INSTITUT EL SUI

El nombre π

Matemàtiques 2n ESO

El nombre π

A. Què és el nombre π

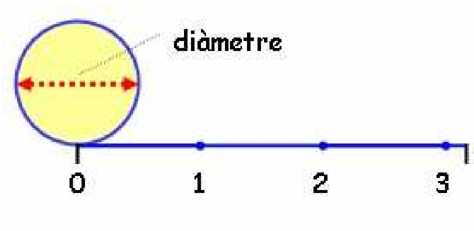
A.1 Escriviu amb les vostres paraules una definició de:
- **a)** Circumferència.
- **b)** Radi.
- **c)** Diàmetre.
- **d)** Cercle.

A.2 Llegiu algunes definicions dels diferents companys de la classe i trieu la que més us agradi de cada una de les paraules anteriors. Escriu-les a la llibreta.

A.3 Busqueu al diccionari les paraules anteriors i copieu la definició només si us agrada més que la que ja teniu.

A.4 Observeu les espelmes que el professor ha portat a classe.

- **a)** Quin és el nom del cos geomètric corresponent?
- **b)** Quina figura geomètrica és la base de cada espelma?
- **c)** Si volem mesurar el perímetre de cadascuna de les bases, amb quin problema ens trobem?
- **d)** Per fer una primera aproximació, de cadascuna de les espelmes digueu si l'altura de l'espelma és més petita, igual o més gran que la longitud de la circumferència que forma la seva base.



Per resoldre l'apartat c) podríem fer rodar l'espelma i després mesurar amb un regle, utilitzar un cordill i després mesurar o fer servir una cinta mètrica.

- **e)** Comproveu amb una cinta mètrica si les respostes que heu donat a l'apartat anterior són correctes. Us sorprèn alguna cosa?

A.5 Agafeu plats de dues mides diferents, una gran i una petita.
- **a)** Mesureu el contorn de cada plat.
- **b)** Dibuixeu dos segments amb les mides anteriors. Quan sigui més gran que el full utilitzeu la taula, la pissarra,.. per marcar la mida.
- **c)** Penseu quants plats iguals cal col·locar un sota l'altre per tal d'aconseguir una distància igual al segment corresponent a cada plat.
- **d)** El nombre de plats depèn de la mida del plat?

e) Per calcular de manera més exacta, mesureu el diàmetre de cada plat i després feu la divisió longitud/diàmetre:

Plat	Contorn (L)	Diàmetre (d)	L/d

Què observeu?

f) Compareu els resultats que heu trobat a l'última columna L/d amb el que han trobat els vostres companys. Passa el mateix amb els plats de tothom?

g) Creieu que sempre que dividim la longitud de la circumferència entre el seu diàmetre obtenim el mateix resultat?

A.6 Acabeu de descobrir un nombre molt important. El valor que heu trobat s'anomena ***Pi*** i s'acostuma a escriure utilitzant la lletra grega **π**.

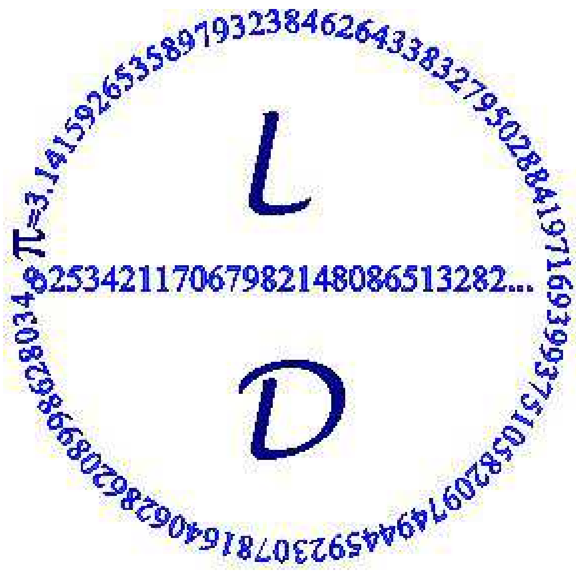
a) Cada un dels valors que heu obtingut és una mica diferent. Per millorar el valor de π, calculeu la mitjana de tots els quocients L/d obtinguts. Anoteu el resultat.

b) Busqueu la tecla corresponent a la calculadora, cliqueu i anoteu a continuació el valor que apareix a la pantalla.

c) Quina és la diferència entre els dos valors anteriors? Per què creus que es produeix aquesta diferència?

El nombre π no es pot escriure amb un nombre finit de xifres i a més no és un nombre periòdic, a aquest tipus de nombre se l'anomena irracional.

A.7 Heu vist que la divisió no depèn de la mida del plat i per tant podem generalitzar:



- L = longitud o perímetre del cercle
- d = diàmetre
- r = radi

Si dividim la longitud entre el diàmetre de qualsevol circumferència ens dóna sempre el mateix valor π = 3,141592654.... , es a dir:

$$\boxed{\pi = \frac{L}{d}}$$

O el que és el mateix $\boxed{\pi = \frac{L}{2r}}$ ja que dos radis fan un diàmetre.

a) Tenint en compte que ja sabem que π = 3,141592654.... expliqueu com podem calcular el perímetre si mesurem només el diàmetre.

b) Escriviu la fórmula de l'apartat anterior (amb la que es calculi el perímetre a partir del diàmetre).

c) Escriviu la fórmula si el que hem mesurat és el radi.

d) Imagineu ara que hem mesurat el perímetre. Com podem calcular el diàmetre?

e) Escriviu la fórmula corresponent.

f) Escriviu la fórmula si el que volem calcular és el radi.

