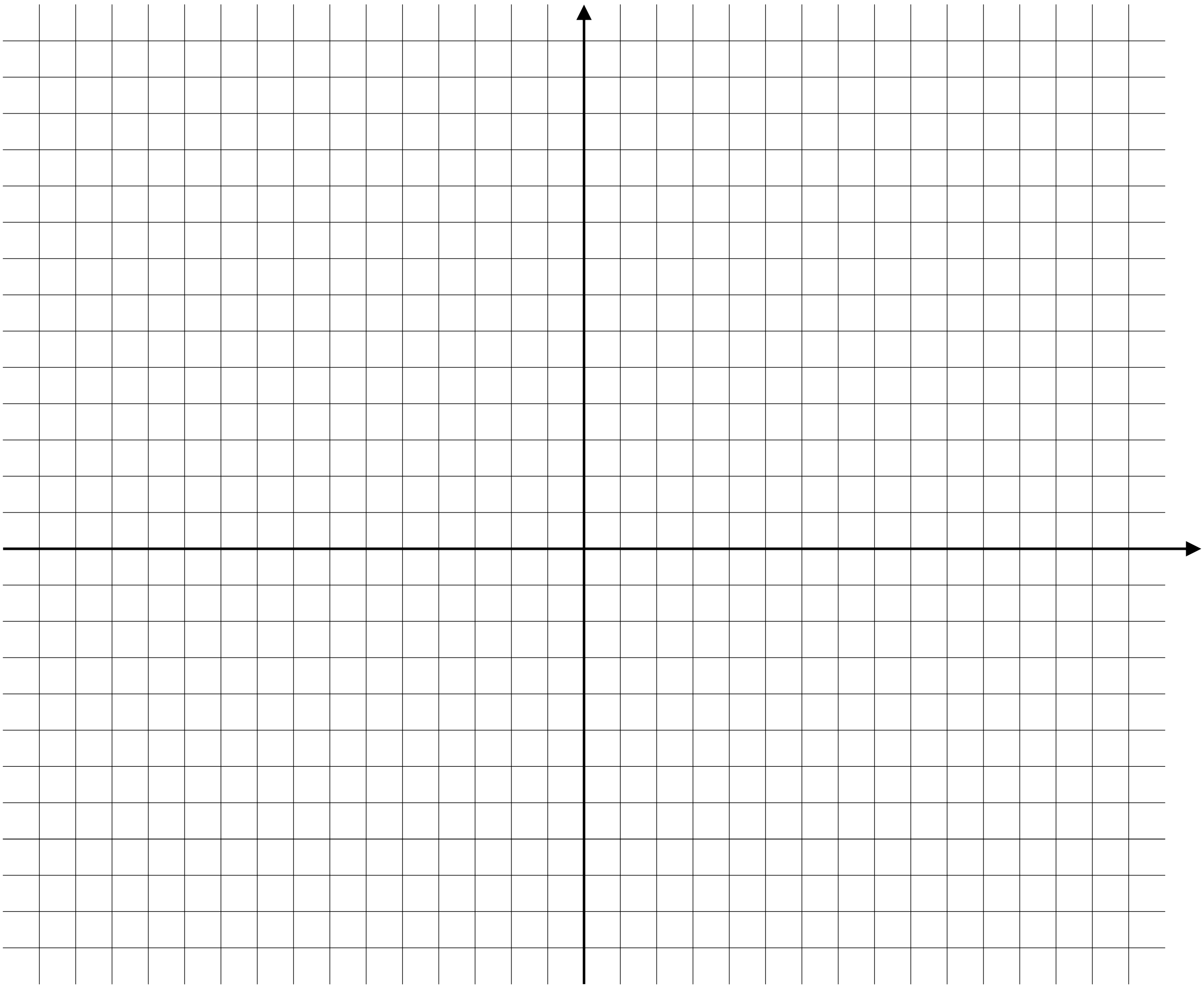
Per tant les funcions exponencials del tipus *f(x) = k • a^x^* són funcions $\Re\to\Re$, o sigui funcions de domini tots els nombres reals.
A continuació estudiarem aquestes funcions, i ho farem a partir de les característiques del seu gràfic.

UNA RESTRICCIÓ: a>0

Hem vist a l'exercici **G.6** que si la base *a* de la potència era negativa hi havia problemes per calcular algunes potències; per exemple $(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ no és cap nombre real. Per això en les funcions exponencials **la base *a* és sempre un nombre positiu: *a>0***.

Característiques de la funció exponencial $f(x) = a^x$

G.13 Utilitzant la calculadora gràfica (o un programa d'ordinador) dibuixa les següents funcions i contesta les preguntes.



a) $f(x) = 3^x$

- Observa que a = 3 $\square$ 1 (posa el símbol > ó < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

- Observa que a = $\frac{1}{3}$ $\square$ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

c) $f(x) = 2^x$

- Observa que a = 2 $\square$ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

d) $f(x) = 0.5^x$

- Observa que a = 0.5 $\square$ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

e) $f(x) = 1^x$

- Observa que a = 1 ☐ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

f) $f(x) = (\quad)^x$ tria tu la funció que vulguis. Recorda que *a* ha de ser obligatòriament positiu.

- Observa que a = ☐ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

g) $f(x) = (\quad)^x$ tria tu la funció que vulguis. Recorda que *a* ha de ser obligatòriament positiu.

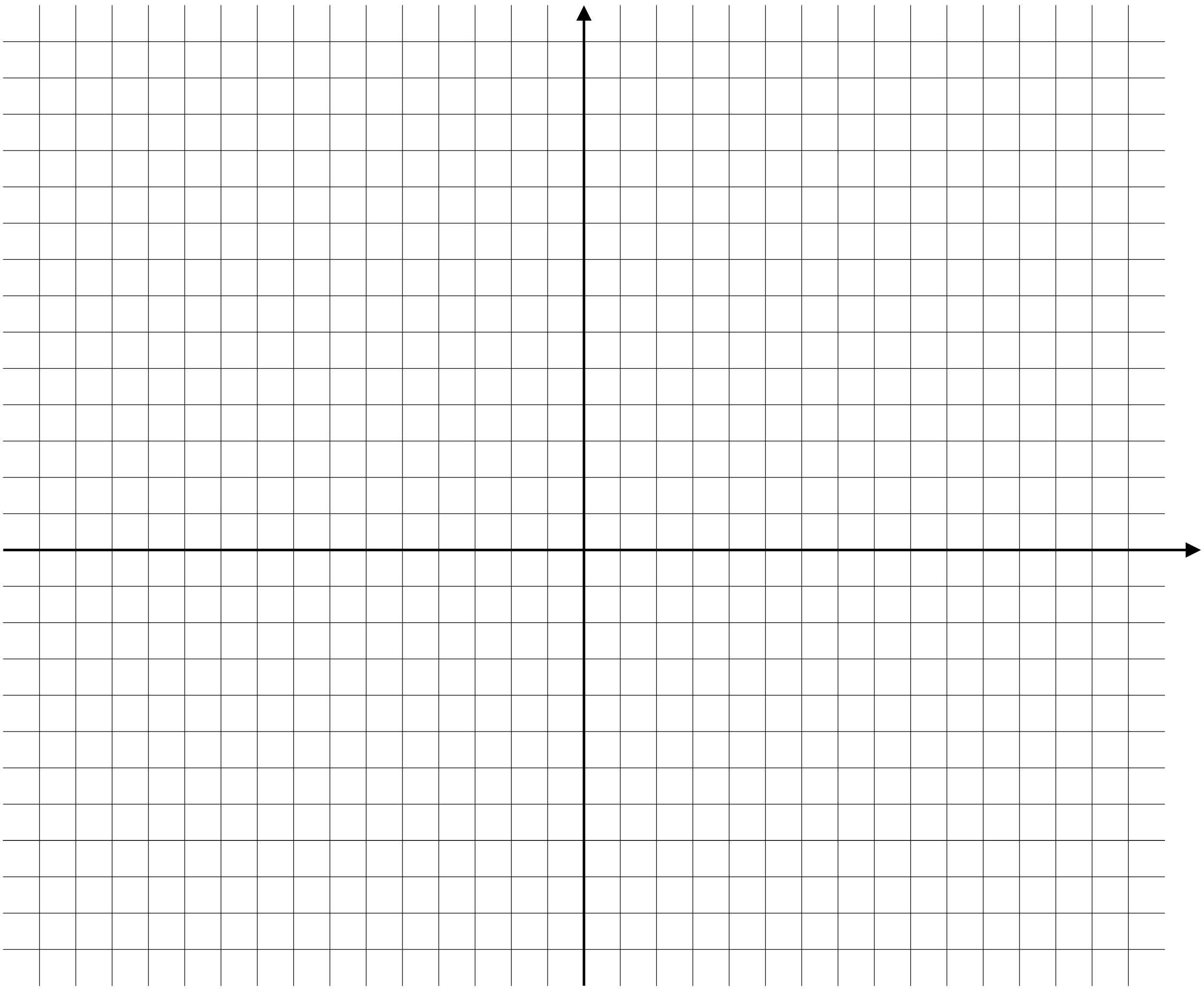
- Observa que a = ☐ 1 (posa el símbol > o < segons correspongui).
- Quina particularitat té el seu regionament del pla?
- En quin punt talla a l'eix *y*?
- En quin punt talla a la recta $x = 1$?
- Creix o decreix?
- ¿Com es comporta la funció per l'esquerra? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Com es comporta la funció per la dreta? (explica-ho i utilitza la notació dels límits).
- ¿Hi ha alguna funció en aquest mateix exercici que sigui simètrica respecte a l'eix x a aquesta funció?

G.14 A partir de les característiques que has observat a l'exercici anterior omple el següent quadre (si d'alguna de les propietats no n'estàs del tot segur fes les proves que necessitis amb la calculadora gràfica o l'ordinador).

