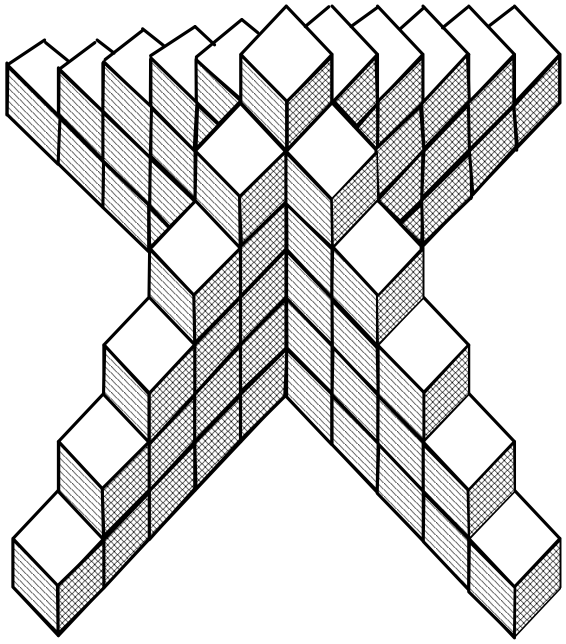
INSTITUT EL SUI

Introducció als polinomis

Matemàtiques. 3r ESO

INTRODUCCIÓ

A.1. Observa aquesta torre:



a) Quants cubs són necessaris per a construir aquesta torre?

b) Quants cubs són necessaris per a construir una torre de 5 cubs d’alçada?

c) Quants en necessites si fa 7 cubs d'alçada? I per a 8 cubs d'alçada?

d) Quants en necessites si fa 12 cubs d'alçada?

e) Quants en necessites si fa 10 000 cubs d'alçada?

f) Explica raonadament l'estratègia que has utilitzat per arribar a trobar la solució de la pregunta e. Pots utilitzar dibuixos.

g) Utilitzant l'estratègia que acabes de raonar intenta trobar la fórmula general que permeti trobar la quantitat de cubs per una alçada qualsevol de n cubs.

h) Compara la fórmula amb la dels companys.

i) Simplifica al màxim la fórmula que t’ha sortit i comprova que funciona amb les torres petites de 5, 6, 7 cubs d'alçada.

j) Calcula l'alçada si la torre té 24531 cubs.

Anomenarem **monomi** (mono vol dir un) qualsevol expressió algèbrica formada per la multiplicació d'un nombre real i d'una variable (o indeterminada) elevada a un exponent natural. El nombre es diu **coeficient** i la indeterminada elevada a l'exponent es diu part literal. Anomenarem **grau** del monomi l'exponent de la variable.

Els nombres reals com 4, - 10, 2.5, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}$ també són monomis perquè 4 és el mateix que $4\ x^{0}$. Això vol dir que **són monomis de grau 0**.

A.2. Digues si són monomis i si ho són quin és el coeficient, la part literal i el grau dels monomis:

a) $-2\ x^5$

b) $3.14\ t^2$

c) $\sqrt{2}\,y^3$

d) -1.33

e) $3\ x^{\frac{2}{3}}$

f) $-6\ \sqrt{x}$

g) $3\ x + 6\ x$

Un **binomi** és la suma de dos monomis de diferent grau. Per exemple: $2\ x^3 + 6$.

Un **trinomi** és la suma de tres monomis de diferent grau. Per exemple $t^2 - 5\ t + 6$.

Un **Polinomi** és la suma de monomis de diferents graus. Els binomis i els trinomis són casos particulars de polinomis.
El grau d'un polinomi és el grau més gran entre els graus dels monomis que componen el polinomi.
El terme independent és el monomi de grau 0.

Exemple: $4\ x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ és un polinomi de grau 5. El terme independent és -7.