B. Història del nombre π

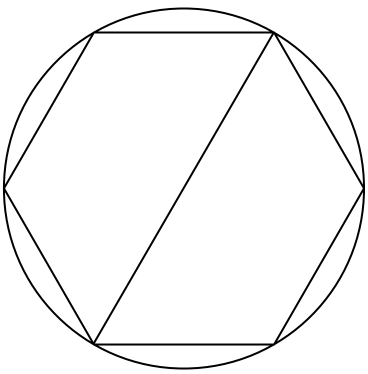
Déu va fer un Mar en un dipòsit cilíndric metàl·lic que tenia 10 colzes de vora a vora; era totalment rodó i de 5 colzes d'altura; l'envoltava totalment un cordó de trenta colzes (Reis 7, 23).
Aquest passatge bíblic és una de les primeres vegades a la història que l'home ha donat un valor de π. Cal recordar que π no és cap invent estrany, no és més que la proporció (raó) entre el perímetre i el diàmetre d'un cercle. La versió bíblica de π és, per tant,

$$\pi = \frac{perímetre}{diàmetre} = \frac{30\,colzes}{10\,colzes} = 3$$

Un antiquari anomenat Rhind va trobar un papir egipci de 3000 anys abans de Crist, en aquest papir ja es millora la versió bíblica de π donant el valor:

$$\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3{,}1604938...$$

Un dels genis més gran pel que fa a la recerca del veritable valor de π va ser **Arquímedes** (287-212 a. de C.). Ell va pensar que en lloc de calcular la raó entre el perímetre d'un cercle i el seu diàmetre, podia calcular una aproximació que consistia en mesurar la raó entre el perímetre d'un polígon regular inscrit i la seva diagonal.



La genialitat d'Arquímedes va consistir en desenvolupar una tècnica que li permetia utilitzar polígons de 96 costats! Així va poder afirmar que π havia de ser una mica més gran que 3,1409...
Arquimedes, de fet, va encetar la carrera de la recerca de més i més decimals de π.
El següent que ho va intentar va ser Tolomeu, matemàtic i astrònom de l'any 150. Tolomeu va utilitzar la mateixa tècnica que Arquímedes però utilitzant polígons de 360 costat. Amb això π s'havia d'apropar a 3,1416.
En els segles següents els avanços en el càlcul del nombre π es van fer fora d'Europa, així a l'any 480 el xinès Tsu Ch'ung-chih va trobar que π = 355/113 = 3,14159292. L'any 1100 eL Barceloní Sabasorda va calcular l'àrea del cercle a partir del valor π = 22/7 = 3,1429 i l'any 1150 el matemàtic hindú Bhâskara recomana el valor π = 3927/1250 = 3,1416.
Quan Europa va ser capaç de sortir dels anys d'estancament, es van accelerar els descobriments, al 1580, un matemàtic francès va utilitzar el mètode d'Arquimedes amb 393.216 costats i així obtingué el valor de π amb 9 xifres decimals correctes. Al voltant de 1650 Ludolph van Ceulen amb polígons de 4.610.000.000.000.000.000 costats va arribar a aconseguir 35 xifres decimals de π.
Era pràcticament impossible augmentar a més polígons la tècnica d'Arquímedes i tot feia pensar que el problema ja era tancat quan l'any 1660 Isaac Newton i Wilheim Leibnitz van desenvolupar una tècnica totalment nova basat en el nou *càlcul diferencial*.
Amb aquesta nova tècnica aconseguien series infinites de nombres que en sumar-los podien aproximar-se tant com volien a π. El primer intent d'utilitzar aquesta tècnica va ser un fracàs, sabien que

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-.....\right)$$

però després de sumar 150 d'aquestes fraccions només van arribar al nombre 3,1349 i ho van deixar quan es van adonar que per arribar a 100 xifres correctes haurien de sumar 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 termes i això era del tot impossible tenint en compte que feien les sumes amb llapis i paper.
Per sort Abraham Sharp va trobar una sèrie que s'apropava molt més ràpidament al nombre π i va aconseguir 71 xifres decimals l'any 1699. L'any 1706 amb una sèrie similar John Machin va arribar a les 100 xifres.

Arribat aquest punt els matemàtics començaven a dubtar si mai arribarien a tenir totes les xifres de π. Al 1767 Johan Heinrich Lambert va descobrir que π era irracional, és a dir, té infinites xifres decimals (i per tant impossible de trobar-les totes).
S'havien trobat ja 100 xifres de π i els matemàtics s'havien conformat, però l'any 1873 després de 20 anys de càlculs william Shanks va arribar a les 707 xifres.

L'any 1912 a l'Índia hi havia un jove aficionat a les matemàtiques anomenat **Ramanujan.**
Tant era la seva obsessió per les matemàtiques que no estudiava altres assignatures i va suspendre els exàmens

dels cursos que feia i va d'haver de deixar els estudis. Pobre i sense llibres va continuar inventant-se coses de matemàtiques tot sol. Després d'un temps va enviar els seus descobriments a Hardy, un matemàtic anglès. Hardy va mirar els fulls per sobre i els va llençar a la paperera pensant que eren tonteries, però aquella nit, tot dormint, li van venir al cap les fórmules que havia fullejat i es va adonar que les fórmules havien de ser correctes. Es va aixecar d'un bot i va anar corrents al despatx de la universitat trobant encara, per sort, els fulls a la paperera. En aquests fulls va trobar unes fórmules que permetien trobar moltes xifres de π amb poques operacions.