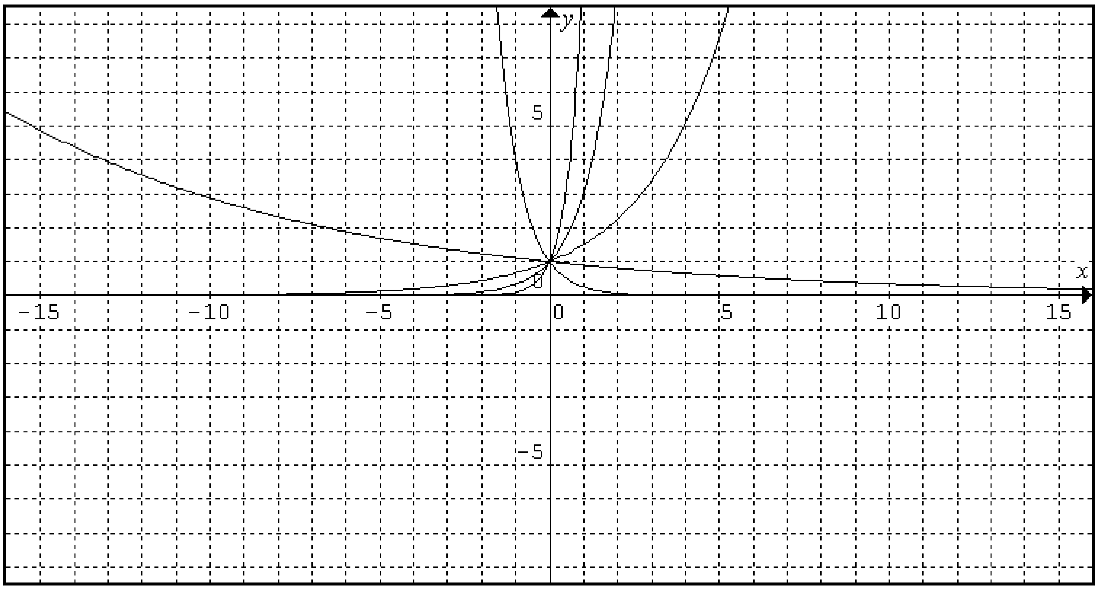
	Propietats de la funció exponencial $y = a^x$					
	Domini	**Tall eix y**	**Tall recta x=1**	**Branca esquerra**	**Branca dreta**	**Esbós**
Si 0<*a*<1		(0,)	(1,)	$\lim_{x\to-\infty} a^x =$	$\lim_{x\to+\infty} a^x =$	
Si *a*=1		(0,)	(1,)	$\lim_{x\to-\infty} a^x =$	$\lim_{x\to+\infty} a^x =$	
Si *a*>1		(0,)	(1,)	$\lim_{x\to-\infty} a^x =$	$\lim_{x\to+\infty} a^x =$	
Si *a*<0	Recorda que aquest cas és absurd, a sempre ha de ser positiva!					

G.15 Fes un esbós ràpid (en pocs segons) del gràfic de les següents funcions exponencials utilitzant únicament una reflexió sobre les seves propietats. Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat.

a) $y = 4^x$ **b)** $y = 0{,}2^x$ **c)** $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ **d)** $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ **e)** $y = 5^x$



G.16 A partir d'una reflexió sobre les propietats de la funció exponencial, intenta endevinar la fórmula de cada una de les funcions exponencials dels següents gràfics: (Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat)



G.17 Tenint en compte les propietats dels gràfics de les funcions exponencials :

a) Digues, sense utilitzar la calculadora ni fer cap càlcul, quins dels valors següents són més grans que 1, i quins més petits. Per això considera en cada cas el croquis del gràfic de la funció exponencial corresponent:

$(3,2)^{1,5}$ $(5,2)^{-0,3}$ $(0,7)^{0,3}$

$(0,2)^{-3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) Digues també, sense calcular res i a partir del croquis del gràfic corresponent, quin signe tindrà la **x** en les expressions següents:

$2^x = 100$ $2^x = 0,3$ $0,3^x = 7$ $0,3^x = 0,005$ $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{25}{4}$

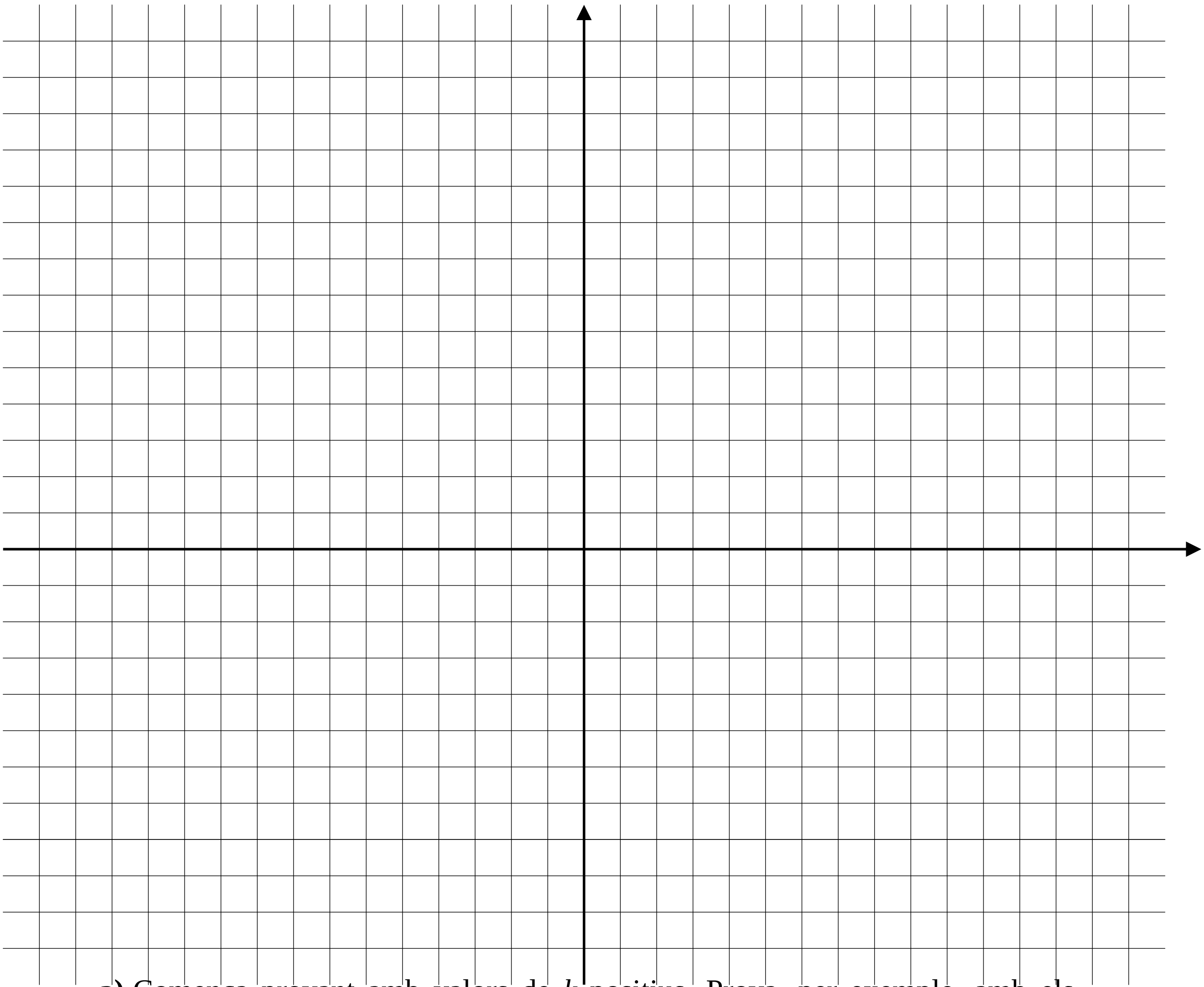
c) També sense fer cap càlcul i pensant en el gràfic adient, digues si la base *a* és més gran o més petita que 1 en les següents igualtats:

$a^3 = 2$ $a^{2,5} = 0,5$ $a^{\frac{1}{2}} = 5$ $a^{-\frac{2}{3}} = 6$

LA FUNCIÓ EXPONENCIAL GENERAL $f(x) = k \cdot a^x$

Una primera reflexió

G.18 Abans d'atacar en profunditat aquesta funció analitzem com afecta a la funció exponencial a^x el fet d'estar multiplicat per un paràmetre k.
Partim d'una funció senzilla i coneguda $y = 3^x$, dibuixa-la amb la calculadora gràfica o l'ordinador i observa com es va modificant quan l'anem multiplicant per diversos valors k.

