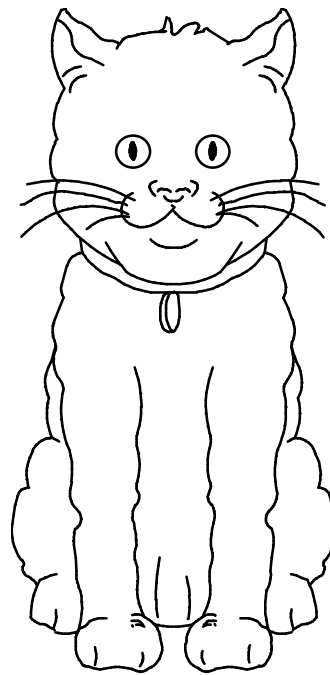
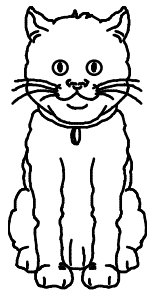


HOMOTÈCIA I SEMBLANÇA



Homotècia i semblança

Introducció

Anava un burro carregat amb dos sacs de sal plens de gom a gom. Suava i patia el pobre burro amb una càrrega tan pesada, de sobte l'ase es va entrebancar i va caure al riu. La sal dels sacs es va desfer amb l'aigua i quan va continuar caminant es va adonar que la seva càrrega s'havia tornat lleugera. A partir d'aquest dia l'ase es tirava al riu cada vegada que el carregaven amb els sacs de sal. La fama que aquests animals tenen de *burros* no bé per la seva intel·ligència (que en tenen força) si no per la seva tossuderia. Per tant l'ase s'havia tornat inútil per la seva tasca i sols quedava sacrificar-lo. **Tales de Milet** va intervenir a temps i, abans que el matessin va proposar que el carreguessin d'esponges. Com més es tirava al riu més pesava la càrrega de l'ase, d'aquesta manera l'astut animal ja no va tornar a tirar-se al riu. Tales de Milet és considerat un dels primers grans savis de la història, va viure al voltant del 625 abans de Crist a la ciutat de Milet i es coneixen molt poques dades sobre ell amb certesa, la majoria d'elles són anècdotes com la de l'ase que volen emfatitzar el seu geni. El que sí sembla cert és que fou el primer matemàtic conegut que va fer descobriments matemàtics propis.

Un dels descobriments propis que se suposa va fer és el desenvolupament del concepte de semblança. Amb aquest concepte calculava tranquil·lament les alçades de construccions clavant un pal al terra, aleshores deia que el triangle format pel pal i la seva ombra era **semblant** al triangle format per l'edifici i la seva ombra i amb un senzill càlcul trobava l'alçada del que volia. El mèrit d'aquest fet és relatiu ja que podem pensar que hi ha altres alternatives per trobar aquesta alçada, però Tales va aplicar la seva tècnica de les semblances per calcular la distància d'un vaixell a la platja.

Tales era un savi no sols pels seus descobriments matemàtics, era un filòsof i un pensador. Un dia li van preguntar: quina cosa t'estranyaria més de veure? I ell va contestar: *El que més m'estranyaria és veure a un tirà que arribi a vell*. La seva frase favorita ens pot ajudar 2600 anys després a pensar una mica:

Cal que et coneguis a tu mateix

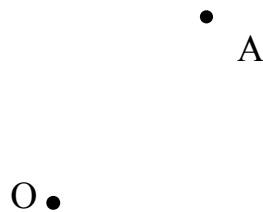


Homotècies

H.1

Dibuixa un punt B que compleixi les següents condicions

- Que estigui a una distància d'O 3 vegades més gran que la que hi ha entre O i A (es a dir, cal mesurar la distància entre O i A i multiplicar-la per 3).
- Que estigui en la direcció OA i en el sentit \overrightarrow{OA} (és a dir el punt A queda entre O i B).



*El punt B que acabes de dibuixar direm que és el **homotètic** d'A amb centre O i raó 3. I escriurem: **$H(O,3)$***

H.2

Fes una $H(O, \frac{1}{2})$ amb el punt A (caldrà multiplicar la distància OA per $\frac{1}{2}$)



H.3

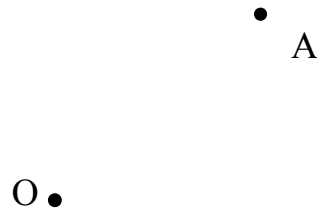
Fes una $H(O, 1)$ amb el punt A. Explica amb paraules què és el que passa.



Fins ara hem dibuixat homotècies de raó més grans, més petites o iguals a 1 però sempre hem considerat la raó positiva. Si la **raó és negativa** canvia el sentit en el que dibuixem el punt B, és a dir, **multiplicarem la distància per la raó i la dibuixarem a l'altra banda del punt O respecte de A**