Amb aquestes fórmules Ferguson, un matemàtic anglès es va entretenir a comprovar els càlculs de Shanks i l'any 1946 va trobar un error a la xifra 527, el va corregir i va arribar a la xifra 710. L'any següent l'americà Wrench va arribar a la xifra 808 però l'incansable Ferguson les va repassar i va trobar un error a la xifra 723, corregint l'error i arribant correctament a la 808.
L'any 1949 a la ciutat de Los Àngeles van construir la computadora ENIAC. Ocupava un edifici sencer i en engegar-la s'apagaven les llums de la ciutat. Amb aquesta computadora van arribar a la xifra 2037. A partir d'aquest moment la carrera del desenvolupament i millora dels ordinadors ha anat donant més i més xifres de π, Al 1959 eren 16.000 i al 1966 ja eren 250.000 xifres.
És difícil dir quantes xifres hi ha a l'actualitat per què en el temps que passa entre que jo estic escrivint aquest full i tu l'estàs llegint segur que les dades ja són antiquades. Només un parell de referències: l'any 1996 Yasumasa Kanada de la universitat de Tòkio havia trobat 6 000.000 xifres i l'any següent els germans Chudnowsky de la universitat de Nova York ja en tenien 8.000.000.000.
Així i tot recorda que encara que omplim tot l'univers de fulls de paper plens de xifres de π amb la lletra més petita possible sols tindríem una part insignificant de les xifres que té π.
A continuació en tens unes quantes: π =

3.14159265358979323846264338327950288419716
939937510582097494459230781640628620899862803482534211706
7982148086513282306647093844609550582231725359408128481117
4502841027019385211055596446229489549303819644288109756659
3344612847564823378678316527120190914564856692346034861045
4326648213393607260249141273724587006606315588174881520920
9628292540917153643678925903600113305305488204665213841469
5194151160943305727036575959195309218611738193261179310511
8548074462379962749567351885752724891227938183011949129833
6733624406566430860213949463952247371907021798609437027705
3921717629317675238467481846766940513200056812714526356082
7785771342757789609173637178721468440901224953430146549585
3710507922796892589235420199561121290219608640344181598136
2977477130996051870721134999999837297804995105973173281609
6318595024459455346908302642522308253344685035261931188171
0100031378387528865875332083814206171776691473035982534904
2875546873115956286388235378759375195778185778053217122680
6613001927876611195909216420198938095257201065485863278865

9361533818279682303019520353018529689957736225994138912497
2177528347913151557485724245415069595082953311686172785588
9075098381754637464939319255060400927701671139009848824012
8583616035637076601047101819429555961989467678374494482553
7977472684710404753464620804668425906949129331367702898915
2104752162056966024058038150193511253382430035587640247496
4732639141992726042699227967823547816360093417216412199245
8631503028618297455570674983850549458858692699569092721079
7509302955321165344987202755960236480665499119881834797753
5663698074265425278625518184175746728909777727938000816470
6001614524919217321721477235014144197356854816136115735255
2133475741849468438523323907394143334547762416862518983569
4855620992192221842725502542568876717904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929
8489608412848862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047
8027590099465764078951269468398352595709825822620522489407726719478268482601476990902640136394437455305068203496252451749399651431429809
1906592509372216964615157098583874105978859597729754989301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725246808459872736446
9584865383673622262609912460805124388439045124413654976278079771569143599770012961608944169486855584840635342207222582848864815845602850
6016842739452267467678895252138522549954666727823986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710
8931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848216829989487226588048575640142704
7755513237964145152374623436454285844479526586782105114135473573952311342716610213596953623144295248493718711014576540359027993440374200
7310578539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191048481005370614680674919278191197939952061419663428754440643745123718192179998391015919561814675142691239748940907186494231961567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346722182562599661501421503068038447734549202605414665925201497442850732518666002132434088190710486331734649651453905796268561005508106658796998163574736384052571459102897064140110971206280439039759515677157700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198414848829164470609575270695722091756711672291098169091528017350671274858322287183520935396572512108357915136988209144421006751033467110314126711136990865851639831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535893226185489632132933089857064204675259070915481416549859461637180270981994309924488957571282890592323326097299712084433573265489382391193259746366730583604142813883032038249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485963766983895228684783123552658213144957685726243344189303968642624341077322697802807318915441101044682325271620105265227211166039666557309254711055785376346682065310989652691862056476931257058635662018558100729360659876486117910453348850346113657686753249441668039626579787718556084552965412665408530614344431858676975145661406800700237877659134401712749470420562230538994561314071127000407854733269939081454664645880797270826683063432858785698305235808933065757406795457163775254202114955761581400250126228594130216471550979259230990796547376125517656751357517829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480109412147221317947647772622414254854540332157185306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748738986654949450114654062843366393790039769265672146385306736096571209180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757511495950156604963186294726547364252308177036751590673502350728354056704038674351362222477158915049530984448933309634087807693259939780541934144737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435403701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578601588161755782973523344604281512627203734314653197777416031990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927777103863877343177207545654532207770921201905166096280490926360197598828161332316663652861932668633606273567630354477628035045077723554710585954870279081435624014517180624643626794561275318134078330336254232783944975382437205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337464144282277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985803385072242648293972858478316305777756068887644624824685792603953527734803048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193064553779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135711136941091193932519107602082520261879853188770584297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291651300500516832336435038951702989392233451722013812806965011784408745196012122859937162313017114448464090389064495444006198690754851602632750529834918740786680881833851022833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175461395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087112328278921250771262946322956398989893582116745627010218356462201349671518819097303811980049734072396103685406643193950979019069963955245300545058068550195673022921913933918568034490398205955100226353536192041994745538593810234395544959778377902374216172711172364343543947822181852862408514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141595781119635833005940873068121602876496286744604774649159950549737425626901049037781986835938146574126804925648798556145372347867330390468838343634655379498641927056387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830722012690147546684765357616477379467520049075715552781965362132392640616013635815590742202020318727760527721900556148425551879253034351398442532234157623361064250639049750086562710953591946589751413103482276930624743536325691607815478181152843667957061108615331504452127473924544945423682886061340841486377670096120715124914043027253860764823634143346235189757664521641376796903149501910857598442391986291642193994907236234646844117394032659184044378051333894525742399508296591228508555821572503107125701266830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101002996078386909291603028840026910414079288621507842451670908700069928212066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293486003415872298053498965022629174878820273420922224533985626476691490556284250391275771028402799806636582548892648802545661017296702664076559042909945681506526530537182941270336931378517860904070866711496558343434769338578171138645587367812301458768712660348913909562009939361031029161615288138437909904231747336394804575931493140529763475748119356709110137751721008031559024853090669203767192203322909433467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816228824462575916333039107225383742182140883508657391771509682887478265699599574490661758344137522397096834080053559849175417381883999446974867626551658276584835884531427756879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178583829204197484423608007193045761893234922927965019875187212726750798125547095890455635792122103334669749923563025494780249011419521238281530911407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079119153267343028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327131425170296923488962766844032326092752496035799646925650493681836090032380929345958897069536534940603402166544375589004563288225054525564056448246515187547119621844396582533754388569094113031509526179378002974120766514793942590298969594699556576121865619673378623625612521632086286922210327488921865436480229678070576561514463204692790682120738837781423356282360896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279839400415297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989467154357846878861444581231459357198492252847160504922124247014121478057345510500801908699603302763478708108175450119307141223390866393833952942578690507643100638351983438934159613185434754649556978103829309716465143840700707360411237359984345225161050702705623526601276484830840761183013052793205427462865403603674532865105706587488225698157936789766974220575059683440869735020141020672358502007245225632651341055924019027421624843914035998953539459094407046912091409387001264560016237428802109276457931065792295524988727584610126483699989225695968815920560010165525637567