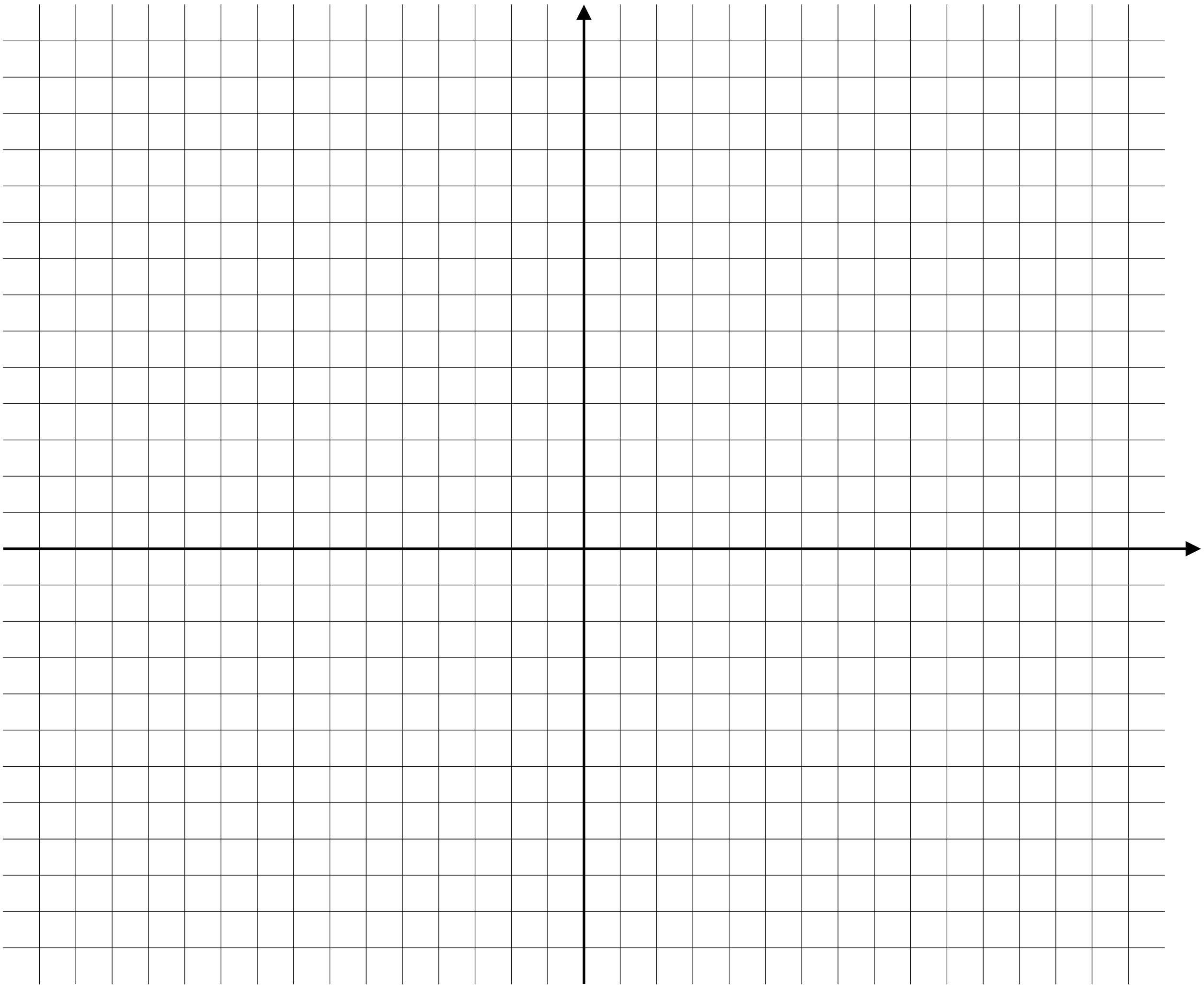


a) Comença provant amb valors de k positius. Prova, per exemple, amb els valors k = 2, 3, 5, 10, 0.5 i 0.1 Dibuixa les funcions i contesta a les preguntes:
- ¿On queda desplaçat el punt (0,1) de la funció original $y = 3^x$?
- ¿On queda desplaçat el punt (1,3)?
- ¿Hi ha alguna variació pel que fa al creixement i les branques infinites?
- ¿Hi ha alguna variació pel que fa al regionament del pla?

b) Prova ara amb valors de k negatius, per exemple k = -1, -2, -5, - 0.5 i -0.1 Dibuixa les funcions i contesta a les preguntes
- ¿On queda desplaçat el punt (0,1) de la funció original $y = 3^x$?
- ¿On queda desplaçat el punt (1,3)?
- ¿Hi ha alguna variació pel que fa al creixement i les branques infinites?
- ¿Hi ha alguna variació pel que fa al regionament del pla?

G.19 Fes un esbós ràpid (en pocs segons) del gràfic de les següents funcions exponencials utilitzant únicament una reflexió sobre les seves propietats. Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat.

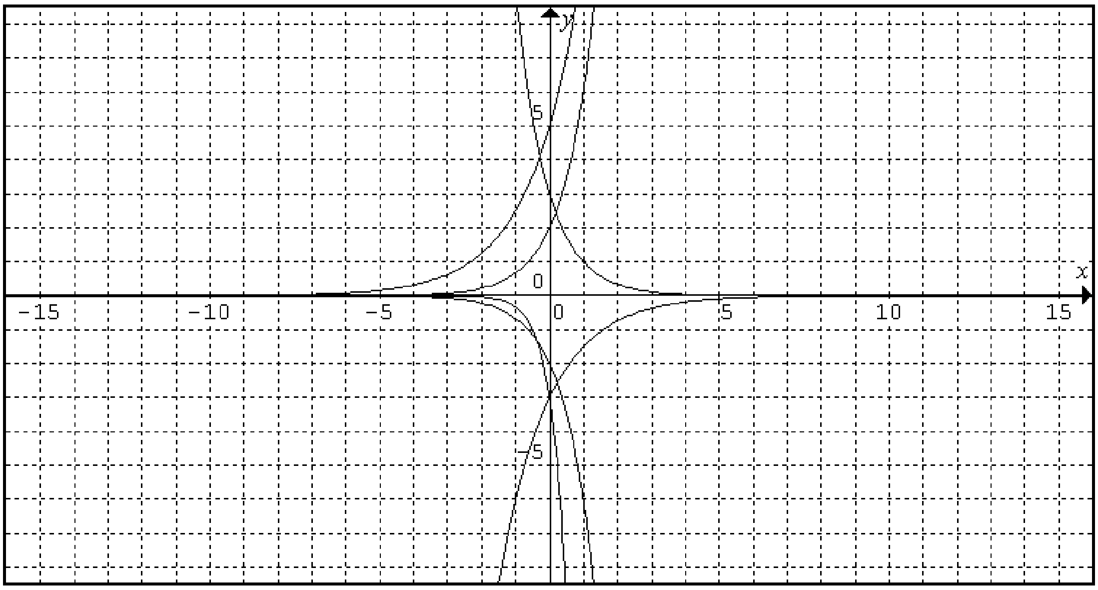
a) $y = -4^x$ **b)** $y = 3\cdot 0{,}5^x$ **c)** $y = -3\cdot 3^x$ **d)** $y = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **e)** $y = -\frac{1}{2}\cdot 5^x$



G.20 A partir de les característiques que has observat en els exercicis anteriors omple el següent quadre. (si d'alguna de les propietats no n'estàs del tot segur fes les proves que necessitis amb la calculadora gràfica o l'ordinador)

Propietats de la funció exponencial $y = k{\cdot}a^x$								
	Si $k > 0$				**Si $k < 0$**			
	Tall eix y	**Tall recta x=1**	**Compor-tament**	**Esbós**	**Tall eix y**	**Tall Recta x=1**	**Compor-tament**	**Esbós**
Si $0<a<1$	(0,)	(1,)			(0,)	(1,)		
Si $a=1$	(0,)	(1,)			(0,)	(1,)		
Si $a>1$	(0,)	(1,)			(0,)	(1,)		
Si $a<0$	Absurd				Absurd			

G.21 A partir d'una reflexió sobre les propietats de la funció exponencial, intenta endevinar la fórmula de cada una de les funcions exponencials dels següents gràfics: (Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat)



H. EQUACIONS EXPONENCIALS. ELS LOGARITMES

H.1 Tycho Brahe va ser un astrònom anglès amb una personalitat forta i una mica despòtica. Al segle XVI va construir un observatori anomenat Urànjburg que incloïa un castell amb un sistema d'intercomunicació entre les habitacions i uns jardins privats amb animals de caça. En Tycho no tenia nas (l'havia perdut en una baralla) i en portava un fet d'un aliatge de bronze. Era alt i gras, feia por només de veure'l. Al castell, hi vivia un nan que es deia Jepp al que li llençava trossos de menjar per sota la taula com si fos un gos . A en Tycho Brahe li agradava molt fer la broma que *els matemàtics eren els éssers amb la vida més curta que hi ha*: segons Tycho els matemàtics, per cada minut d'autèntic avanç perden hores i hores de càlculs tediosos que no són, pròpiament, moments de vida autènticament matemàtica. Per tal d'allargar la seva vida Tycho tenia uns quants calculistes contractats a Urànjburg. Un calculista era un treballador assalariat amb pocs coneixements matemàtics però amb una bona habilitat de càlcul.
Un dia Tycho Barahe va donar als seus calculistes un problema molt especial. Suposarem que tu ets un dels calculistes de Tycho però serem generosos i et deixarem la calculadora. El problema era:

resol la següent equació: $2^x=5$

a) Resol el problema de Tycho utilitzant, si vols, la calculadora
b) Fes una reflexió escrita explicant els procediments de càlcul que van haver de fer els calculistes de Tycho utilitzant, tant sols, un llapis i un paper i valora la dificultat d'aquest càlcul en aquella època.

EQUACIONS EXPONENCIALS. EL LOGARITME

Una equació exponencial és una equació en la que la incògnita és a l'exponent. L'exercici anterior és un exemple d'equació exponencial senzilla (tot i que, en principi, no és gens senzilla de resoldre).

Els logaritmes són un concepte matemàtic que facilita la resolució d'equacions exponencials. Per exemple, si tenim l'equació $2^x = 8$, la seva solució cal expressar-la utilitzant la notació de logaritmes. Així diem que

$$x = \log_2 8 = 3$$

i ho llegirem dient que 3 és el logaritme en base 2 de 8.

En general es defineix el logaritme de la següent manera:

$$\boxed{x = \log_a b \quad \leftrightarrow \quad a^x = b}$$

Per exemple $\log_3 81 = 4$ ja que $3^4 = 81$

H.2 Calcula el valor exacte de *x* en les següents equacions. Hauràs de posar els dos membres de la igualtat com a potències de la mateixa base per a poder igualar els exponents. **Dona la solució utilitzant la notació del logaritme.**

$2^x = 128$; $3^x = 27$; $7^x = 343$; $2^x = \frac{1}{8}$; $9^x = 3$; $8^x = 2$;

$4^x = 1$; $2^x = \sqrt{8}$; $5^x = 625$; $2^x = 0,5$ $6^x = \frac{1}{216}$ $10^x = 1000$

H.3 Calcula els valors dels logaritmes següents i justifica la resposta expressant-ho en forma exponencial.

