Funcions

que ens envolten

Matemàtiques 1r Batxillerat

Funcions que ens envolten

A. Funció definida a trossos

El món que ens envolta és ple de funcions, només cal mirar amb ulls matemàtics. Anem a fer la prova observant el perfil d'algunes muntanyes.

Què tenen en comú els perfils d'aquestes dues muntanyes?

Segur que has trobat la resposta, els dos perfils s'ajusten a una recta i per tant podem dir que tots dos es defineixen amb una funció de primer grau.

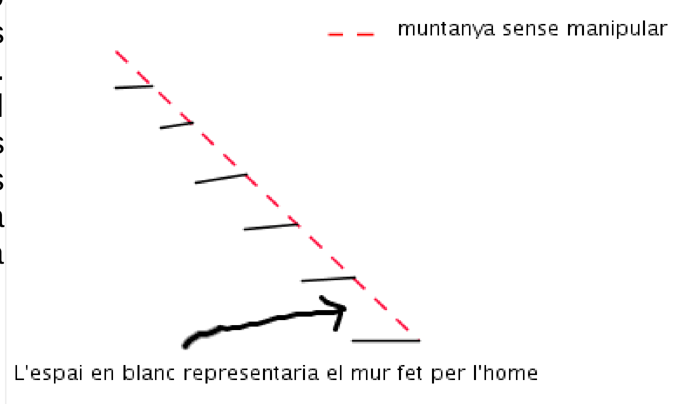
Observem ara el nostre estimat Montseny.
Amb quin tipus de funció podríem aproximar el perfil de Les Agudes del Montseny?

En cursos anteriors ja heu estudiat les funcions polinòmiques i especialment les funcions de segon grau. A la natura podem trobar molts exemples que es poden descriure amb funcions polinòmiques.

Observar ara aquestes fotografies:

Quin tipus de funció defineix els perfils de les feixes de cada muntanya?

La primera cosa que observem és que no podem fer un traç continu, doncs les diferents feixes estan a diferents alçades. Per poder definir la funció del perfil haurem d'utilitzar diversos intervals (corresponents a les amplades de les feixes) i a cada interval li assignarem la funció constant corresponent (altura a la que es troba).



Una funció com l'anterior es diu que és **esglaonada.**

A.1 Posem al foc un cassó amb aigua a 10ºC. De manera uniforme en cinc minuts arriba a 100ºC i es manté així durant mitjà hora fins que l'aigua s'evapora totalment. Representar la funció que descriu aquest fenomen i trobar l'expressió analítica.

Una funció com l'anterior s'anomena funció **definida a trossos**. El domini està format per diversos intervals en els quals l'expressió algèbrica de la funció és diferent i hem de representar per separat la funció en cadascun dels intervals on està definida.
Les funcions definides a trossos poden ser continues com a l'exercici anterior o discontinues com per exemple les funcions esglaonades.

A.2 La funció valor absolut, f(x) = $|x|$ es defineix:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcular f(3), f(-20), f(5.4), f(-2/3)
b) Fer la seva gràfica.
c) Pensar una situació real a la que es pugui assignar la funció valor absolut.

A.3 La funció part entera d'un nombre real, $f(x)=[x]$ es pot definir de la manera següent: A tot nombre real x li correspon f(x) = n , sent n el major nombre enter tal que $n \leq x$.
a) Trobar f(50), f(-20), f(8.4), f(-12.6)
b)Escriure l'expressió algèbrica de la funció per valors de l'interval (-3 , 2]
c)Dibuixar la seva gràfica
d) El recorregut d'una funció, és per definició, el conjunt dels valors de la variable y que són imatge d'almenys un valor x. Qui és el recorregut de la funció part entera.
e)Pensar una situació real a la que es pugui assignar la funció part entera.

A.4 Cada any els treballadors han de realitzar la declaració de la renda. Per això cal establir una relació entre el salari brut del treballador i la quota a pagar de l'impost sobre la renda de les persones físiques (IRPF)

Tramos de IRPF 2014

Base Imponible		Tipo a aplicar
Desde	Hasta	2014
0	12.450	25%
12.450	33.007	30%
33.007	53.407	40%
53.407	12.000	47%
120.000	175.000	49%
175.000	300.000	51%
Má de 300.000		52%

La taula ens indica la base imposable (salari brut del treballador) en trams progressius, com més diners es guanya més retenció hi ha.

Primer considerem que es paga un sols tipus de retenció segons el tram que estiguis:

a) Buscar la quota a pagar al maig 2015 (IRPF del 2014) per diferents sous en cada un dels trams.
b) Trobar la funció que defineix la relació entre la base imposable i la quota a pagar.
c) Fer la gràfica corresponent.
d) Per calcular el sou net d'un treballador cal restar l'IRPF del sou brut. Quin serà el sou net d'un treballador amb base imposable 12450 euros? I de 12451 euros? Què observes?