2396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435403701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578601588161755782973523344604281512627203734314653197777416031990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927777103863877343177207545654532207770921201905166096280490926360197598828161332316663652861932668633606273567630354477628035045077723554710585954870279081435624014517180624643626794561275318134078330336254232783944975382437205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337464144282277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985803385072242648293972858478316305777756068887644624824685792603953527734803048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193064553779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135711136941091193932519107602082520261879853188770584297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291651300500516832336435038951702989392233451722013812806965011784408745196012122859937162313017114448464090389064495444006198690754851602632750529834918740786680881833851022833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175461395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087112328278921250771262946322956398989893582116745627010218356462201349671518819097303811980049734072396103…

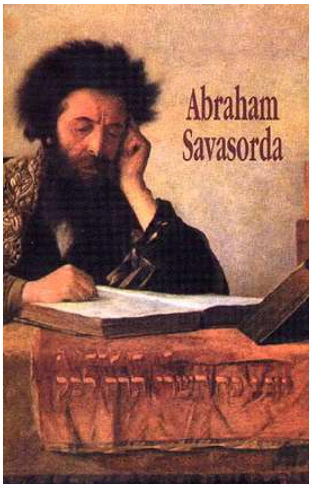
B.1 Llegeix amb atenció el text anterior i omple la taula següent:

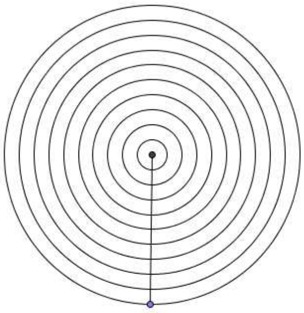
Autor	Any	Tècnica utilitzada	Xifres decimals obtingudes

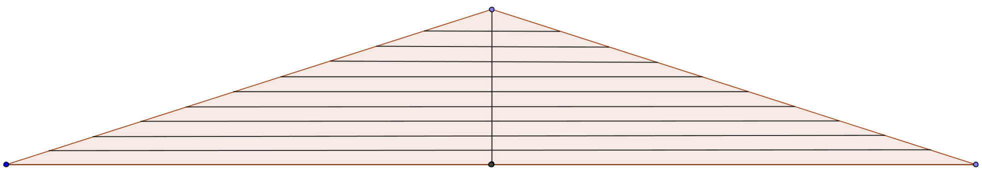
C. Una aproximació dolça per calcular l'àrea del cercle

No menys interessant que buscar xifres del nombre pi va ser trobar l'àrea del cercle. Nosaltres ara farem de matemàtics aprofitant les eines actuals, primer per aproximació directa i després amb l'ordinador utilitzant el mètode d'exhaustió mitjançant polígons inscrits en la circumferència.

C.1 Abraham Bar Hiia, més conegut per **Sabasorda,** va ser un matemàtic jueu nascut a Barcelona l'any 1070 que va escriure diversos llibres de geometria, astronomia i música. En un d'aquests llibres apareix una manera molt original de calcular l'àrea d'un cercle: convertir el cercle en un triangle tallant el cercle a tires molt primes i posant-les estirades. Observa el dibuix:







Ara nosaltres farem una aproximació a aquesta construcció de manera molt dolça utilitzant una regalèssia.
Podem considerar que el cercle inicial és la nostra regalèssia.

a) Sense mesurar podríeu dir a quant equival el radi?

Ara agafarem un ganivet i tallarem un radi. Desenroscarem la primera peça i la col·locarem per formar la base del triangle.

b) Com sense mesurar no podem donar una mesura exacta del radi pensarem que el radi és r. Quina és la base del triangle?

Per construir tot el triangle només cal desenroscar totes les peces i ajuntar-les en ordre per tal que s'enganxin.

c) Quantes peces formen l'altura del triangle? Amb què coincideix aquest nombre?

d) Calculeu l'àrea del triangle utilitzant les dades dels apartats b) i c).

e) Escriviu la fórmula que permet calcular l'àrea **A** del cercle a partir del radi **r**.

C.2 La Berta vol comprar un mirall rodó de 50 cm de radi per a la seva habitació. Sap que el marc del mirall costa a 15 €/m i que el vidre de mirall costa a 47 € el m^2 (independentment de la seva forma).