$\log_2 64$ $\log_3 81$ $\log_2 \frac{1}{4}$ $\log_{10} 100$ $\log_{10} 0,001$ $\log_5 125$

$\log_7 \frac{1}{7}$ $\log_9 3$ $\log_3 9$ $\log_2 0,5$ $\log_6 6^8$ $\log_9 81$

$\log_2 2$ $\log_{10} 10000$ $\log_2 1$ $\log_4 64$ $\log_{27} 1$ $\log_4 2$

Els logaritmes amb decimals

H.4 En tots els exercicis anteriors el valor del logaritme és exacte, però no sempre és així. Un exemple d'això és l'exercici inicial de Tycho Brahe que l'hem resolt per tempteig. Una possibilitat de solució *una mica bèstia* seria fer una taula de resultats de potències que desprès puguem consultar. Veiem un exemple: Omple la taula següent utilitzant la calculadora:

x	10^x	x	10^x	x	10^x	X	10^x
1		2		3		4	
1,1		2,1		3,1		4,1	
1,2		2,2		3,2		4,2	
1,3		2,3		3,3		4,3	
1,4		2,4		3,4		4,4	
1,5		2,5		3,5		4,5	
1,6		2,6		3,6		4,6	
1,7		2,7		3,7		4,7	
1,8		2,8		3,8		4,8	
1,9		2,9		3,9		4,9	

H.5 Consultant la taula anterior calcula els següents logaritmes.

$\log_{10} 50{,}118723 =$	$\log_{10} 794{,}328234 =$	$\log_{10} 12589{,}254 =$
$\log_{10} 5011{,}87233 =$	$\log_{10} 7943{,}2823 =$	$\log_{10} 12{,}5892541 =$
$\log_{10} 10000 =$	$\log_{10} 3162{,}27766 =$	

El logaritme a la calculadora

Encara que sembli una *bestiesa*, la manera de calcular logaritmes fins fa molt poques desenes d'anys era la de consultar una taula exhaustiva molt similar a l'anterior però amb milers de resultats precalculats. Actualment tenim les calculadores que ens donen directament els resultats dels logaritmes en base 10. Al ser aquests logaritmes els més utilitzats, s'ha decidit no posar el 10 de la base. Així si veus escrit, per exemple, log 2 sense cap base entenem que la base és 10 i direm que és un logaritme decimal. A la calculadora tens el logaritme decimal prement la tecla log.

Recorda que en tots els càlculs amb logaritmes a la calculadora és obligatori agafar, almenys, 4 decimals.

H.6 Utilitzant la tecla log de la calculadora comprova que els logaritmes de l'exercici anterior són correctes.

H.7

a) Calcula log 38 amb la calculadora
b) Comprova que efectivament si eleves 10 al resultat obtingut et dóna 38

H.8 Expressa les següents igualtats en forma de potències i comprova que ho has escrit correctament utilitzant la tecla x^y de la calculadora.

$\log 25 = 1{,}39794$ $\qquad$ $\log 1 = 0$ $\qquad$ $\log 0{,}15 = -0{,}8239$

H.9 Expressa les següents igualtats en termes de logaritmes i comprova que ho has escrit correctament utilitzant la tecla log de la calculadora.

$10^{2{,}489} = 309$ $\qquad$ $10^{-1} = 0{,}1$ $\qquad$ $10^{-0{,}3010} = 0{,}5$

PROPIETATS DELS LOGARITMES

De les propietats fonamentals dels exponents :

I. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

II. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

III. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

se'n deriven unes propietats dels logaritmes.

I) El logaritme d'un producte és la suma dels logaritmes dels factors:

$$\boxed{\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n}$$

per tant podríem dir que el logaritme **transforma productes en sumes**.

demostració: (estarà basada en la propietat I. dels exponents):

Si considerem m, n i m·n com a potències de base a, ho expressem amb logaritmes i tenim en compte la propietat I. dels exponents:

$$m = a^r \quad \leftrightarrow \quad \log_a m = r$$

$$n = a^s \quad \leftrightarrow \quad \log_a n = s$$

$$m \cdot n = a^r \cdot a^s = a^{r+s} \leftrightarrow \log_a m \cdot n = r+s = \log_a m + \log_a n$$

II) El logaritme d'un quocient és la diferència entre el logaritme del dividend i el del divisor.

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n}$$

per tant podríem dir que el logaritme **transforma quocients en restes**.

III) El logaritme d'una potència és el producte de l'exponent pel logaritme de la base.

$$\boxed{\log_a b^r = r \cdot \log_a b}$$

podríem dir que el logaritme **transforma potències en productes**. Hem de tenir en compte que aquesta propietat també serveix per transformar el logaritme d'una arrel, perquè ja saps que una arrel és una potència d'exponent fraccionari.

H.10 Demostra la propietat del logaritme del quocient seguint uns passos semblants al cas del producte.

H.11 Demostra la propietat del logaritme d'una potència.

H.12 Utilitza les propietats dels logaritmes per transformar els logaritmes següents en sumes, restes i productes.

a) $\log(1{,}245 \cdot 3{,}729)$

b) $\log_3 \dfrac{34{,}56 \cdot 187{,}15}{5{,}19}$

c) $\log(1{,}05)^{23}$

d) $\log\sqrt{51{,}7}$

e) $\log\sqrt[5]{2{,}18}$

f) $\log\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$

Fórmula del canvi de base

Tornem al problema original. Resoldre l'equació $2^x = 5$. Aquesta equació no té una solució exacta i el logaritme no sembla útil per resoldre-la ja que la solució $x = \log_2 5$ no es pot calcular amb calculadora que té una tecla *log* exclusiva del logaritme decimal.

Per resoldre aquest problema amb la calculadora necessitem una fórmula que ens permeti canviar la base dels logaritmes,

En general suposem que ens interessa trobar

$$x = \log_a b$$

o el que és el mateix volem resoldre l'equació exponencial

$$a^x = b$$

si calculem el logaritme en una base qualsevol (diguem-li *q*) de les dues parts de la igualtat, aquesta es manté i així

$$\log_q a^x = \log_q b,$$

utilitzant la tercera propietat podem passar la *x* al davant i tenim que

$$x \cdot \log_q a = \log_q b$$

i ara, aïllant la *x* tenim $x = \dfrac{\log_q b}{\log_q a}$, és a dir, tenim que

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_q b}{\log_q a} \text{ amb } q \text{ un valor qualsevol.}}$$

En particular si considerem q = 10 ja podem calcular qualsevol logaritme amb la calculadora: $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}}$

Per exemple $x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{0{,}69897000043}{03010299957} = 2{,}321928095$ és, per fi la solució definitiva de l'equació del nostre amic Tycho Brahe $2^x = 5$ (comprova amb la calculadora que efectivament $2^{2,321928095} = 5$)

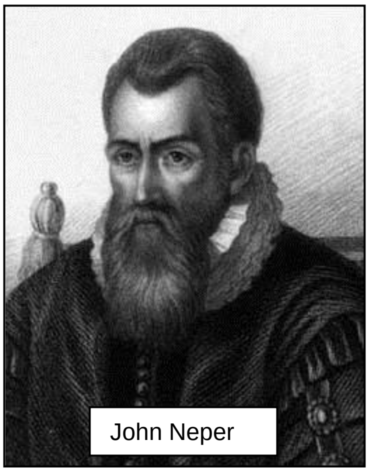
H.13 Resol les següents equacions exponencials:

$3^x = 7$ $7^x = 2$ $9^x = 37$ $6^x = 0{,}2$ $3{,}4^x = 6{,}2$ $12^x = 11$

La revolució de les matemàtiques: El Logaritme

Som a l'any 1590 i el rei Jaume VI d'Escòcia s'havia de casar amb la princesa Anna de Dinamarca. El rei i el seu sèquit van fer un viatge al país veí per conèixer a la nova promesa. A mig camí els va caure a sobre una tempesta tant forta que no van tenir més remei que refugiar-se en algun lloc. La casualitat i la bona sort van fer que estiguessin a la vora del magnífic castell de Uràniburg, l'observatori del nostre amic en Tycho Brahe, el del nas de bronze i el nan Jepp que menjava sota la taula.
Després de sopar, al caliu de la xemeneia, en Tycho tenia ganes de petar la xerrada, no tots els dies tenia convidats amb coneixements científics, i el metge del rei, John Craig, era l'interlocutor idoni. Els reflexos brillants del nas de bronze el deixaven hipnotitzat i la conversa de caire científic era la temàtica preferida de John, la nit prometia ser força interessant.
Tycho, després de llençar-li un os amb un tros de carn enganxada a en Jepp que el va mossegar d'un bot com si fos un expert gos, va fer una rialla maliciosa i va començar a dir:
- *Doncs sí, els matemàtics som els éssers que tenen la vida més curta...*
- *Com?* Va contestar intrigadíssim John.

....


John Neper

El Baró de Murchiston s'avorria com un carcamal. Es deia Neper (o Napier) i intentava estabornir el seu avorriment amb lectures de caire científic. Les llargues converses amb el seu bon amic John Craig eren un autèntic plaer per Neper.
- *Saps què?* –li va dir en John a Neper tot just tornar del viatge a Dinamarca *–Els matemàtics son els éssers que tenen la vida més curta...*

Neper no era matemàtic, els seus coneixements de matemàtiques no eren més que els d'un bon aficionat a les ciències en general. Els arguments de Tycho, explicats amb entusiasme per en John

Craig, van captivar en Neper que va decidir dedicar una mica del seu tediós temps a *allargar la vida dels matemàtics.*
La primera idea de Neper va ser confeccionar una taula idèntica a la de l'exercici **H.4**, publicar-la i així els matemàtics podrien consultar la taula en comptes de fer els càlculs d'una manera semblant a l'exercici **H.5**. És clar perquè la taula fos veritablement valuosa hauria de ser molt exhaustiva i cobrir qualsevol consulta possible.
Immediatament es va adonar que aquesta era una tasca impossible perquè per calcular un sol dels valors de la taula trigaria setmanes, si no mesos (reflexioneu com podríeu calcular, per exemple $10^{1,12}$ sense calculadora sols amb llapis i paper).
Després de rumiar una mica es va adonar que, utilitzant la fórmula del canvi de base no era imprescindible que 10 fos la base de la taula. Qualsevol valor més senzill de calcular podria ser la base, l'únic que importava era que les potències no tinguessin decimals que era el que dificultava els càlculs.
Per altra banda les potències de nombres naturals consecutius de qualsevol nombre estan molt allunyats un de l'altre. Això fa inútil la taula perquè del que es tracta és de buscar un resultat qualsevol a la dreta per després mirar quina potència l'ha generat (recorda l'exercici **H.5**). Neper necessitava un nombre que en elevar-lo a nombres naturals consecutius, el resultat variés molt poc.