A.3. Escriu els coeficients, la part literal i el grau de cadascun dels monomis dels polinomis següents. Escriu també quin és el grau del polinomi:

a) $3\ x^2 - 4\ x^3 + 2 - 57\ x$

b) $-3\ t^6 + 5\ t - 9\ t^3$

c) $\frac{2}{3}y^3 + \sqrt{3}\,y^2 - 1.5y + 3$

> És convenient escriure els polinomis ordenats: Escriurem primer el monomi de grau més gran, fins arribar al monomi de grau més petit.

A.4. Ordena els següents polinomis:

a) $3x^2 - 4x^3 + 2 - 57x$

b) $-3t^6 + 5t - 9t^3$

A.5. Respon les següents qüestions:

a) Quin és el nombre màxim de coeficients que pot tenir un polinomi de grau 4? Raona la resposta i posa'n un exemple.

b) Pot haver-hi monomis de grau 2? Per què? Posa'n un exemple.

c) Pot haver-hi binomis de grau 1? Per què? Posa'n un exemple.

d) Pot haver-hi trinomis de grau 1? Per què? Posa'n un exemple.

Escriu un polinomi de grau 3 de variable z, amb terme independent 5 i que no tingui el monomi de grau 2.

Notacions

De vegades tenim diversos polinomis i necessitem mencionar-ne un. Si no volem llegir-lo o escriure'l tot sencer, podem posar-li un "nom". Normalment utilitzarem les lletres de l'abecedari en majúscules a partir de la P, seguit de la part literal posada entre parèntesi.

Exemple:

$P(x) = 3x^3 - 4x^2$

$Q(t) = 2t + 7$

$R(x) = 9x^3 - 7x^2 + 1$

Fixa't que ara és més senzill dir, per exemple: "el grau de R(x) és 3"

Notació posicional

Els nombres que utilitzem habitualment són, de fet, polinomis en notació posicional. Anem a veure-ho.

A.6. Observa la frase: "Jo tinc 3 014 €" Què significa la xifra 3 en aquesta frase? I la xifra 0? I la xifra 1?

Tal com hem vist a l'exercici anterior

3 014 = 3000 + 10 +4

es a dir, el valor de les xifres depèn de la posició en la que estén (notació posicional).

Observa que també podem escriure:

$3\,014 = 3000 + 10 + 4 = 3\cdot1000+10 +4 = 3\cdot10^3 + 10 +4$

Si considerem que x = 10 , aleshores podem dir que

$3014\ 0 = 3x^3 + x + 4$

per tant els nombres són **POLINOMIS!**

A.7. Escriu en notació polinòmica els nombres:

a) 5 109

b) 101 002

c) 700 004 000 300

d) 10 708 000 010

A.8. Escriu amb notació posicional els següents nombres (en aquest cas considera x = 10):

a) $P(x) = 3x^3 + 9x^2 + 6$

b) $Q(x) = x^{10} + x^7 + 3x^2$

c) $R(x) = 8x^8 +7x^3 + x^2$

d) $S(x) = x + 1$

Un polinomi és un concepte més general que un nombre perquè els coeficients poden ser positius i negatius, i més grans que 9. Observa, per altra banda la gran importància dels zeros en mig d'un nombre. Oblidar un d'aquests zeros implica escriure un nombre totalment diferent.

En un polinomi general, si el volem escriure amb notació posicional cal:

- separar els números (coeficients)
- no oblidar el signe (sobre tot els negatius)
- **no oblidar els zeros**
- si no hi ha res al costat d'una x , el coeficient és 1

A.9. Escriu els següents polinomis en notació polinòmica:

a) 30 0 -20 0 -5 0

b) -2 0 1 0 1 1 0

c) 1 -3 0 -1 0 0 13

d) 21 0 2 1 0 -21 -1

A.10. Escriu els següents polinomis en notació posicional:

a) $P(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $Q(x) = 32x^7 + 12x^5 - 4x^3 + 3$

c) $R(x) = 7x^6 - 19x^3 + 12x - 1$

d) $S(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1$

Notació mixta

De vegades ens interessa mantenir la referència dels zeros de la notació posicional sense perdre la part literal de la notació polinòmica, per exemple:

$P(x) = x^3 - 1 = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

A.11. Escriu en notació mixta tots els polinomis dels 2 exercicis anteriors.