- **a)** Quina serà la longitud total del marc del mirall?
- **b)** Quin serà el preu del marc?
- **c)** Quina serà la superfície del mirall?
- **d)** Quin serà el preu del vidre del mirall?
- **e)** Quin serà el preu total del mirall amb el marc?

D. Àrea del cercle mitjançant GeoGebra

Una manera senzilla per aproximar-nos a l'àrea d'un cercle és mitjançant polígons regulars inscrits en la circumferència.

Per a fer-ho farem servir el GeoGebra que permet fer construccions geomètriques a la pantalla de l'ordinador.

D.1 Obriu l'arxiu **superficie cercle.ggb** que us ha facilitat el professor.

a) Investigueu què passa amb els perímetres dels polígons a mesura què augmenta el número de costats, per fer-ho proveu amb diferents radis i ompliu la taula següent:

Radi	**4 costats**	**8 costats**	**16 costats**	**32 costats**	**Longitud circumferència**

Què observeu?

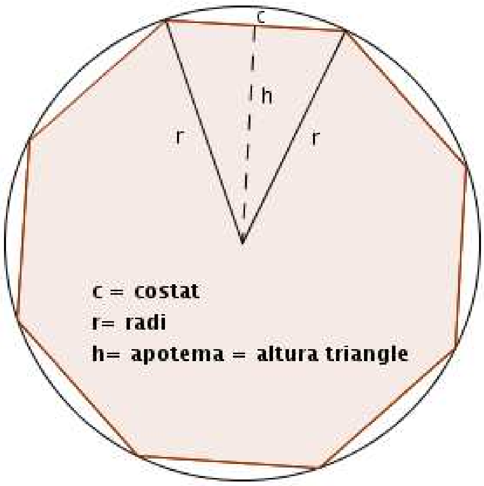
b) Investigueu què passa amb les àrees corresponents a mesura que augmenta el número de costats, per fer-ho proveu amb diferents radis i ompliu la taula següent:

Radi	**4 costats**	**8 costats**	**16 costats**	**32 costats**	**Àrea circumferència**

Què observeu?

Un cop feta l'experimentació anem a trobar de manera formal la manera de calcular l'àrea d'un cercle:

D.2 Pensem primer que ens aproximem amb un octàgon regular tal com s'indica en el dibuix:



a) Quina és l'àrea d'un triangle?

b) Quina és l'àrea del polígon?

Penseu ara que agaféssim un polígon regular de n costats.

c) Quina és l'àrea d'un triangle?
d) Quina és l'àrea del polígon?

Imagineu ara que poguéssim agafar un polígon d'infinits costats.

e) A quina mesura s'acostaria l'altura del triangle h?
f) En què es convertiria c · número de costats ? (Penseu en el què heu observat amb el GeoGebra)
g) Utilitzant les deduccions anteriors en què es converteix:

Àrea del cercle=

E. Aplicacions pràctiques del cercle i la circumferència

E.1 Abans de continuar recorda les fórmules del perímetre i de l'àrea del cercle.

E.2 Un joier ha de fer un anell d'or de 6 mm de radi. Quina longitud de fil d'or ha d'utilitzar per a que l'anell tingui la grandària desitjada?

E.3 Calcula el perímetre i la superfície d'una plataforma circular de 26 m de diàmetre.

E.4 El Felip i la Laia han anat a passejar amb bicicleta. El Felip se n'adona que la seva bicicleta té les rodes més petites que les de la Laia i, per tant, mentre que les rodes de la Laia fan dues voltes les del Felip en fan 3. Aleshores diu -*Mira, Laia, la meva bici va molt més ràpid que la teva per què les meves rodes donen moltes més* *voltes que les teves*. Es cert el que diu el Felip? Explica molt bé el per què de la teva resposta.

E.5 Els ciclistes acostumen a portar al manillar un aparell que mesura la velocitat de la bicicleta. Aquest aparell funciona a partir d'un comptador de voltes imantat que es col·loca en un radi de la roda. El problema és que existeixen bicicletes amb rodes de diferents grandàries i la roda d'una bicicleta petita dona més voltes que una roda d'una bicicleta gran, així un mateix aparell indicaria més velocitat com més petita sigui la roda.

Per evitar això cal programar el velocímetre introduint la longitud d'una volta de la roda. Per exemple, una bicicleta BTT gran te una roda d'un radi de 34 cm. Amb quina longitud de roda haurem de programar el velocímetre?

Foto guanyadora del concurs de fotografia matemàtica de l'ABEAM any 2007Autora Elisenda Fornaguera, Nivell 1r cicle ESO títol Tangents ciclistes

E.6 El dissabte passat va ser l'aniversari de la Irene i les seves amigues li van regalar un velocímetre per la seva bicicleta. En obrir el regal van veure que necessitaven saber la longitud d'una volta de la roda per a poder-lo programar. Les seves amigues van dir: No et preocupis que nosaltres t'ho programarem. Però les seves amigues no es van posar d'acord en la manera de fer-ho i cada una ho va calcular d'una manera diferent.

La Flàvia va fer una marca de guix al terra i a la roda, va moure la bici fins que la roda va donar una volta justa i va fer un altra marca. Va mesurar la distància i va dir era de 234 cm

La Mònica va mesurar el radi que era (segons ella) de 37 cm.

I la Berta va fer una marca a la roda de la bici, va fer 1 km amb la bici i va comptar les voltes que van ser de 435 voltes

- **a)** Quin seria el radi i la longitud de la roda segons la Flàvia?
- **b)** Quin seria el radi i la longitud de la roda segons la Mònica?
- **c)** Quin seria el radi i la longitud de la roda segons la Berta.?
- **d)** Quin creus que és el millor mètode i per què?