Podeu comprovar, fàcilment, que tots els nombres varien molt en elevar-los a potències consecutives excepte l'1 que ¡no varia gens!. Però, si l'1 no varia gens (devia pensar l'avorrit baró) si agafo un nombre molt prop de l'1 variarà molt poc!...
Neper va trobar que el nombre ideal era 1,0000001.

Va començar la seva tasca fent multiplicacions i multiplicacions. N'havia de fer tantes que es marejava i s'equivocava per evitar errors va inventar la primera màquina multiplicadora de la història. ¡20 anys després! va acabar la seva taula que abasta des del $1,0000001^1$ fins $1,0000001^{10000000}$, la va publicar i va generar, pot ser, la revolució més gran de la història de les matemàtiques ja que veritablement va *allargar la vida dels matemàtics* que van poder dedicar el seu temps a avançar en conceptes nous sense perdre temps amb càlculs tediosos.


Exemplar de la màquina multiplicadora de Neper fabricat per un alumne de l'IES El Sui de Cardedeu en un treball de recerca

H.14

a) Calcula amb la calculadora $1,0000001^{10000000}$, escriu el resultat amb més de 4 xifres decimals.

b) Busca a la calculadora la tecla $\mathbf{e^x}$ utilitza-la per calcular $\mathbf{e^1}$ i escriu aquest misteriós nombre **e** amb, almenys 4 xifres decimals.

Neper, *sense voler*, va descobrir un nombre que és avui en dia un dels nombres amb nom propi més importants de la matemàtica (juntament amb *pi*). Aquest nombre s'anomena amb la lletra **e** en honor a un matemàtic anomenat Euler.
Desprès del seu brutal èxit dels logaritmes, Henry Briggs va visitar en Neper i li va demanar que fes unes taules noves en base 10, Nepper es va negar rotundament. 20 anys de càlculs rutinaris havien esgotat tot el seu *avorriment*. La responsabilitat de les noves bases va recaure, doncs, sobre Henri Brigs que les va calcular a partir de les potències naturals de les arrels (quadrada, cúbica, quarta,...) del nombre 10 sempre amb ¡14 xifres decimals!.
Amb una lleugera variació, es va reconvertir la taula d'en Neper a base **e**. Aquestes dues taules han estat la salvació dels matemàtics fins l'actualitat. Van passar bastants segles fins que no es van revisar i corregir les taules de Neper. (Hi ha alguns errors de càlcul històrics a les matemàtiques fruit de petits errors de les taules originals).
No seria just que el nom d'en Neper no figurés en el seu invent així que al logaritme en base **e** se l'anomena **logaritme neperià** i pots gaudir d'ell a la tecla **ln** de la teva calculadora.

H.15 Resol les següents equacions exponencials utilitzant la fórmula del canvi de base però amb el logaritme neperià. Comprova que el resultat és exactament el mateix que a l'exercici **H.13**

$3^x = 7$ $7^x = 2$ $9^x = 37$ $6^x = 0{,}2$ $3{,}4^x = 6{,}2$ $12^x = 11$

La veritable revolució

Uràniburg

El nan Jepp no va saltar aquesta vegada a buscar el tros de menjar. Havien passat més de 20 anys i ja no tenia les cames com abans. La rialla maliciosa d'en Tycho, però, era com el primer dia.
Aquí tens la feina d'avui i la necessito ja! va dir al nou calculista que acabava d'arribar de la capital. *El nou en tindrà per unes quantes setmanes* pensava mentre el so metàl·lic del seu riure sardònic sonava per sota del seu nas de bronze. La feina encomanada era criminal:
Calcula $x = \sqrt[7]{\dfrac{32{,}29}{28{,}36}}$ (la divisió no era problema, però l'arrel setena, per tempteig, a ma era mortal. Calia multiplicar un nombre per ell mateix 7 cops, si el resultat era inferior al desitjat calia provar amb un nombre més gran i si era més gran amb un de més petit. Així fins encertar-lo. ¡I tot a ma!)

Una flamant edició de les noves taules d'en Neper lluïa a sobre la taula del calculista.
El calculista va agafar el llapis i va escriure:

$$x = \sqrt[7]{\frac{32{,}29}{28{,}36}}$$

desprès va posar **ln** a les dues bandes de la igualtat:

$$\ln x = \ln \sqrt[7]{\frac{32{,}29}{28{,}36}}$$

i va escriure l'arrel amb notació exponencial:

$$\ln x = \ln\left(\frac{32{,}29}{28{,}36}\right)^{\frac{1}{7}}$$

ara no tenia més que aplicar les propietats del logaritme i consultar les taules de Neper

$$\ln x = \frac{1}{7}\ln\left(\frac{32{,}29}{28{,}36}\right) = \frac{1}{7}\left[\ln 32{,}29 - \ln 28{,}36\right] = \frac{1}{7}\left[3{,}4747575 - 3{,}3449797\right]$$

desprès el calculista va fer una senzilla resta i una elemental divisió entre 7:

$$\begin{array}{r} 3{,}4747575 \\ -\ 3{,}3449797 \\ \hline 0{,}1297778 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc|l}
0 & ,1 & 2 & 9 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ \cline{9-9}
 & & 5 & 9 & & & & & 0{,}0185396 \\
 & & & 3 & 7 & & & & \\
 & & & & 2 & 7 & & & \\
 & & & & & 6 & 7 & & \\
 & & & & & & 4 & 8 & \\
 & & & & & & & \boxed{6} &
\end{array}$$

Amb això tenia que ln x = 0,0185396 i per tant la solució desitjada era

$$x = e^{0{,}0185396}$$

El calculista va agafar el seu exemplar de les taules d'en Neper va buscar el resultat d'aquesta operació que era tabulada obtenint el resultat correcte amb menys de 5 minuts:

$$x = 1{,}018712525$$

Mentre Tycho mirava bocabadat la ràpida solució al entremaliat problema, en Jepp, per primer cop, reia a queixalada mentre rosegava les restes de carn d'un os a sota la taula.

H.16 Les tècniques de càlcul utilitzades pel calculista de la història anterior ha estat la manera habitual de fer qualsevol operació mínimament complicada fins que les calculadores van estar a l'abast de tothom a la dècada del 1970. Imagina un altre cop que ets el calculista de Tycho i troba la solució de les següents operacions. Cal que redueixis les operacions: de potència o arrel a producte o divisió i de producte o divisió a suma o resta utilitzant les propietats dels logaritmes. Utilitza alternativament el logaritme decimal (amb la seva inversa 10^x) i el logaritme neperià (amb la seva inversa e^x). No cal que facis a mà les sumes, restes o productes o divisions finals. Comprova al final que el resultat és correcte fent les operacions directament amb la calculadora

a) $245{,}342 \cdot 219{,}22$
b) $36{,}88^{4.6628}$
c) $\sqrt[5]{97{,}45}$
d) $\left(\dfrac{698{,}7}{33{,}58}\right)^8$
e) $\sqrt[6]{\dfrac{17{,}2 \cdot 98{,}3}{61.4}}$
f) $\sqrt[7]{\dfrac{3}{7}} \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^5$

EQUACIONS EXPONENCIALS

Fins ara sols hem resolt equacions exponencials bàsiques del tipus $a^x = b$ que es resolien utilitzant directament la definició de logaritme. Però qualsevol equació en que la incògnita és a l'exponent és una equació exponencial i s'ha de resoldre.
Per a fer-ho cal utilitzar la mateixa tècnica que a l'exercici anterior. És a dir, cal posar *log* a les dues bandes de la igualtat, cal aplicar les propietats de logaritmes fins que els exponents siguin productes i aïllar la *x* amb les tècniques habituals d'equacions ordinàries.

H.17 Calcula el valor exacte de *x* en les equacions següents.

a) $3^{x+2} = 81$
b) $5^{2x-1} = 125$
c) $10^{x+3} = \sqrt[3]{10}$
d) $2^{1-2x} = 0{,}5$

H.18 Resol les següents equacions:

a) $45^x = 13$
b) $1{,}08^t = 2$
c) $0{,}399^p = 7943 \cdot 5^{-p}$
d) $7^{3x+2} = 2^{x-7}$

H.19 Resol les següents equacions**(ampliació)**:

a) $5\cdot 7^{2x+6}=3\cdot 7^{5x-1}$

b) $\dfrac{4^{x}\cdot 3^{2x+1}}{5^{3x}}=7$

c) $\sqrt[x]{15}=\sqrt[2x+1]{12}$

d) $\sqrt[x+1]{7}=5^{x-1}$

H.20 Resol les següents equacions posant totes les potències com a potències de la mateixa base **(ampliació)**:

a) $5^{2x-1}=\sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$

b) $2\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x-2}=\sqrt[3]{4^{5x-1}}$

c) $5^{x}+5^{x-1}=6$

d) $3^{x}+3^{2x}=3^{x+1}$

e) $4^{x-1}+2^{x+1}=96$

f) $2^{x}-4^{-x}=0$

H.21 Resol els següents sistemes d'equacions**(ampliació)**:

a) $\begin{cases} 2^{x+1}\cdot 2^{y-2}=32 \\ 2^{x}+2^{y}=20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+2}+5^{y}=141 \\ 2^{x+3}-5^{y-1}=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^{3x-2y}=3125 \\ 11^{6x-7y}=14641 \end{cases}$

Problemes

H.22 Una persona col·loca 1.000 € en un compte a termini fix al 4% anual d'interès. Quan temps ha de passar perquè disposi d'un capital de 1.250 €?

