

Funcions definides per taules: interpolació i extrapolació



Funcions definides per taules: interpolació i extrapolació

1.

S'han pres les temperatures d'un líquid a mesura que s'escalfava. La taula temperatura-temps és la següent:

Temps t(min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura T (° C)	20	24	28	32	36	40

- Fes el gràfic de la temperatura del líquid en funció del temps transcorregut.
- Com es troben els punts del gràfic? Creus que té sentit unir-los amb un traç continu?
- Quin tipus de fórmula creus que s'ajusta millor aquestes dades? Determina els paràmetres de la funció explicant amb claredat el procés que segueixes per obtenir-los i escriu la fórmula corresponent.
- Utilitza aquesta fórmula per trobar la temperatura per a $t = 2,5$ $t = 4,5$ $t = 6$ $t = 7$.

*Quan els valors de t per als quals es calcula la temperatura pertanyen a l'interval donat $[0, 5]$, però no coincideixen amb els valors de la taula es diu que s'està **interpolant** el resultat.*

*Quan els valors de t per als quals es calcula la temperatura no pertanyen a l'interval donat $[0, 5]$, es diu que s'està **extrapolant** el resultat.*

Plantejament del problema

Anem a suposar que tenim una taula de valors com ara aquesta:

Variable x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_n
Variable y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_n

Aquesta taula pot venir donada com a resultat de mesuraments de fets experimentals o, fins i tot, d'alguns valors d'una funció determinada.

El problema que ara ens plantegem és buscar una funció que prengui aquests valors i que permeti:

- a) Calcular el valor corresponent en un punt intermedi dels que tenim, de manera que el resultat s'ajusti amb el mínim d'error possible a l'experiment fet o als valors de la funció.

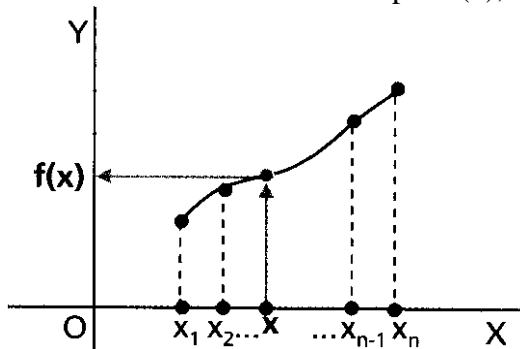
Aquest procés s'anomena **interpolació**

- b) Estudiar si la funció obtinguda s'ajusta als resultats esperats fora de l'interval en què es troben els valors de dades d' x .

Aquest procés s'anomena **extrapolació**.

Si representem els punts en un sistema de coordenades cartesianes i els unim mitjançant una corba, resollem el problema d'interpolació.

Si $f(x)$ és la funció la gràfica de la qual en el interval $[x_1, x_n]$ és la corba dibuixada, a un cert valor intermedi x li correspon $f(x)$, tal com mostra la figura.

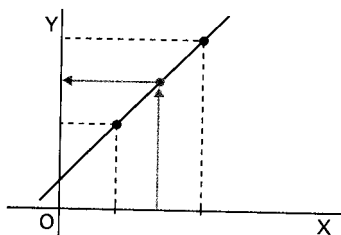


És evident que el valor $f(x)$ depèn de la corba que tracem unint els punts donats, i òbviament, el nombre de corbes que podem traçar és infinit.

L'elecció adequada de la funció i la seva expressió matemàtica es poden demostrar algunes vegades, però d'altres és impossible; per això és important que l'investigador, basat en la seva experiència i intuïció, tingui una certa idea a priori de com ha de ser la funció que es pretén trobar. Les figures següents mostren dos tipus d'interpolació segons la funció que s'utilitzi.