E.7 L'especialitat del restaurant La Mel és el carpaccio de vedella que es serveix recobrint tot el plat. Ara en Ramon propietari de l'establiment vol servir el carpaccio en plats normals i en plats quadrats. Abans d'encarregar plats de 20 cm de diàmetre i plats quadrats de 20 cm de costat parla amb el seu fill.

- **a)** Si tu fossis el seu fill i sense fer cap càlcul, què li diries?
- **b)** Argumenta ara la teva resposta amb els càlculs corresponents.
- **c)** Quina hauria de ser la mida dels plats quadrats?

E.8 A tots ens agrada molt la pasta i per això avui hem comprat un paquet format estalvi de 750 grams de spaghetti nº3. A l'hora de fer el dinar hem llegit les instruccions de la part de darrera.

a) Quantes racions podem fer amb aquest paquet?

b) Quants grams necessitem per 4 persones?

c) Si no tenim per pesar, com podem agafar els espaguetis per una ració?

d) Ens ha agradat molt la idea del mesurador i com a casa som 4 persones volem dibuixar un mesurador per 4 persones. Explica detalladament el procediment a seguir.

e)Hem mesurat el diàmetre del mesurador del paquet i és de 2 cm. Com serà el mesurador per 4 persones?

f) Si posem tots els espaguetis del paquet formant un cercle, quin serà el radi?

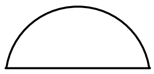
E.9 Un fabricant de DVD fa planxes de 120 x 144 cm de plàstic després les talla en cercles de 12 cm de diàmetre (que és el que fa un DVD).

a) Quants DVD poden fabricar amb una planxa?
b) Quina és la superfície total de plàstic que s'aprofita?
c) Quina és la superfície de plàstic que cal reciclar?

E.10 La millor manera de mesurar distàncies llargues amb precisió és amb un hodòmetre. Volem construir un hodòmetre casolà amb una roda que faci una volta en 1 metre de manera que per mesurar distàncies només ens caldrà contar les voltes.

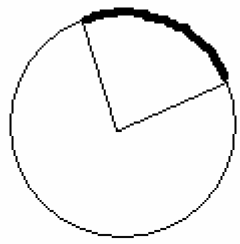
a) Quin radi haurà de tenir la roda?
b) A l'institut teniu un hodòmetre professional. Mesura el seu radi. Coincideix amb el resultat anterior?
c) Abans de comprar aquest hodòmetre en teníem un fet per un professor del centre amb una roda vella de bicicleta infantil que feia 12,6 cm de radi. Explica com podríem mesurar distàncies amb aquest hodòmetre.

E.11 Calcula el perímetre i l'àrea de la figura següent:



4 cm

F. Arc de circumferència:



F.1 Discutiu amb el professor una definició correcta d'arc de circumferència, i apunteu-la.

F.2 Suposem que tenim una circumferència de 6 cm de radi i volem calcular quina és la longitud de l'arc de circumferència que té un angle central de 15º.

a) Calculeu amb la fórmula la longitud de tota la circumferència.

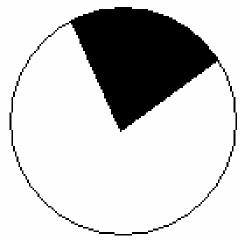
b) Discuteix amb els companys i el professor com es podria calcular la longitud d'arc corresponent a 1 grau. Calcula-la.

c) Ara que sabem quant val la longitud de l'arc d'1 grau, penseu com calcular la longitud de l'arc de 15º que cercàvem

d) Calculeu la longitud de l'arc de circumferència de 15º.

F.3 Considereu ara una circumferència de radi 10 m. Calculeu la longitud d'arc corresponent als angles centrals de 10º, 45º, 70º, 90º, 180º i 230º.

G. Sector circular:



G.1 Discutiu amb el professor una definició correcta de sector circular, i apunteu-la.

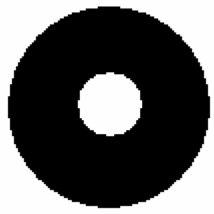
G.2 Suposem que tenim una circumferència de 6 cm de radi, i volem calcular quina és l'àrea del sector circular que té un angle central de 15º.

a) Penseu com calcular l'àrea del sector circular amb un raonament semblant al càlcul de la longitud de l'arc.

b) Calculeu l'àrea corresponent.

G.3 Considereu ara una circumferència de radi 10 m. Calculeu l'àrea del sector circular corresponent als angles de 10º, 45º, 70º, 90º, 180º i 230º.

H. Corona circular:



H.1 Discutiu amb el professor una definició correcta de corona circular, i apunteu-la.

H.2 Escriviu com calcularíeu l'àrea d'una corona circular.

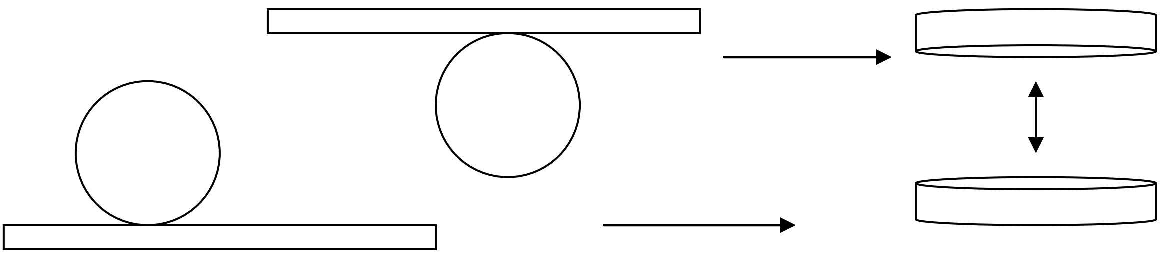
H.3 Calculeu l'àrea de la corona circular que està entre dos cercles, un de radi 8 cm i l'altre de radi 6 cm.