H.23 (Aquest problema està basat en personatges i fets reals)
En Sergi ha acabat 4t d'ESO no vol continuar estudiant i ha decidit fer-se pastor. El seu avi s'ha jubilat i és propietari de terres i quadres per mantenir fins 400 ovelles productives amb les seves cries. L'avi li cedeix les propietats i a més li deixa diners per comprar 50 ovelles productives.
Les ovelles tenen una capacitat de reproducció que dobla el seu nombre en un any (és a dir, el proper any en Sergi tindrà 50 nous animals). Però la meitat dels nous animals són mascles i es venen per carn. De les femelles una tercera part s'utilitza per renovar bestiar improductiu, la resta de femelles passa a incrementar la quantitat d'ovelles productives.
¿Quant temps trigarà en Sergi per disposar de 400 ovelles productives?

H.24 Un inversor professional ha obtingut una filtració d'una empresa sobre la que es farà una operació que farà caure el seu valor en borsa en picat. Però esperaran a que el valor en borsa d'aquesta empresa tingui l'índex 140. L'inversor professional sap que aquesta empresa té un ritme de creixement en borsa excepcional, del 4% mensual, i vol aguantar al màxim els seus diners.
¿Quant temps ha d'esperar per treure els diners si l'índex d'aquest mes ha estat de 112?

H.25 Un estudi de mercat determina que un nou producte pot tenir un impacte inicial de vendes de 1000 unitats el primer any amb un creixement del 15% en els anys successius.
La planta de fabricació perd diners si les vendes són inferiors a 2500 unitats anuals. Quant temps estaran perdent diners?

H.26 Col·loquem 12.000 euros a un interès compost anual del 6 %. Quin és el capital al cap de tres anys?

H.27 Calcula el capital que, invertit al 4% d'interès compost anual durant 10 anys, es va transformar en un capital de 7300 euros.

H.28 Esbrina el temps que s'ha invertit un capital de 2025 euros al 10,5 % d'interès anual si el capital final és 3120 euros.

H.29 Una persona col·loca 900 euros durant 3 anys en un fons d'inversió. El capital final és de 1267 euros. Quin tipus d'interès anual tenia aquest fons.

I. la funció logarítmica

Les funcions inverses, en general

Si en una funció qualsevol $y = f(x)$ canviem la x per la y i la y per la x, i aïllem de nou la y obtenim la funció inversa a la inicial. Aquesta funció inversa es denota per $y = f^{-1}(x)$

Exemple:

Tenim la funció $y = 3x-12$

canviem les variables: $x = 3y-12$

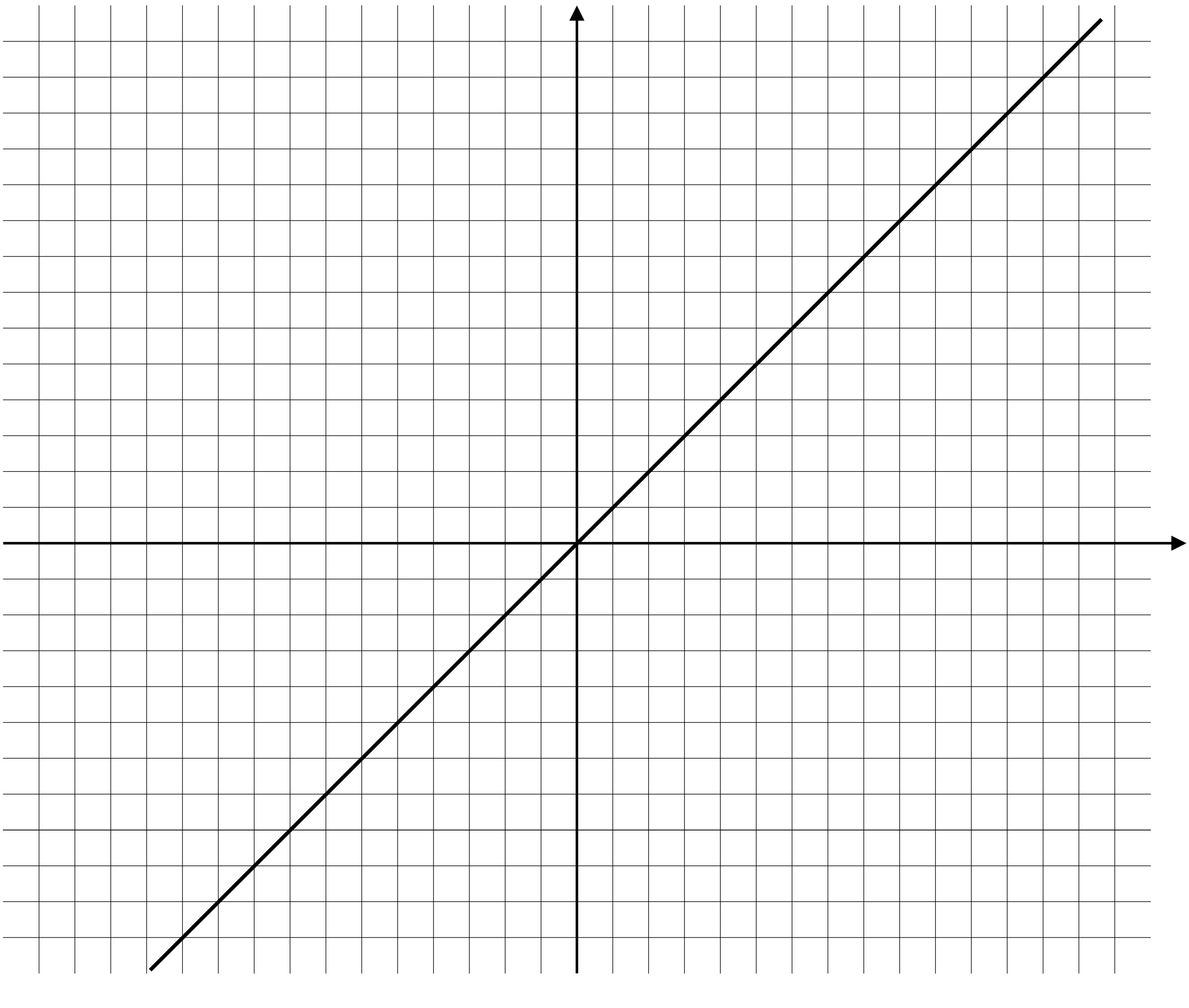
aïllem la y: $3y = x+12$ i dividint per 3 $y = \frac{1}{3}x + 4$

així podem dir que si $f(x) = 3x-12$, la seva inversa és $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 4$

Les funcions inverses tenen la particularitat que, en representar-les gràficament són simètriques respecte la bisectriu del primer quadrant. Aquesta propietat pot ser de gran utilitat si volem representar funcions de certa dificultat.

En particular, la funció exponencial i la funció logarítmica són, per pròpia definició, una la inversa de l'altra.

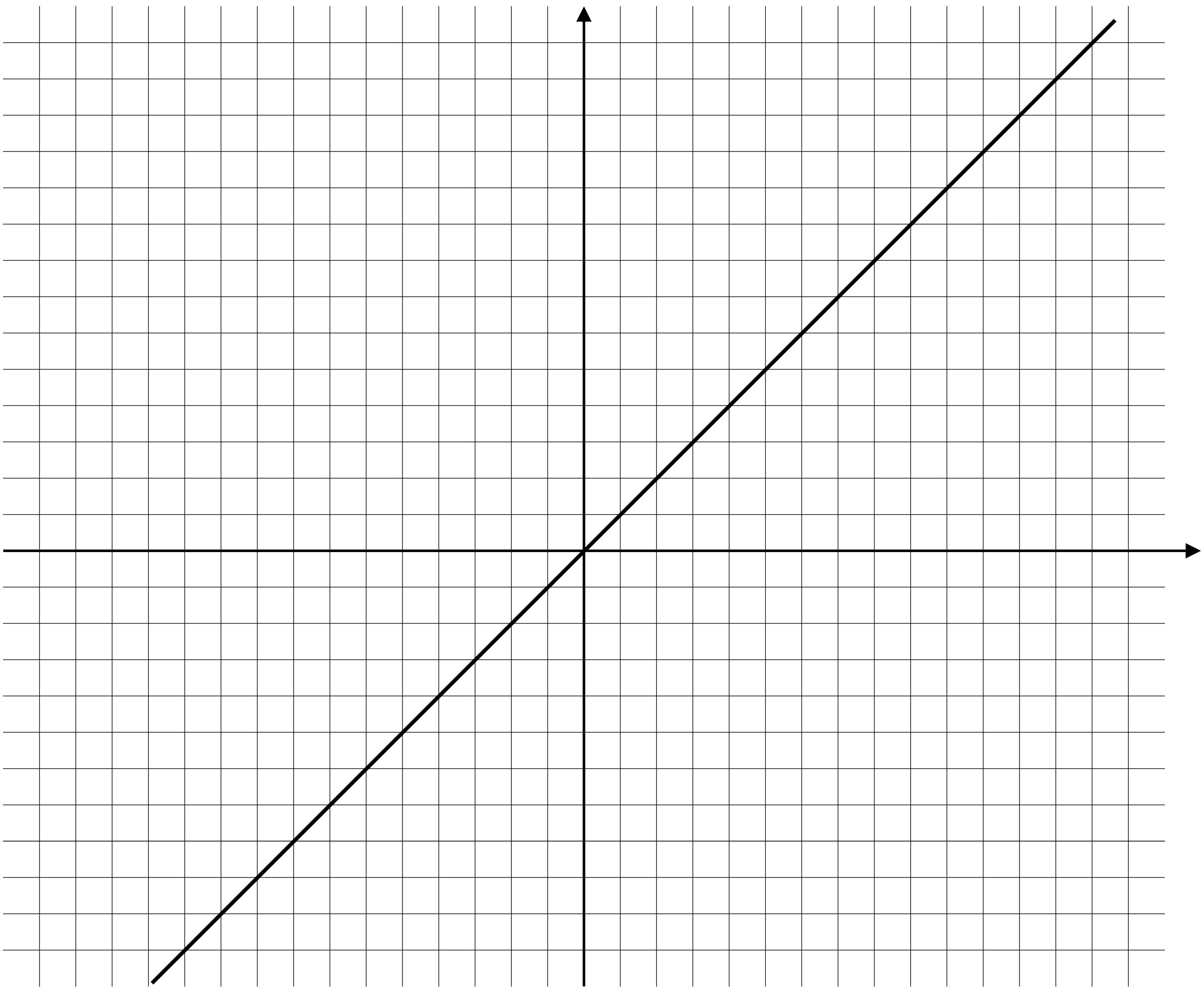
I.1 Dibuixa amb ajut de la calculadora gràfica o de l'ordinador les funcions $y = 2^x$ i $y = \log_2 x$ (que són una la inversa de l'altra). Observa la simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant



I.2 Observa el parell de gràfics anteriors i completa la taula:

Característiques $\Longrightarrow$	$y = 2^x$		$y = \log_2 x$	$\Longleftarrow$ **Característiques**
0 < a < 1 ó a > 1?				0 < a <1 ó a > 1?
Domini				Domini
Regionament del pla?				Regionament del pla?
En quin punt talla a l'eix y?				En quin punt talla a l'eix x?
Punt de tall a la recta x = 1?				Punt de tall a la recta y = 1?
Creix o decreix?				Creix o decreix?
Branca esquerra				Branca esquerra
Branca dreta				Branca dreta
Esbós dibuix				Esbós dibuix

I.3 Dibuixa amb ajut de la calculadora gràfica o de l'ordinador les funcions $y = 0{,}5^x$ i $y = \log_{0,5} x$ (que són una la inversa de l'altra). Observa la simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant.