H.4

Fes una $H(O, -2)$ amb el punt A



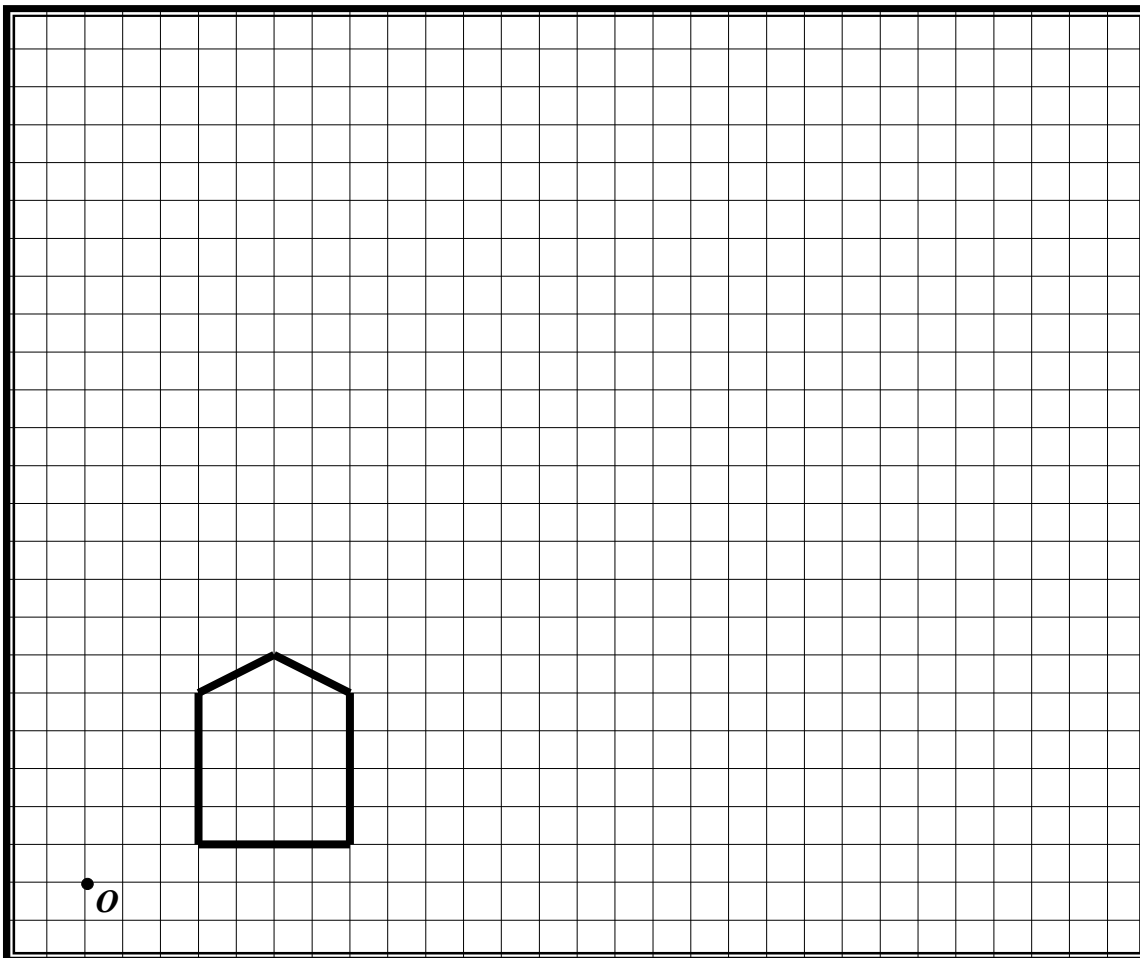
(Per facilitar els exercicis, a partir d'ara, posarem quadrícula, d'aquesta manera no cal mesurar la distància sols cal comptar quadrats)

Homotècies de figures senceres

Per fer la figura homotètica a un altra cal fer la homotècia en cada un dels punts de la figura. A l'hora de la veritat, caldrà fer la homotècia dels punts més significatius i després reconstruir la figura

H.5

Aplica una $H(O,3)$ a la figura següent:

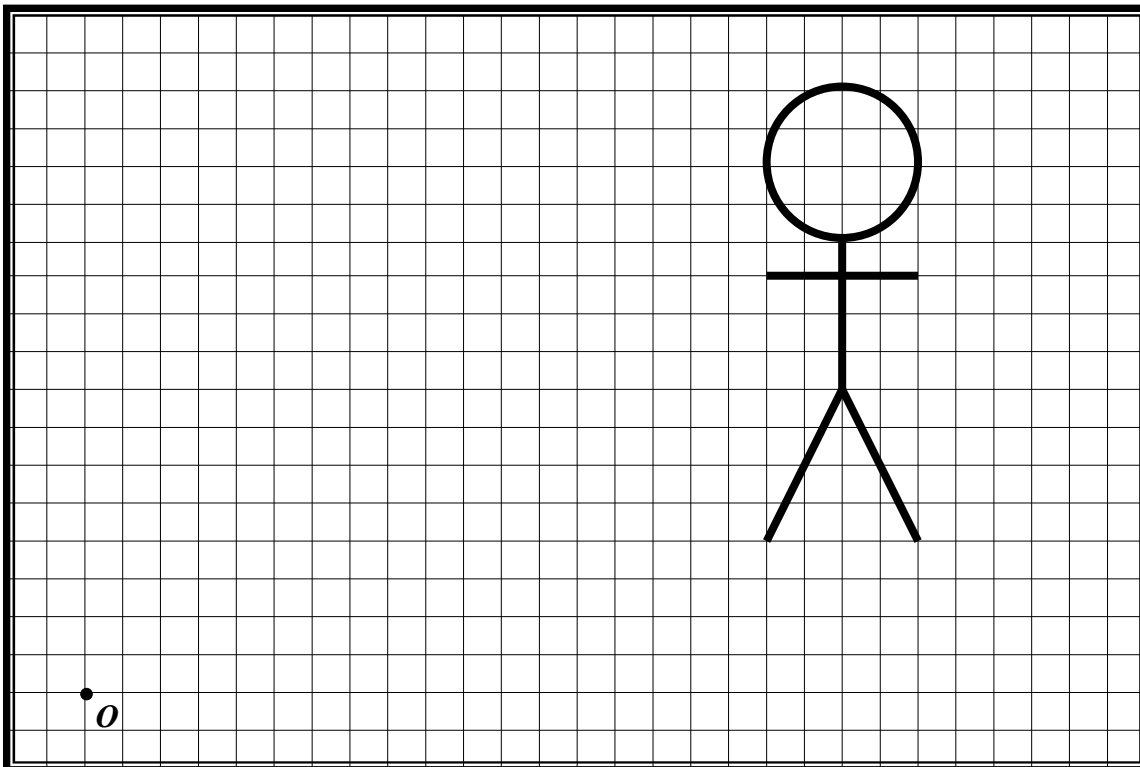


Per fer una circumferència homotètica a un altra cal:

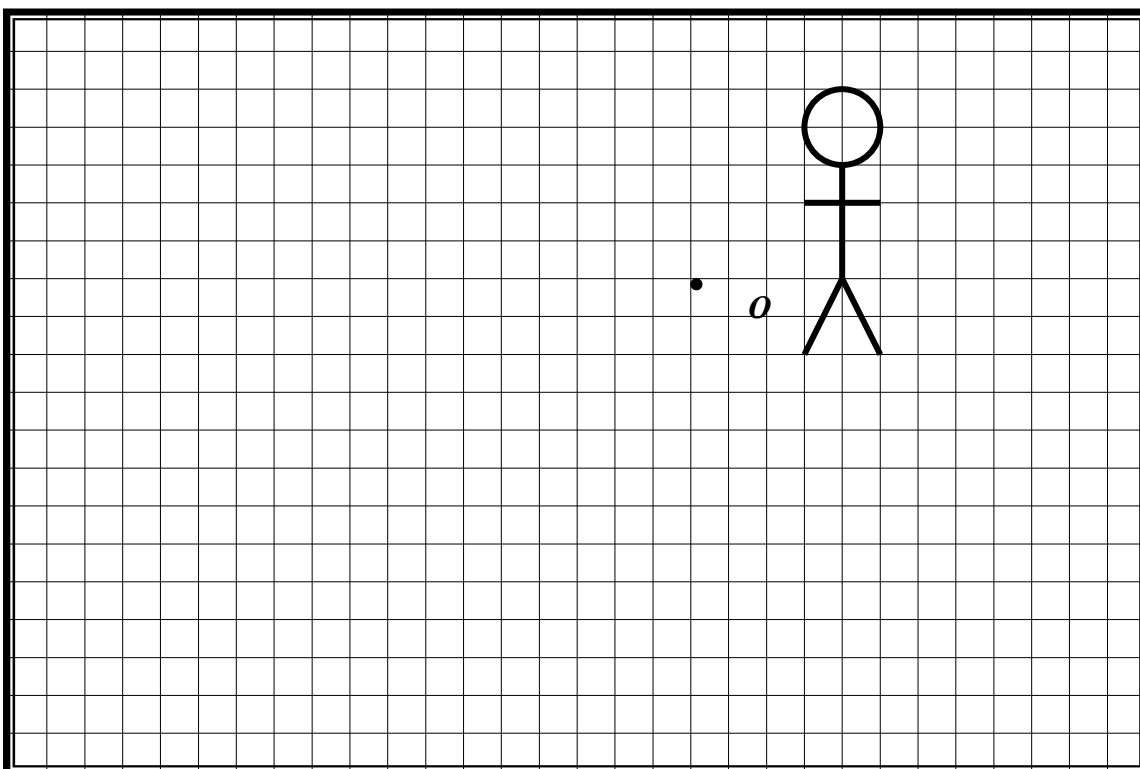
- Buscar el punt homotètic al centre.
- Mesurar el radi i multiplicar-lo per la raó.
- Tornar a dibuixar el cercle amb ajut d'un compàs amb el nou centre i el nou radi.

H.6

Aplica una $H(O, \frac{1}{2})$ a la figura següent:

**H.7**

Aplica una $H(O, -2)$ a la figura següent:



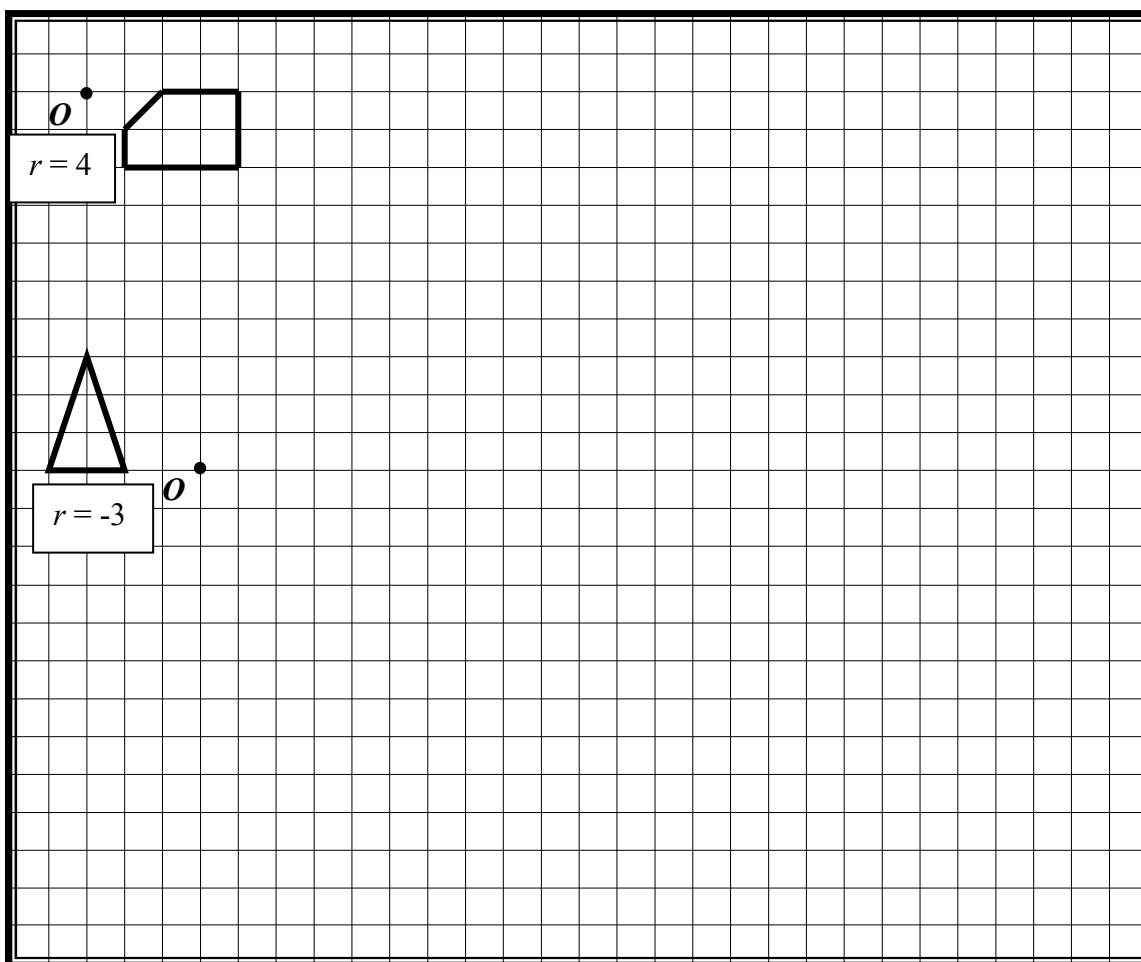
H.8

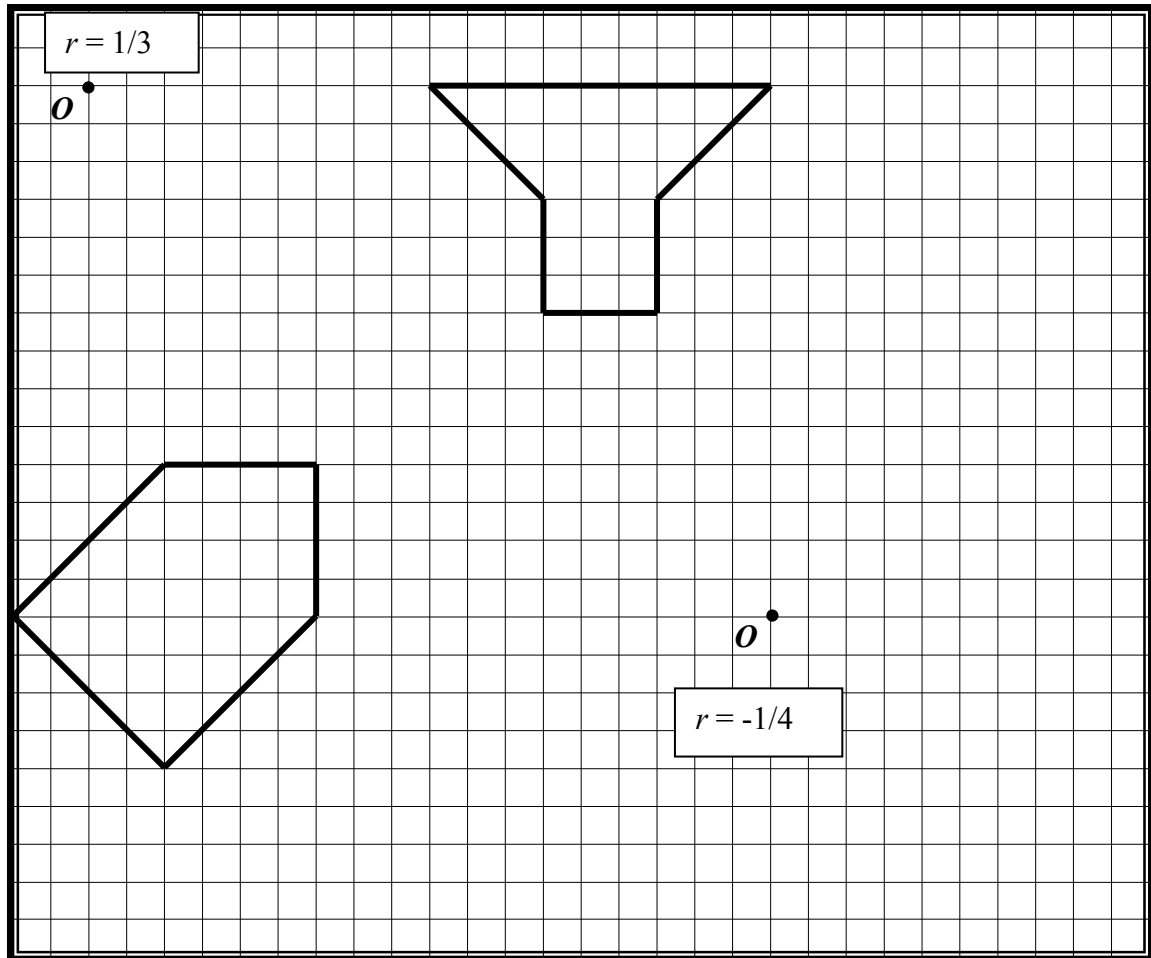
Posa entre la paraula raó i el número els símbols $>$, $<$, $=$ segons correspongui:

- Si la raó > 1 aleshores la imatge augmenta.
- Si la raó < 1 aleshores la imatge disminueix.
- Si la raó $= 1$ aleshores la imatge no varia la grandària.
- Si la raó < 0 aleshores la imatge no queda invertida.
- Si la raó > 0 aleshores la imatge queda invertida.
- Si la raó $= 0$ aleshores la imatge *desapareix* (en aquest cas no hi ha homotècia).

H.9

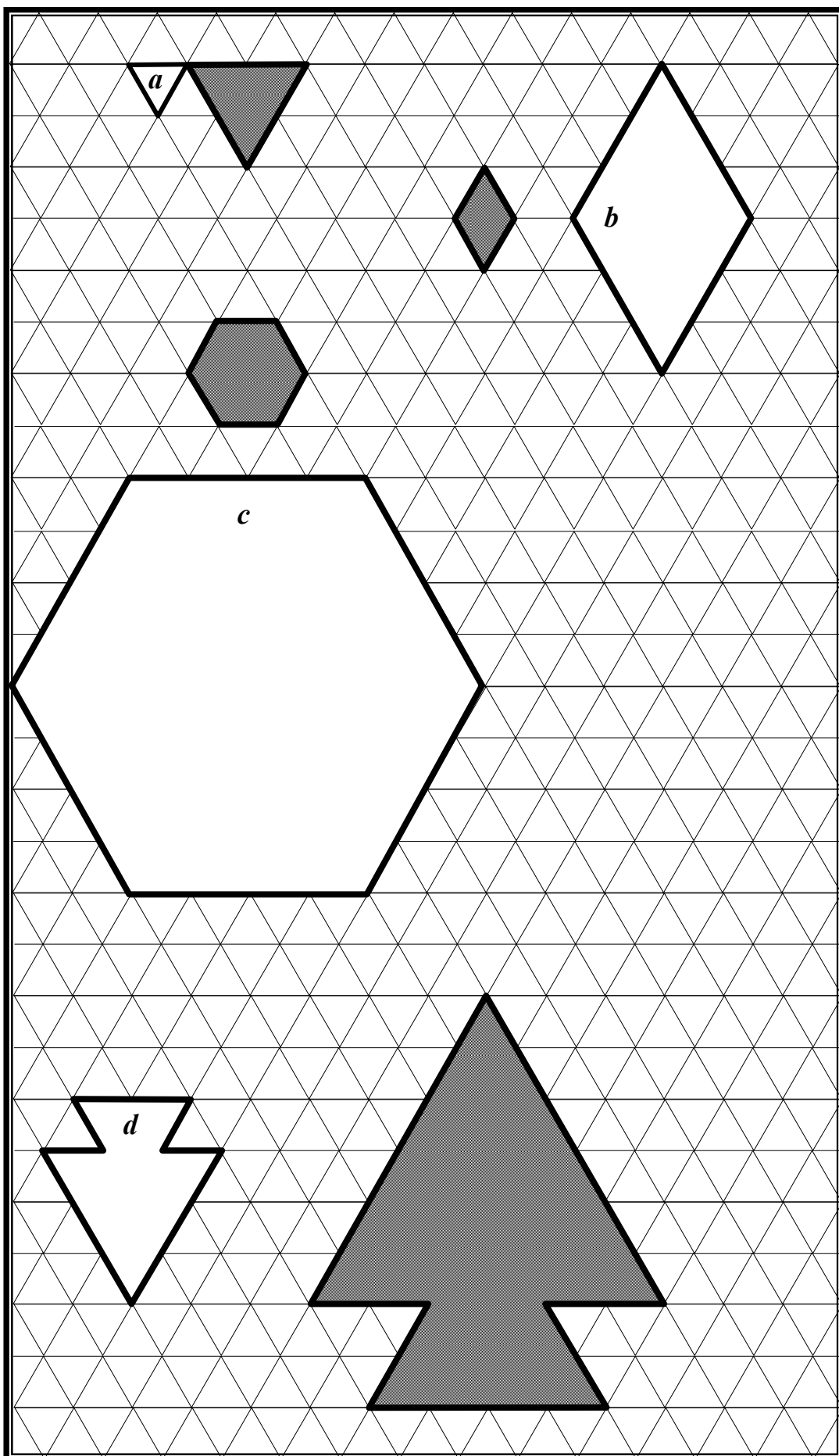
Aplica una homotècia a cada figura amb la raó r que s'indica:



**H.10**

Trobeu per a cada parella de figures homotètiques el centre i la raó i escriviu-lo en el lloc indicat. La figura blanca és l'original i l'ombrejada la homotètica (utilitzeu pel centre les lletres A, B, C, ... respectivament):

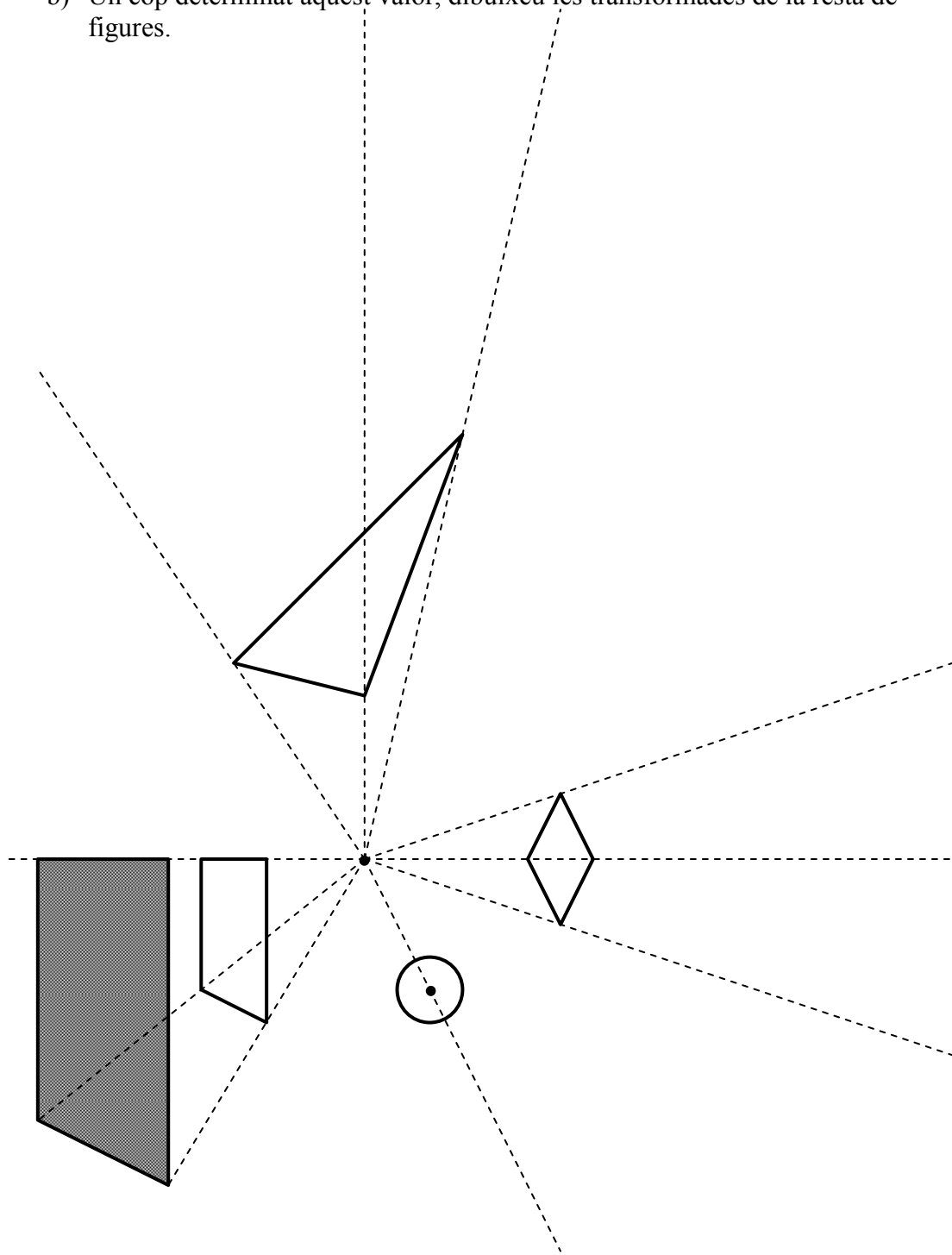
- a) H(,)
- b) H(,)
- c) H(,)
- d) H(,)



H.11

Podem també imaginar l'homotècia com una mena d'explosió que allunya i dilata els objectes si la raó és superior a 1 (i que comprimeix el objectes si la raó és inferir a 1)

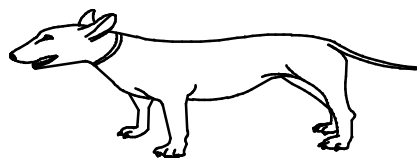
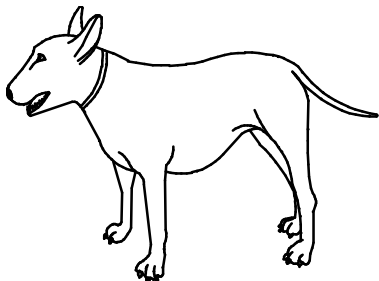
- Considerant el trapezi original blanc i la seva homotètica ombrejada, calculeu la raó d'homotècia.
- Un cop determinat aquest valor, dibuixeu les transformades de la resta de figures.