H.4 Calculeu l'àrea d'una corona circular compresa entre dos cercles, un de diàmetre 14 cm i un altre de diàmetre 10 cm.

I. Exercicis d'aplicació

I.1 Tots coneixeu el formatge en porcions *El Caserio*. Ja sabeu... *Del caserio me fio.* Anem a fer-los la competència.

- **a)** Inventeu el nom i l'eslògan d'una nova marca de formatges en porcions.
- **b)** Decidiu quina serà la grandària de la caixa rodona (podeu dir diàmetre o radi) decidiu també quants formatgets han de cabre a la caixa.
- **c)** Per fabricar la caixa necessitem dos cercles de cartró i una tira de cartró



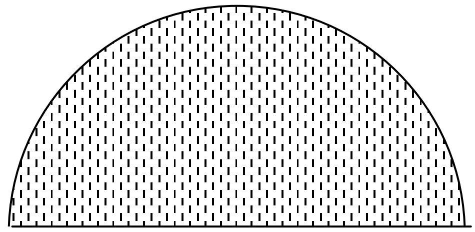
Calculeu quina superfície tindrà cada cercles i quina longitud cada tires.

- **d)** Calculeu les dimensions d'una porció (un formatget) i dibuixeu-la a escala 1:1.
- **e)** El dibuix que acabeu de fer ha de correspondre a l'etiqueta d'una porció. Calculeu la superfície d'aquesta etiqueta.
- **f)** Pinteu l'etiqueta anterior amb les lletres i dibuixos que us semblin més adequats.

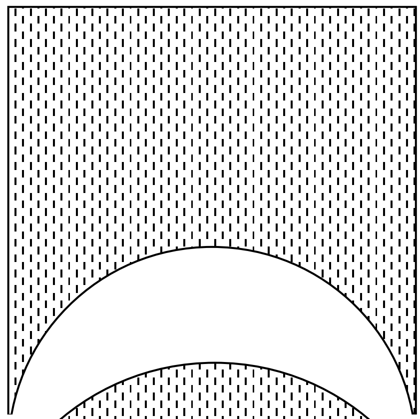
I.2 No ens agrada que les classes tinguin el mateix mobiliari, ja estem avorrits de les taules d'alumnes. Els alumnes de 2n de l'IES el Sui hem decidit modificar el mobiliari de la classe. Hem demanat a un famós dissenyador de mobles uns nous models i ens ha enviat els següents dibuixos. En tots els casos la cadira aniria a la part de sota del dibuix. El nostre fabricant pot fer les taules a qualsevol mida. Ens demana que triem les mides que ens vagin millor

a) Observeu les taules i trieu les mides més adients per a la vostra aula.

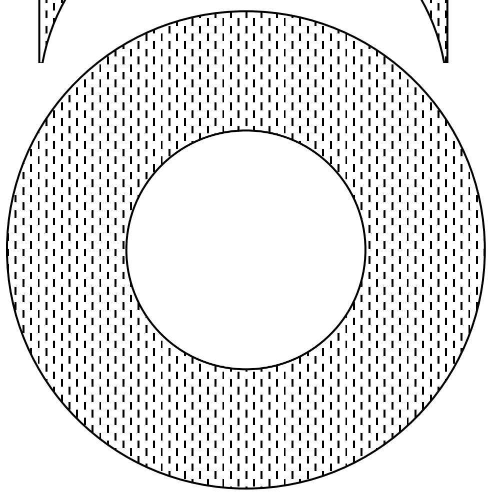
Model: *Mitja lluna*
Es tracta d'un còmode model semicircular per a un únic alumne
Mides:
Radi del cercle =



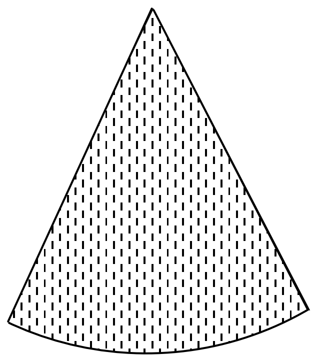
Model: *Panxeta*
Aquest model dona molt espai per treballar i permet recolzar els colzes.
Mides:
Com que es tracta d'un quadrat amb mig cercle retallat sols cal donar la mida del Costat de quadrat =



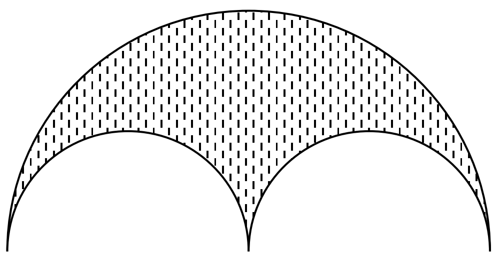
Model: *Dònut*
Es tracta d'un model en forma de corona circular. Cal posar una cadira giratòria al centre ideal per una aula circular envoltada de pissarres. No és gaire bona per treballar en grup.
Mides:
Radi del cercle interior =
Radi cercle exterior =



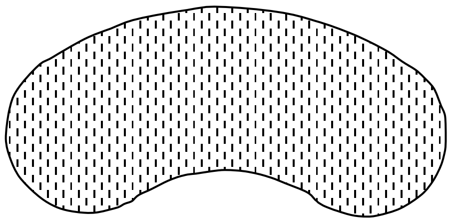
Model: *Formatge*
Es tracta d'un model ideal per combinar el treball individual i el treball en grup
Mides:
És molt important decidir bé l'angle. Ha de ser un divisor de 360 que permeti fer grups circulars exactes de 3, 4, 5 , 6 o més alumnes
Angle =
Radi del cercle =