En realitat per tal que no es donin situacions com aquesta, l'IRPF es calcula per trams:

Sou brut	IRPF
12450	12450· 0,25 = 3112,5
12451	12450·0,25 + 1·0,30 = 3112,8
33007	12450·0,25 + 20557·0,3 = 9279,6

e) Trobar ara la funció real

Per tal de dur a terme una reforma tributaria les noves taules són:

Tramos de IRPF 2015 y 2016

Base Imponible		Tipo a aplicar	
Desde	Hasta	2015	2016
0	12.450	20%	19%
12.450	20.200	25%	24%
20.200	35.200	31%	30%
35.200	60.000	39%	37%
Más de 60.000		47%	45%

On els salaris inferiors a 12450 no hauran de tributar IRPF

f) Buscar la funció que defineix la relació entre base imposable i quota a pagar en 2016 i 2017.
g) Utilitzant Geogebra i en el mateix eix de coordenades dibuixar les tres funcions i decidir qui surt beneficiat amb la reforma fiscal.
h) Elaborar un full de càlcul per trobar l'IRPF de qualsevol sou al 2017.

B. Composició de funcions

Donades dues f(x) i g(x) es defineix la funció composta de f i g, **(g o f)(x)** com la funció que transforma x en g(f(x)) es a dir:

x $\Rightarrow$ f(x) $\Rightarrow$ g (f(x))

L' expressió (g o f) (x) es llegeix f composta amb g.

En general la funció (g o f)(x) és diferent de la funció (f o g)(x)

Veiem un exemple:

Sigui $f(x) = x^2$ i $g(x) = x+1$

(g o f)(x): x $\Rightarrow$ x^2 $\Rightarrow$ $g(x^2) = x^2+1$

(f o g)(x): x $\Rightarrow$ x+1 $\Rightarrow$ $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x+1$

B.1 Donades $f(x) = x^2 - 5x + 3$ i $g(x) = x^2$. Trobar f o g i g o f

B.2 Sigui $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$

a) Trobar (f o g)(x)

b) Trobar (g o f)(x)

c) Què observes?

En vist que les funcions anteriors en actuar successivament sobre un nombre x, aquest es manté, es a dir cada una d'aquestes funcions desfà el que fa l'altra. Es diu que aquestes funcions són **inverses**.

S'anomena funció inversa de f una altra funció que es designa per f^{-1} que compleix:

$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Tal i com hem vist a l'exercici anterior les funcions elevar al quadrat i arrel quadrada són inverses.

B.3 Donades les funcions $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{x}{2}$, $h(x) = 2x - 5$, $j(x) = \frac{x+5}{2}$

a) Comprovar que f(x) i g(x) són inverses.

b) Dibuixar les funcions f i g en el mateix eix de coordenades.

c) Comprovar que h(x) i j(x) són inverses.

d) Dibuixar les funcions h i j en el mateix eix de coordenades.

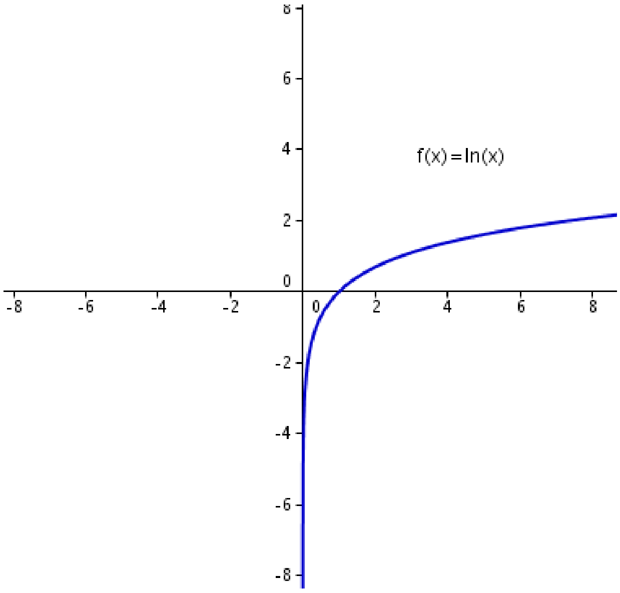
e)Observant b) i d) deduir com són les gràfiques de funcions inverses.