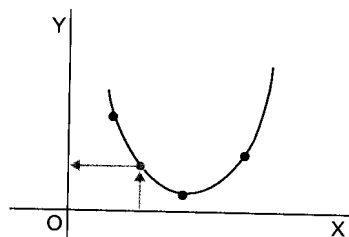
Interpolació lineal

$$y = ax + b$$



Interpolació quadràtica

$$y = ax^2 + bx + c$$



Interpolació lineal

1.

La taula següent conté les dades del volum i la massa de peces de ferro de diferents dimensions.

Volum (cm ³)	Massa (g)
1	7,7
3	23,1
5	38,5
8	61,6
10	77
11	84,7
13	100,1
17	130,9
18	138,6
20	154

a) Representa gràficament aquestes dades.

b) Com es troben aquests punts? A partir d'aquesta observació quin tipus de funció podem preveure per tal d'obtenir la massa en funció del volum?

c) Troba la fórmula d'aquesta funció.

2.

Busca la funció lineal d'interpolació donada per aquesta taula:

x	0	1
y	1	0

3.

El preu del rebut de la llum ve donat aproximadament per una funció lineal $p(k) = a + bk$, on a representa les despeses de potència i b el preu del kWh en euros. S'han agafat dos rebuts successius i se n'ha extret aquesta taula de consum i preu (sense IVA):

k	84	61
p(k)	18,36	15,83

Troba els valors a i b

4.

Donada la taula següent, busca la funció lineal $f(n)$:

n	1	2	3	4
f(n)	3	7	11	15

5.

El preu d'un viatge amb tren està en funció dels quilòmetres recorreguts. Si es recorren 57 km, el bitllet costa 2,85 €, i si se'n recorren 68, 3,40 €.

- Busca la funció lineal que expressa el cost del bitllet en funció dels quilòmetres recorreguts.
- Calcula per extrapolació el preu del bitllet quan la distància recorreguda és de 500 km.
- Si un bitllet costa 4€, quants quilòmetres té el recorregut?

6.

El nombre d'habitants d'un municipi s'expressa en la taula següent:

Anys	1 950	1960	1970	1980
Població	985	1204	1465	1714

Comprova que és factible aplicar la interpolació lineal. Calcula el valor interpolat de la població l'any 1955. Quin nombre d'habitants s'estima que tindrà l'any 2005?

7.

La taula següent recull la taxa d'atur als EUA, mesurada en dos moments de la dècada dels anys 60 en què hi havia diferents taxes d'inflació:

Inflació %	1,9	3,6
Atur %	4,4	3,7

- Determina el polinomi interpolador de primer grau $P(x) = ax + b$
- Calcula el valor de la taxa d'atur en un moment en que la taxa d'inflació fos del 3%.

8.

Calcula per interpolació lineal el valor aproximat de la funció f en $x = 10$ si sabem que $f(0) = 5$ i $f(20) = -15$.

9.

En una habitació que es troba a la temperatura de 20°C hem retirat del foc mig litre d'aigua bullint. Mesurem la temperatura de l'aigua després de 10, 30 i 50 minuts i obtenim les dades següents:

Temps (min)	10	30	50
Temperatura($^{\circ}\text{C}$)	85	50	36

Es tracta d'estimar, per interpolació lineal, la temperatura de l'aigua 25 i 35 minuts després d'haver-la retirat del foc. (observa que es verifica $10 < 25 < 30$, per tant, la funció que ens determina la variació lineal de la temperatura T de l'aigua en funció del temps t transcorregut haurem de trobar-la per a l'interval $[0, 30]$, és a dir, a partir dels parells de valors $(10, 85)$ i $(30, 50)$).

10.

Un municipi tenia 2 540 habitants l'any 1 990 i 3 260 l'any 2 000.

- Utilitza la interpolació lineal per estimar quants habitants tenia el municipi l'any 1 996.
- En quin any va assolir previsiblement els 3 000 habitants

11.