Model: *Lúnules*
És una taula per a dos alumnes. Hi ha poc espai però és divertida. Permet fer grups de 4 tancant dos alumnes dins un cercle en el que seuran d'esquena
Mides:
Radi del cercle gran =
Radi dels cercles petits =



Model: *Salsitxa*
És un model que busca l'amplitud i comoditat de l'alumne però que dificulta molt el treball en grup
Mides:
La seva construcció es basa en un sector de corona circular amb dos semicercles afegits a cada cantó. Les dades que necessitem són:
Angle del sector
Radi del cercle interior =
Radi dels cercles exterior =
(observar que la diferència entre el dos radis serà el diàmetre dels semicercles laterals.



b) El fabricant ens ha comunicat que les taules es fabriquen en un material plàstic que pot ser de qualsevol color, però que han d'anar ribetejats per una tira d'acer al voltant de cada taula. El material plàstic te un preu de 47 € el metre quadrat i la tira d'acer val 13 € el metre lineal. Feu tots els càlculs necessaris per omplir la taula següent.

Model	**Àrea**	**Perímetre**	**Preu**
Mitja lluna			
Panxeta			
Dònut			
Formatge			
Lúnules			
Salsitxa			

c) Quina és la taula que t'agrada més? Per què?

d) Inventa't el teu propi model de taula. Posa-li nom, fes un dibuix utilitzant el regla, compàs i transportador d'angles. Pensa quines dimensions ha de tenir per a que sigui adequada per la classe. Calcula la seva superfície, el seu perímetre i el preu.

J. ANNEX

J.1 Quina és la corda més gran que té una circumferència? Raona la resposta.

J.2 Dibuixa una circumferència i traça-hi:

a) Un radi de color vermell.

b) Un diàmetre de color blau

c) Una corda de color verd.

d) Un arc de color groc.

J.3 Es poden dibuixar tres o més circumferències concèntriques?

J.4 El radi d'una circumferència fa 2,5 cm. Quina és la longitud de la circumferència? I el diàmetre?

J.5 La longitud d'una circumferència és de 21,98 cm. Quant mesura el diàmetre? I el radi?

J.6 Calculeu l'àrea d'un cercle de 24,4 cm de radi.

J.7 Dibuixeu un cercle de 4 cm de radi. Trobeu l'àrea.

J.8 Amb un transportador d'angles, dibuixeu un sector circular de 80º d'amplitud en un cercle de 5 cm de radi. Trobeu l'àrea d'aquest sector.

J.9 Dibuixeu un sector circular de 60º d'amplitud i 5 cm de radi. Calculeu l'àrea.

J.10 Una plaça fa 7 dam i 3m de diàmetre. Calculeu l'àrea.

J.11 Calculeu l'àrea d'un sector circular de 10 cm. de radi i 180º d'amplitud.

J.12 La roda de la bicicleta de la Gemma mesura 27 cm de radi. Quina distància recorre quan la roda fa 10 voltes?

J.13 Dues rodes iguals d'una màquina tenen 22 cm de radi, i la distància entre els eixos és de 62 cm. Una corretja uneix totes dues rodes. Quina és la longitud de la corretja?

J.14 El diàmetre d'una circumferència fa 43,56 m. Trobeu la longitud d'un arc de 80º d'aquesta circumferència.

J.15 Volem fer un jardí en forma de corona circular. El radi de la circumferència més gran ha de ser 9,4 m i el radi de la circumferència més petita ha de ser la meitat que el de l'altra. Quants metres quadrats tindrà aquest jardí?

J.16 Calculeu la longitud d'un arc de 5m de radi i 225º d'amplitud.

J.17 L'angle que formen dos radis d'una motocicleta és de 45º, i la longitud d'un radi 0,4 m. Quina distància hi haurà entre radi i radi de la llanta?

J.18 Amb un tauler quadrangular d'1 m. de costat volem fer el cercle més gran possible. Quina superfície tindrà aquest cercle?. Quant ens sobrarà?

J.19 Amb un tauler rectangular de 50 cm de llarg per 10 cm d'ample volem fer 5 fitxes rodones iguals tan grans com sigui possible. Quants centímetres quadrats tindrà cada fitxa?

J.20 El radi d'una roda d'una bicicleta fa 30 cm. Quantes voltes farà aquesta roda en recórrer 5 km?

J.21 Tenim un ull de bou de 20 cm de radi al qual volem posar un marc de 5 cm. d'ample. Quina superfície tindrà aquest marc?

J.22 Inscrivim un quadrat en una circumferència de 7 cm. de radi. Calculeu la superfície compresa entre un costat i l'arc corresponent de la circumferència.

J.23 Un mestre de taller ha d'introduir un eix de 25 mm de diàmetre i una femella, tot ben ajustat, en un forat circular de 30 mm de diàmetre.

a) Quina mida tindran els radis d'aquesta femella.

b) I quina àrea tindrà?

J.24 Si el radi de la Terra és de 6 378 km., quina és la longitud de l'equador?
J.25 Volem construir una taula rodona per a 12 convidats, de manera que cadascú disposi de 80 cm de contorn. Quin n'ha de ser el diàmetre?
J.26 En recollir un cable amb un torn de 40 cm de diàmetre, hem necessitat fer 37 voltes. Quina és la longitud del cable recollit?
J.27 Hem recorregut 100 m. amb una bicicleta les rodes de la qual fan 85 cm de diàmetre. Cada cop que fèiem una volta de pedal, la roda de la bicicleta feia dues voltes i mitja:

a) Quantes voltes ha fet la roda ?

b) Quantes voltes de pedal hem fet?

J.28 Unes tovalles rodones pengen 10 cm tot al voltant d'una taula circular de 50 cm de radi. Hi volem cosir una punta, resseguint tota la vora. Quina longitud de punta necessitarem?