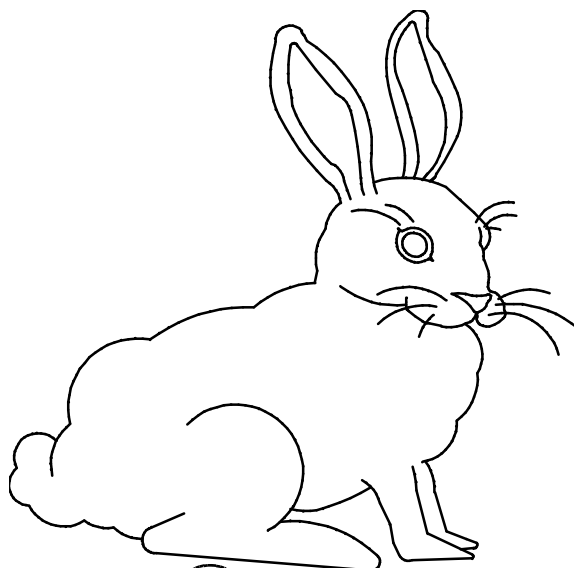
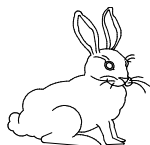
H.12

De les següents parelles de figures determina quines poden ser fruit d'una homotècia i quines NO poden ser-ho. En el cas en que SÍ pugui ser homotècia determina el centre i la raó de la homotècia. En el cas en que NO ho sigui explica amb paraules raonadament per què.

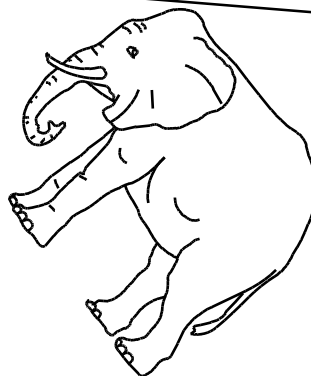
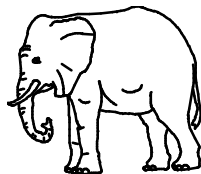
a)



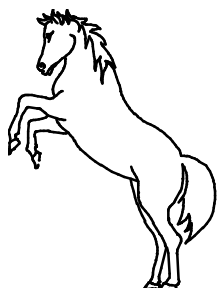
b)



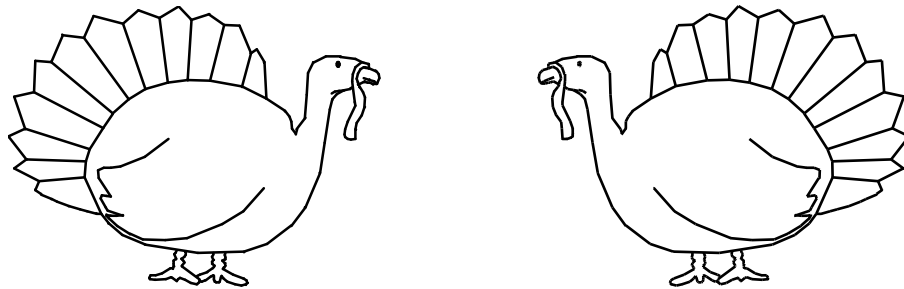
c)



d)



e)

**H.13**

Explica raonadament quines característiques han de tenir dues figures per a poder dir, a cop d'ull, que una és homotètica de l'altra.

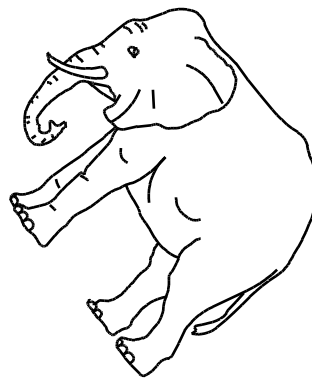
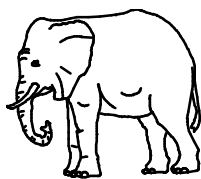
Semblança

S. 1

Omple el quadre següent posant si o no segons convingui

	Queda desplaçada	Queda girada	Queda invertida	Canvia la grandària	Queda deformada
Traslació					
Gir					
Simetria					
Homotècia					

A l'anterior taula pots observar que estem estudiant tots els possibles moviments que no deformen la figura original. Però ens queda un moviment que no es correspon a cap dels anteriors i tampoc deforma la figura original:



Aquest cas es tracta, de fet d'una combinació entre una homotècia i un gir.

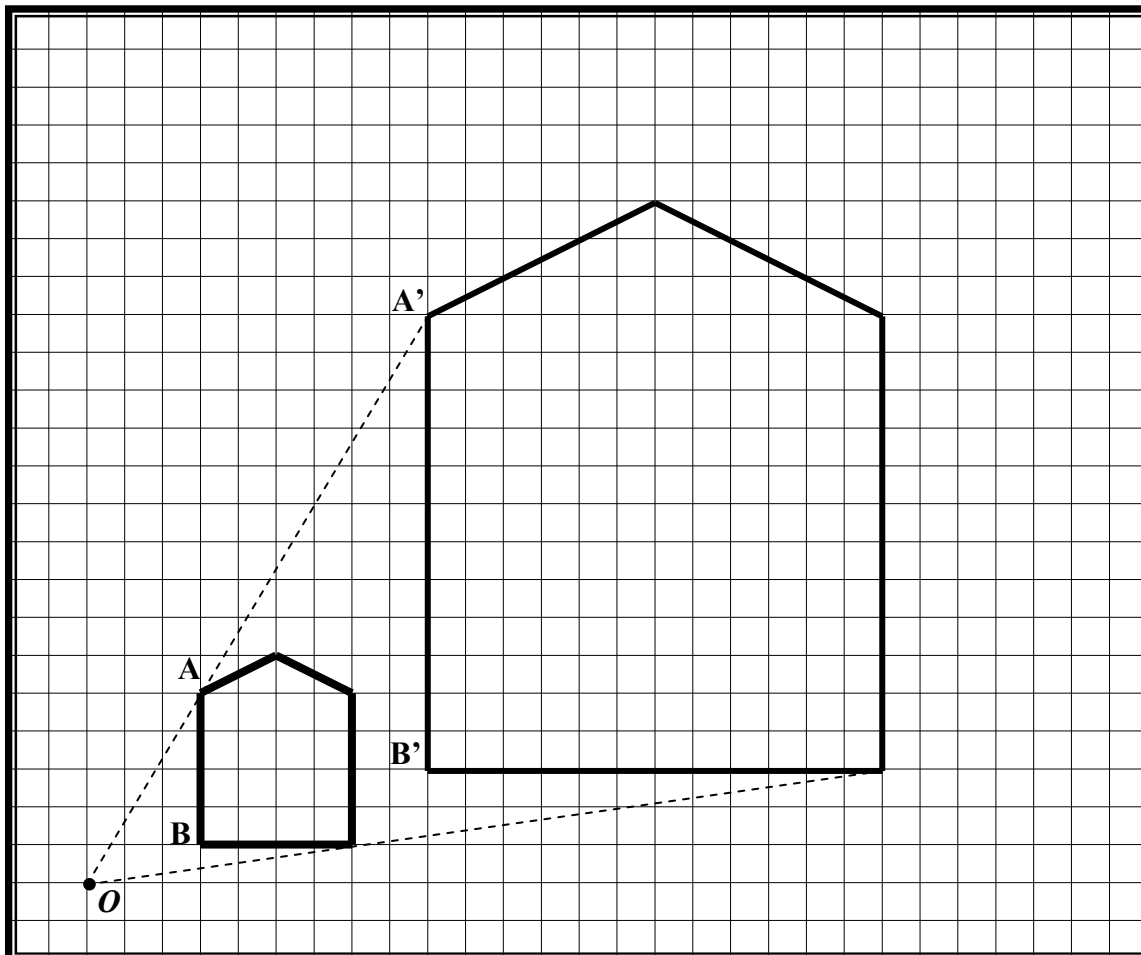
Dues figures que són absolutament idèntiques a excepció de la posició, orientació o inclinació direm que són **semblants**.