La taula següent mostra la depreciació del preu d'un cotxe amb el temps:

Temps(anys)	2	5	10
Preu(€)	13 500	6 900	2 250

Mitjançant les interpolacions lineals corresponents, estima el preu d'aquest cotxe quan hagin transcorregut des de la seva adquisició:

- 4 anys
- 7 anys

La calculadora i la interpolació lineal

Quan tenim una distribució bidimensional i el seu núvol de punts podem buscar la seva **recta de regressió**.

En el cas que els punts formin una recta, la recta de regressió coincideix amb la recta que formen els punts.

Per tant per trobar la funció lineal d'interpolació podem utilitzar la funció de la calculadora que dona la recta de regressió.

- Les instruccions per la casio fx...SPX són:

Escollir el mode estadística

Escollir $y = a + bx$

Introduir els dos punts

Dins **OPTN** escollir **Càlcul de regressió**

- Les instruccions per la casio fx.....ES són:

MODE **STAT** **A + Bx** (introduir els dos punts)

SHIFT **1** **REG** **A**

B



12. Comprova amb la calculadora tots els càlculs que has fet a mà anteriorment

La informàtica i la interpolació lineal

13.

La informàtica resulta de molta utilitat per resoldre aspectes relacionats amb taules.

Els fulls de càlcul domèstic, com Excel,... també incorporen utilitats per a efectuar càlculs que permeten fer de forma ràpida i còmoda activitats com les que hem fet.

1. Obre un full de càlcul i introdueix les dades de l'exercici 1.
2. Assenyalas les dades i ves a Inserir/ Gràfic. Tria el tipus de gràfic XY (dispersió)
3. Després assenyalas els punts de la gràfica, prem el botó dret del ratolí i escull l'opció Agregar línia de tendència.

14.

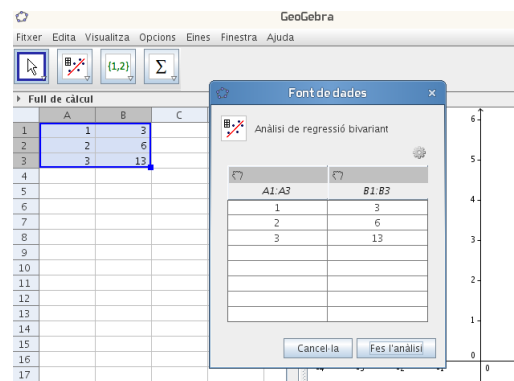
El Geogebra també és de molta utilitat per fer interpolació, ja que automàticament et calcula la recta i després pots fer les estimacions necessàries.

Per fer-ho només cal seguir els passos següents:

Primer tria l'opció *Full de càlcul i Gràfics* (triangle petit de la dreta)

Introdueix la taula de valors verticalment. Selecciona tota la taula i tria *Anàlisi de regressió bivariant* dins la segona icona. Fer l'anàlisi i per finalitzar triar el model de regressió (en aquest cas lineal)

Comprovar l'exercici 11 amb el Geogebra.



Interpolació quadràtica

Recordem que per fer una interpolació quadràtica cal tenir tres punts. Donat que volem trobar una funció de segon grau caldrà resoldre un sistema de tres equacions i tres incògnites. Com el terme independent serà sempre el mateix, la manera fàcil de resoldre el sistema serà restar la primera equació amb la segona i després amb la tercera de manera que obtindrem un sistema de dos equacions i dos incògnites. Per acabar només caldrà substituir en una de les equacions inicials.

15.

A la taula següent s'indica el temps en dies i el pes en grams d'un embrió d'una espècie animal:

temps	3	5	8
pes	8	22	73

- Trobar el polinomi d'interpolació quadràtica de les dades
- Fer una predicció de pes per 6,5 dies

16.

En una fàbrica d'automòbils, un model de cotxe X produeix a diferents velocitats els nivells de soroll que registra la taula:

Km/h	60	90	120	140
Decibels	62,7	70,2	75,5	77,5

Estimar per interpolació quadràtica els decibels produïts quan la velocitat és de 130 km/h.