I.4 Observa el parell de gràfics anteriors i completa la taula:

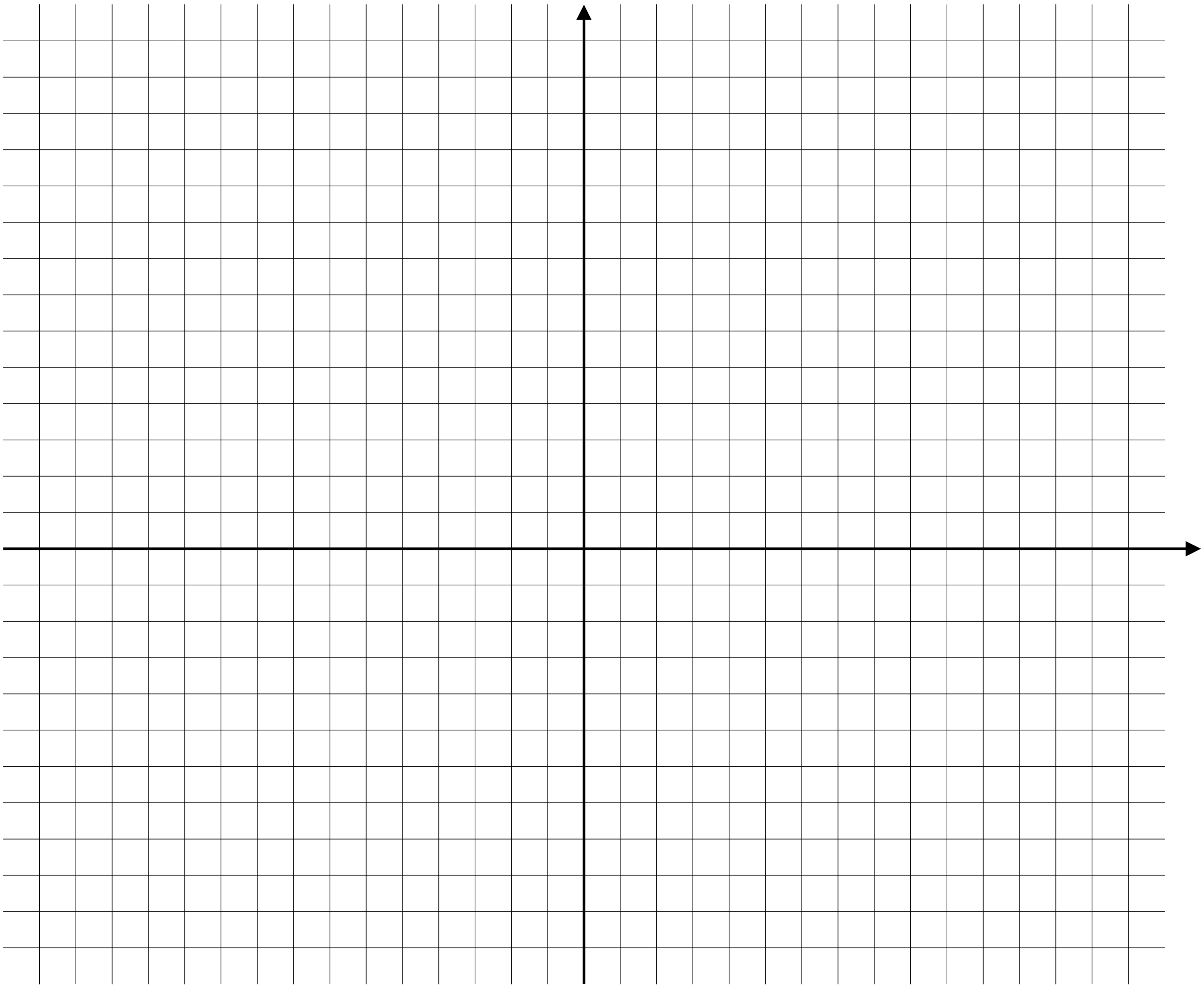
Característiques ⟹	$y = 0{,}5^x$		$y = \log_{0,5} x$	⟸ **Característiques**
0 <a < 1 ó a > 1?				0 < a < 1 ó a > 1?
Domini				Domini
Regionament del pla?				Regionament del pla?
En quin punt talla a l'eix y?				En quin punt talla a l'eix x?
Punt de tall a la recta x = 1?				Punt de tall a la recta y = 1?
Creix o decreix?				Creix o decreix?
Branca esquerra				Branca esquerra
Branca dreta				Branca dreta
Esbós dibuix				Esbós dibuix

I.5 Observa la taula de l'exercici **G.13** i, tenint en compte que la funció logarítmica és simètrica respecte a la diagonal principal a la funció exponencial, omple el següent quadre. Comprova després amb la calculadora gràfica o l'ordinador que ho has fet correctament (inventa't els exemples que necessitis).

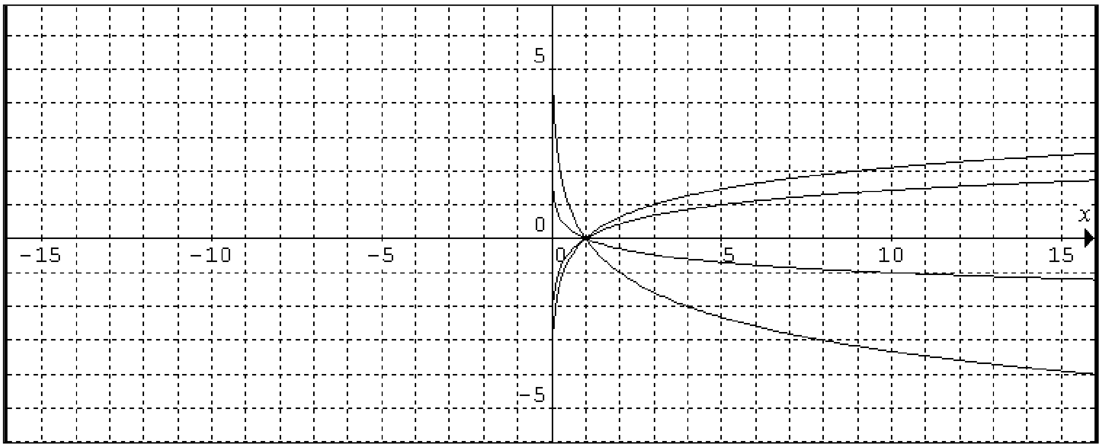
	Propietats de la funció logarítmica $y = log_a x$					
	Domini	**Tall eix x**	**Tall recta y=1**	**Branca esquerra**	**Branca dreta**	**Esbós**
Si 0<*a*<1		(,0)	(,1)	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x =$	$\lim_{x\to +\infty} \log_a x =$	
Si *a*=1		(,0)	(,1)	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x =$	$\lim_{x\to +\infty} \log_a x =$	
Si *a*>1		(,0)	(,1)	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x =$	$\lim_{x\to +\infty} \log_a x =$	
Si *a*<0	Recorda que aquest cas és absurd, *a* sempre ha de ser positiva!					

I.6 Fes un esbós ràpid (en pocs segons) del gràfic de les següents funcions logarítmiques utilitzant únicament una reflexió sobre les seves propietats. Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat.

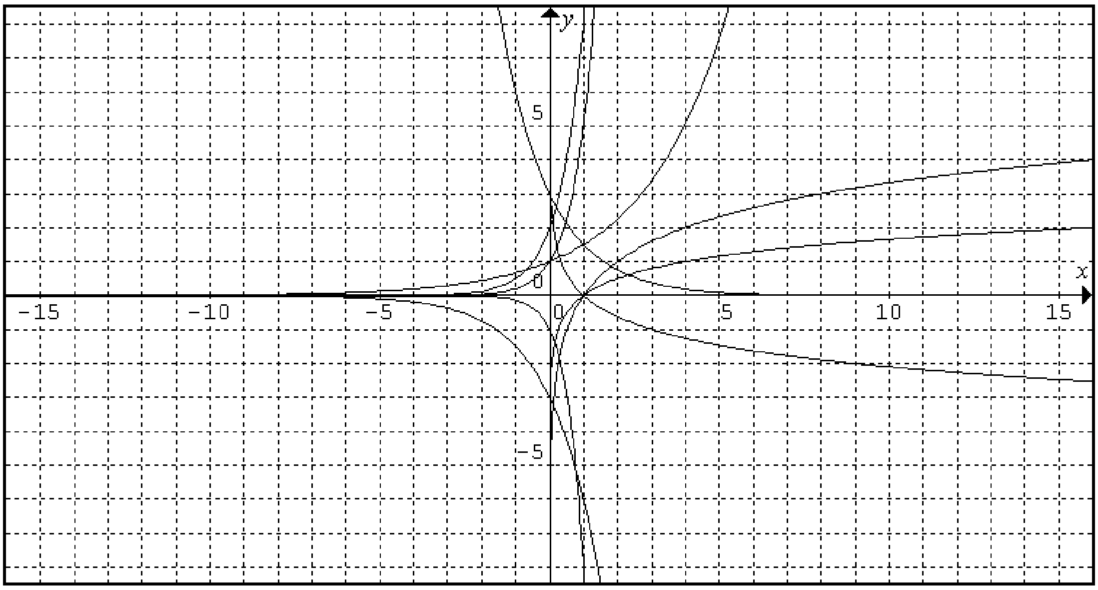
a) $y = \log_4 x$ **b)** $y = \log_{0,2} x$ **c)** $y = \log_5 x$ **d)** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$



I.7 A partir d'una reflexió sobre les propietats de la funció logarítmica, intenta endevinar la fórmula de cada una de les funcions logarítmiques dels següents gràfics: (Comprova, després, amb la calculadora o l'ordinador si ho has encertat).