Observa que a partir d'una figura sempre podrem trobar un altra semblant a ella a partir de la combinació de qualsevol dels moviments del quadre anterior doncs cap d'ells modifica la forma original de la figura.

La semblança és, de fet la *màquina de fotocopiar* de les matemàtiques doncs pot ampliar o reduir però no pot deformar.

S. 2

Observa la parella de figures següents en que la figura petita és la original



- a) Quina és la raó de la homotècia?
- b) Calcula el resultat de dividir les distàncies $\frac{A'B'}{AB} =$

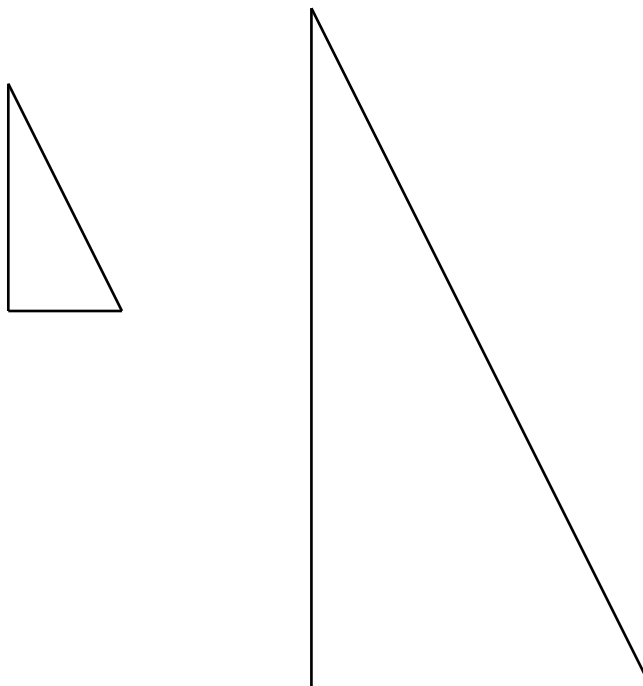
Aquesta relació de proporcionalitat entre les dues figures s'anomena **raó de semblança** entre les dues figures i si les figures són homotètiques coincideix amb la raó d'homotècia.

S. 3

Calcula la raó de semblança entre les parelles de figures següents i digues si són o no homotètiques. En el cas en que siguin homotètiques busca el centre d'homotècia i calcula la raó d'homotècia.

Cal que tinguis en compte que la primera figura és l'original i la segona la semblant d'aquesta manera si la semblant és més petita la raó de semblança haurà de ser més petita que 1

a)

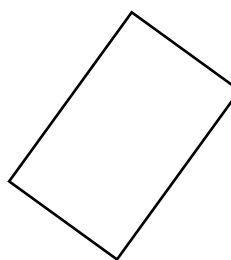
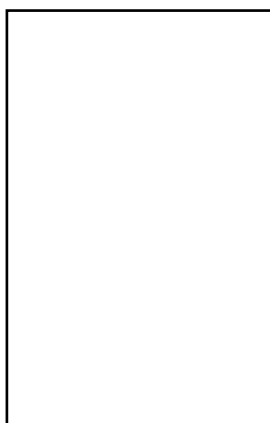


Raó de semblança =

Son homotètiques? ___

Raó d'homotècia =

b)



Raó de semblança =

Son homotètiques? ___

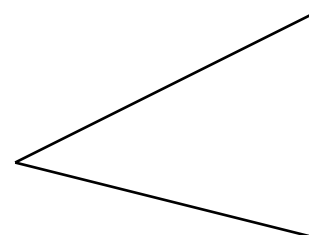
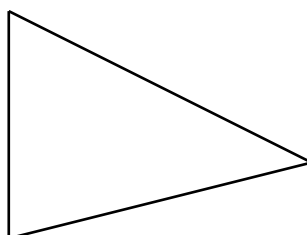
Raó d'homotècia =

c)

Raó de semblança =

Son homotètiques? ___

Raó d'homotècia =

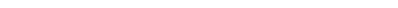
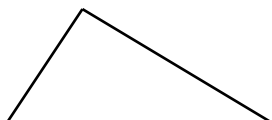


Observa que podem dir que dues figures planes són semblants si els angles són iguals i els costats proporcionals.

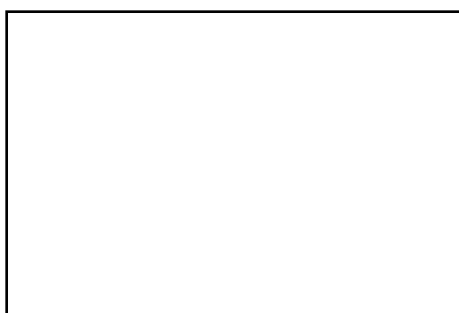
S. 4

De les següents figures sols hem dibuixat una de les cares de la figura semblant. Calcula la raó de semblança i completa la figura.