La calculadora

S'observa que la interpolació quadràtica és més laboriosa que la lineal, però no deixa de ser una feina mecànica que pot fer la calculadora. Ho que si és important és saber quan cal fer una interpolació lineal i quan una quadràtica. Seguint les mateixes pautes que per la interpolació lineal, investigar com es fa la interpolació quadràtica amb la calculadora.

En els següents exercicis no cal fer els càlculs a mà

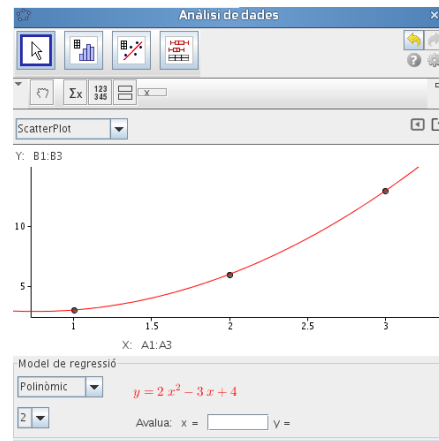
17. La caiguda dels cossos

Mitjançant una càmera fotogràfica hem obtingut fotografies de la caiguda d'un objecte a intervals de 0,1 segons, mesurant primer les posicions sobre la fotografia i després calculant la distància real per proporcionalitat.

El resultat ha estat el següent:

t: Temps (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4
s: distància al sostre (cm)	26,55	97,35	212,4	362,85	548,7

- Fer un gràfic dels punts obtinguts. Quin tipus de gràfic s'obté?
- Com ja sabeu la caiguda dels cossos es descriu amb una funció de segon grau. Determinar els paràmetres a,b,c de la funció $s = at^2 + bt + c$ de manera que passi per tres dels punts i comprovar si els altres són aproximadament sobre aquesta paràbola.
- Recordem que el Geogebra ens permet fer interpolacions. Només cal triar al darrer pas com a **model de regressió: polinòmica**. Comprovar amb el Geogebra si has fet bé l'apartat anterior.



18.

Un pagès ha comprat una hectàrea de terreny i vol plantar ametllers. Si planta molts arbres la producció no serà abundant doncs no podrà regar-los convenientment. Per decidir quants arbres plantar ha fet un estudi en els camps veïns.

Nº arbres	40	60	90
Kg ametlles	20000	24000	22500

- Un amic li aconsella plantar 50 arbres. Quants Kg s'esperen obtenir?
- I si planta 20 arbres?
- Per quin número d'arbres s'aconsegueix la màxima producció?

19.

La entrenadora d'un dofí ha pres algunes dades sobre els salts que realitza:

Temps (dècimes de segon)	1	2	3	5	6	8	9
Altura (metres)	0,9	1,8	2,5	3,75	4,2	4,8	4,95

- Raonar quin tipus d'interpolació utilitzar per calcular l'altura a la que arribarà el dofí en cada instant.

- b) Estimar l'altura a la que arribarà el dofí als 1,5 segons (15 dècimes de segon) d'iniciar el seu salt.
- c) Quan aconseguix l'altura màxima?
- d) Quan cau a l'aigua?

20.

Tenim 600 grams de gel a $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$ en un recipient al qual subministrem una calor cada segon. Mesurant la temperatura de l'aigua a diferents moments obtenim la taula següent:

t: Temps minuts	0	20	54	73	120	495	615	920	1100	1220	1920
T: Temperatura $^{\circ}\text{C}$	-12	-10	-6,6	-4,7	0	0	0	0	18	30	100

- a) Amb les dades anteriors construir un gràfic que doni la temperatura en funció del temps.
- b) Podem descriure aquest fenomen amb una funció de primer o segon grau?
Amb quin tipus de funció es pot ajustar?
- c) Trobar una funció que s'ajusti a totes les dades del gràfic.
- d) Donar una interpretació física dels resultats obtinguts.