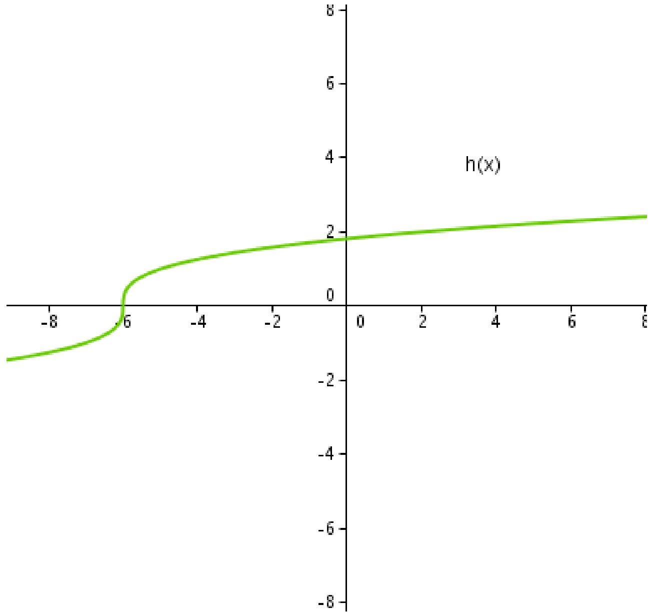
B.4 Sigui $f(x) = x+1$ i $g(x) = x - 1$

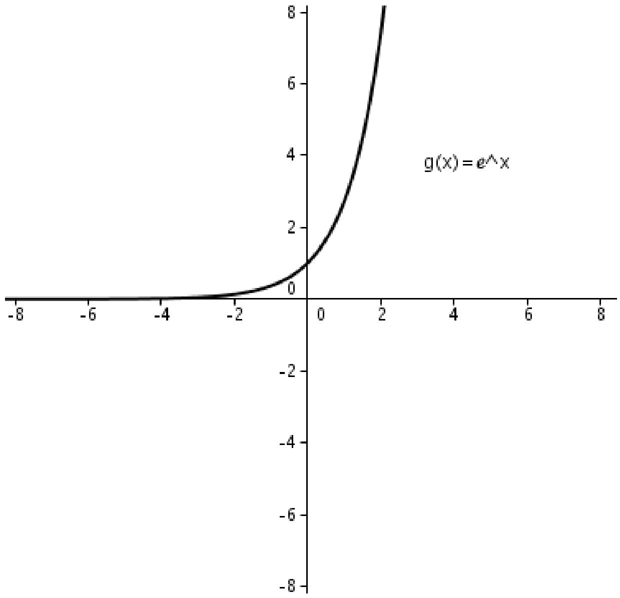
a) Provar que (g o f)(x) = x

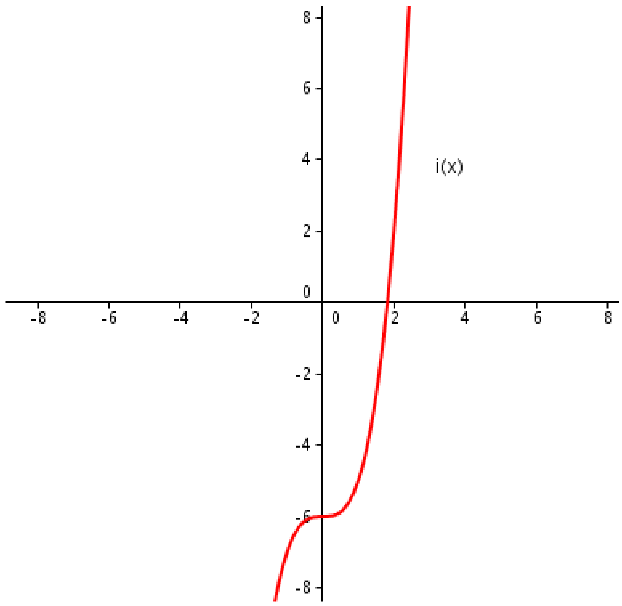
b) Són f(x) i g(x) funcions inverses? Representar les dues funcions i observar la simetria respecte la recta y=x (bisectriu del primer quadrant)

B.5 Identificar cada funció amb la seva inversa









Mètode per calcular inverses

Donada una funció, intercanviem la variable x i la variable y. Després aïllem la y en funció de la x.

Per exemple si $f(x) = x^2$ podem escriure $y = x^2$

intercanviem $x = y^2$

aïllem $y=\sqrt{x}$

Per tant $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

B.6 a) Dibuixar $y=\frac{3}{2}x+4$. Per simetria dibuixar la seva inversa

b) Buscar la inversa analíticament.

c) Comprovar que el dibuix fet a l'apartat a) es correspon amb la fórmula de b)