I.8 Intenta endevinar el gràfic de les següents funcions (n'hi ha d'exponencials i de logarítmiques barrejades) comprova després amb la calculadora gràfica o amb l'ordinador si ho has fet correctament.



Comparem creixements

I.9 Representa gràficament les següents funcions en els eixos de coordenades. Ajuda't d'una calculadora gràfica o un ordinador. Escriu un comentari en què expliquis la diferent manera de créixer que tenen cada una d'aquestes funcions (seria bo ampliar el rang dels eixos per observar millor la tendència de cada funció al augmentar força el valor d'*x*.

$y = 2^x$ $y = x^2$ $y = 2x$ $y = \sqrt{x}$ $y = \log_2 x$

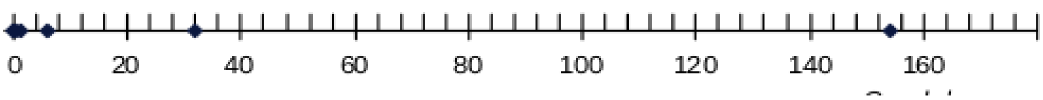
J. Escales logarítmiques

Quan tenim dades que sospitem que tenen un comportament exponencial o les dades que hem de representar són d'ordre molt diferent ens interessa utilitzar una escala diferent a l'habitual.

Per exemple si tenim que els cabals de set rius expressats en m^3/segon són :

0,016	154	6,1	32	0,07	1,25	0,28

i representem aquestes dades en un eix horitzontal, ens queda tant poc expressiu com:

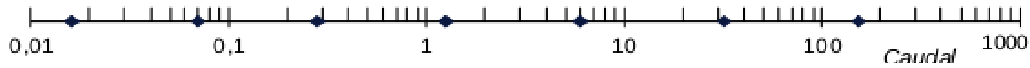


Provem que passa si fem els logaritmes

caudal	0,016	154	6,1	32	0 ,07	1,25	0,28
log	-1,8	2,19	0,79	1,51	-1,15	0,1	-0,55

Ara els punts queden diferenciats però com sabem que 1,5 correspon a 32 m^3/s ?

La solució és representar els punts en una escala logarítmica, on nosaltres representem directament els nostres punts.

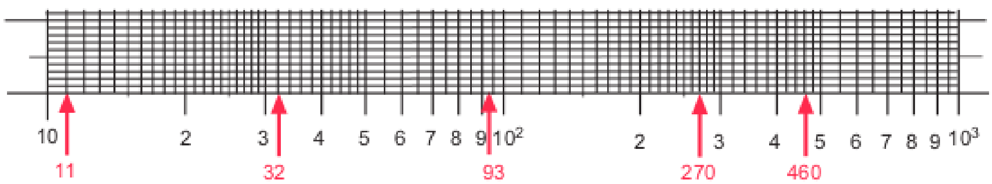


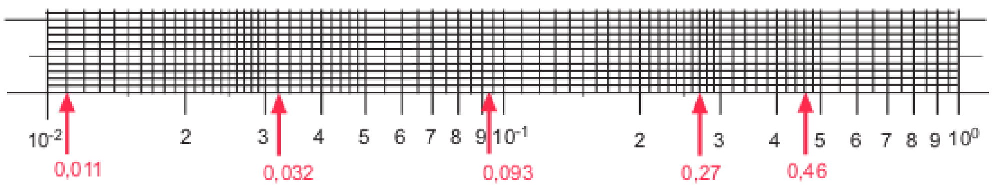
Observem que les situacions relatives dels punts en les dos darreres representacions són idèntiques. Per tant representar punts en una escala logarítmica és equivalent a representar els logaritmes d'aquests valors en una escala normal.

Podem construir la nostra escala logarítmica calculant els logaritmes de 1, 2, 3, 10, 100, 200,.. i representar-los en paper mil·limetrat. Situarem la marca 1 a l'origen (doncs log 1 = 0) i la marca 10 a una distància unitària (per exemple 1 cm). Els valors corresponents a 2 , 3,... es situaran a 0,301 cm, 0,477 cm, ... de l'origen.

Això produeix una escala no lineal, en la que les marques es van acumulant. La distància entre 10 i 100 serà la mateixa que entre 1 i 10. El 20 dista de 10 el mateix que 2 de 1.

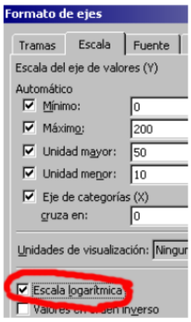
Aquí tenim diversos exemples:





Una altra opció és utilitzar un programa gràfic, com pot ser un full de càlcul.

Un cop fet el gràfic clicar amb ratolí dret sobre l'eix i escollir formata eix / escala logarítmica.



Per què dibuixar en una escala logarítmica?

Hem vist que és útil quan els valors són de magnitud diferent. També són convenients quan ens permet convertir el gràfic que relaciona dos variables en una recta.

S'utilitzen dos tipus de gràfics:

Semi logarítmics: un dels dos eixos esta en escala logarítmica i l'altre en escala aritmètica.

Doble logarítmics o logarítmics: els dos eixos en escala logarítmica.

Nivell de pressió sonora

La relació entre la pressió sonora del so més intens (quan la sensació del so passa a ser dolor auditiu) i la del so més dèbil és al voltant de 1000000. Això ha fet que s'adopti una escala logarítmica.

Si anomenem $\mathbf{P_{ref}}$ a la pressió de referència d'un to pràcticament no audible (es a dir 20 μPa) i **P** a la pressió sonora, podem definir el nivell de pressió sonora **Lp** com:

$$Lp = 20 \cdot \log\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$$

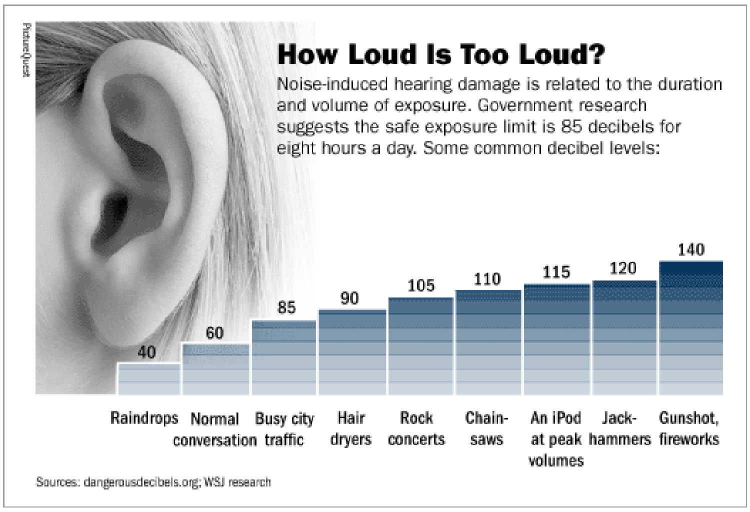
La unitat utilitzada per expressar el nivell de pressió sonora és el **decibel**.

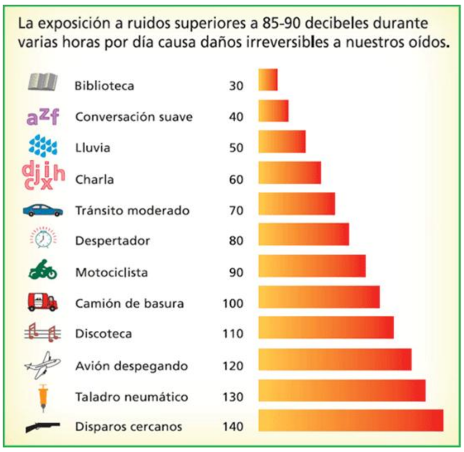
El **decibel** és per tant una unitat logarítmica de mesura que expressa la magnitud d'una quantitat física respecte a un nivell de referència. L'ús d'una unitat logarítmica permet representar magnituds molt grans i molt petites amb números més petits. Al ser una relació respecte a un nivell de referència el decibel és una unitat a dimensional.

Es basa en el **bel**, una unitat que no s'utilitza a la pràctica ja que és massa gran. Al voltant del 1900 el Sistema Internacional de Mesura hi donà aquest nom en memòria a Alexander Graham Bell. El decibel (símbol: **dB**) és la desena part del bel. Un bel representa un augment de potència de 10 vegades sobre la magnitud de referència.

Zero bels és el valor de la magnitud de referència. Així, dos bels representen un augment de cent vegades en la potència, 3 bels equivalen a un augment de mil vegades i així successivament.

El nivell de pressió sonora dels sons audibles varia entre 0 dB i 120 dB. Els sons de més de 120 dB poden causar danys auditius immediats i irreversibles a més de ser bastants dolorosos per la majoria de les persones.





J.1 Observa les taules anteriors.

a) Quina és la pressió sonora corresponent a cada so de les taules.

b) Amb un full de càlcul fes un gràfic que relacioni els decibels amb la seva pressió sonora.

c)Fes un gràfic en paper mil·limetrat que relacioni els decibels amb la seva pressió sonora corresponent. Escull una escala logarítmica per la pressió sonora i una escala aritmètica per els decibels.

d) Fes el gràfic c) mitjançant un full de càlcul. Què observes?