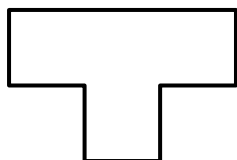
a)



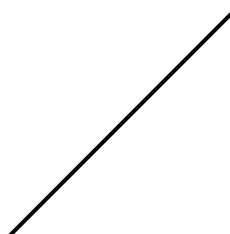
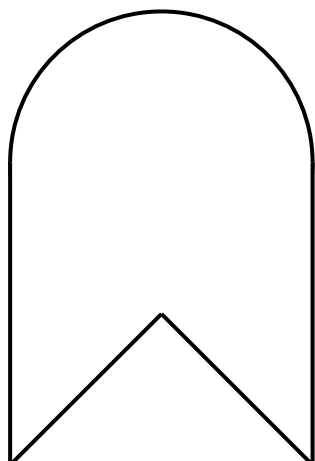
b)

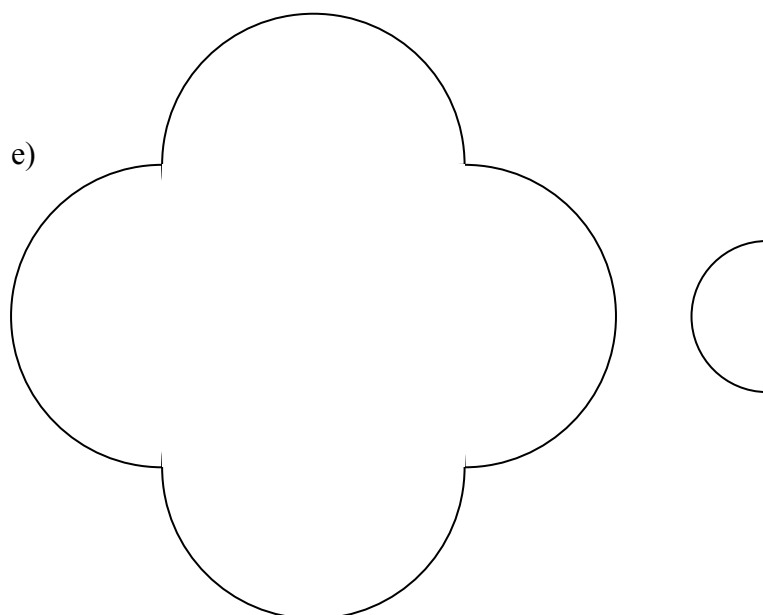


c)



d)





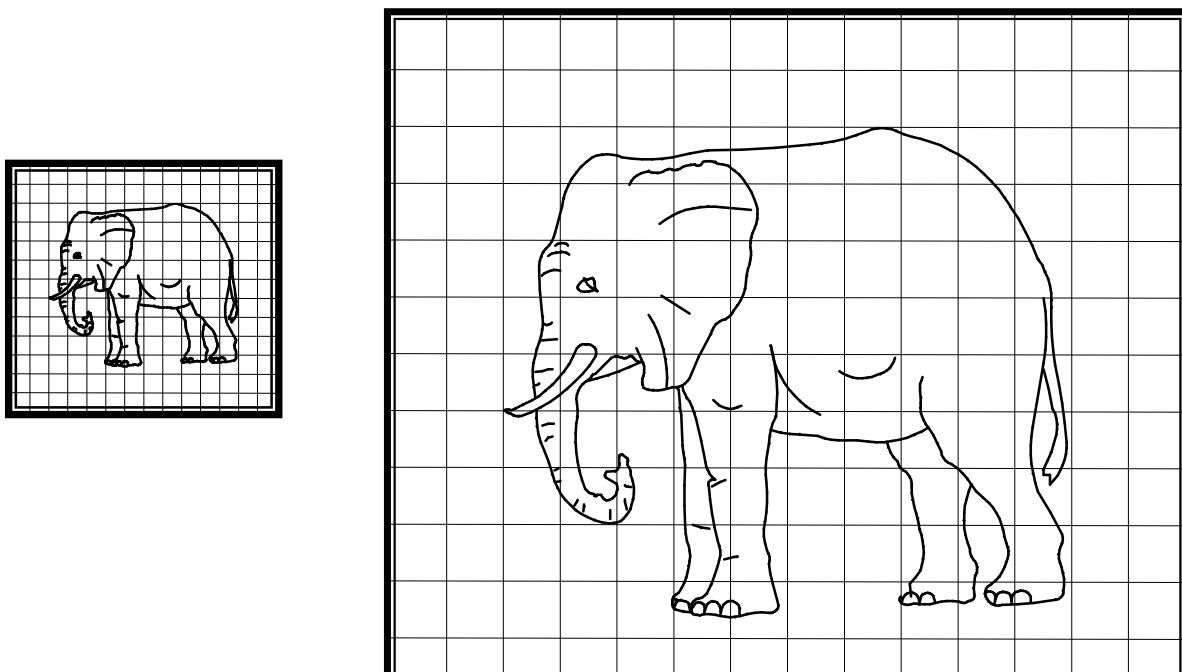
S. 5

Dibuixeu un rectangle de costats 4 i 6 cm, i un altre de costats 6 i 8 cm, és a dir cadascun 2 cm més gran que els costats del primer. Són semblants? Per què? I si ho féssim amb un quadrat de costat 4 cm?

Ampliació i reducció de figures

Diverses són les tècniques que es poden fer servir per ampliar i reduir figures, totes es basen en homotècia o la semblança. Ja hem vist dues tècniques: Per una banda la tècnica de dibuixar l'homotècia tal com hem fet en exercicis anteriors (com per exemple H11). Per altra banda el pantògraf, que com altres aparells permeten ampliar o reduir figures.

Una tercera opció per l'ampliació de dibuixos era ja utilitzada pels egipcis. Consisteix a dibuixar una quadrícula sobre el dibuix que es vol ampliar o reduir, i una segona de semblant amb raó de semblança convenient. I quadre per quadre, anar traslladant el dibuix a la nova quadrícula:



S. 6

Utilitza el mètode anterior per:

- a) Fer una papallona semblant amb raó $\frac{3}{2}$.
- b) Fer una papallona semblant amb raó $\frac{1}{2}$.