B. SUMA I RESTA

B.1. Reflexionem com fem les sumes amb nombres:

a) Fes la suma:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,0\,1\,0\,5 \\ \underline{\quad 3\,0\,0\,1\,2} \end{array}$$

b) Escriu els nombres anteriors en notació polinòmica (canvi donat x = 10) i intenta sumar-los . Quines dificultats hi trobes?

c) Escriu els nombres en notació mixta i intenta sumar-los.

d) En una part de la suma anterior ha fet:

$$\begin{array}{r} .... + 2x^4 + ... \\ \underline{......+ 3x^4 +....} \\ 5x^4 \quad\quad \end{array}$$

per què el resultat **NO** és $5x^8$?

La suma amb polinomis ordinaris és idèntica a la de nombres amb el gran avantatge que amb polinomis mai " me'n porto una....." ja que els coeficients poden ser més grans que deu. Cal que tingueu en compte que:

- Igual que amb nombres no es pot sumar unitats amb centenes, amb polinomis s'han de sumar els coeficients dels monomis del mateix grau.
- Es recomanable utilitzar la notació mixta o posicional.
- Si amb nombres 3 centenes més 5 centenes són 8 centenes, amb polinomis

  $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$. **NO SUMEM ELS EXPONENTS.**
- És important que no oblideu els signes dels coeficients.

Exemple: sumem el polinomi $12\,x^4 + 4\,x^2 - 17\,x + 4$ amb el polinomi $2\,x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 3$.

$$\begin{array}{rrrrr} 12\,x^4 & + 0x^3 & +4\,x^2 & -17\,x & +4 \\ 2\,x^4 & +3\,x^3 & -5\,x^2 & + 0\,x & +3 \\ \hline 14\,x^4 & +3\,x^3 & - x^2 & -17\,x & +7 \end{array}$$

B.2. Suma els polinomis següents:

a) $(9x^5 - 3x^3 + x^2 + 6x - 2) + (-x^5 - 3x^4 + 8x^2 + x - 3)$

b) $(13y^3 + 1) + (12y^2 + y - 11)$

c) $(x^3 - 12x^2 + x - 7) + (x^2 - 8x + 13)$

d) $(2a^5 - 7a^3 + a^2 + 15) + (-3a^5 + 7a^3 + a^2 + a - 13)$

e) $(2a^5 - 7a^3 + a^2 + 15) + (-2a^5 + 7a^3 + a^2 + a - 13)$

B.3. Observa què ha passat amb els graus dels polinomis de l'exercici anterior i respon:

Apartat	Grau del 1r polinomi	Grau del 2n polinomi	Grau del resultat

Escriu la relació entre els graus dels polinomis que sumem i el grau del polinomi resultant.

Propietats de la suma de polinomis

Sempre que en matemàtiques introduïm un conjunt d'objectes nous, (en aquest cas el conjunt dels polinomis) i sobre ell una operació, cal comprovar si es compleixen , o no, les propietats de les operacions.

1. Propietat commutativa

L'ordre de factors altera la suma?, és a dir, es compleix que $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$?

Comprova si es compleix, o no, utilitzant

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

$Q(x) = 5x^2 + 4x$

2. Propietat associativa

Si he de sumar 3 polinomis, importa l'ordre en que ho faci?, és a dir, es compleix

$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$?

Comprova si es compleix, o no, utilitzant els polinomis P(x) i Q(x)de l'exercici anterior i afegint $R(x) = x^2 + 3x + 1$

3. **Existència d'element neutre**

Existeix un polinomi N(x) que al sumar-lo a un altre el deixa igual ?, es a dir, per a qualsevol polinomi P(x) existeix un polinomi N(x) de manera que

$P(x) + N(x) = P(x)$?

Comprova-ho amb el mateix polinomi P(x) de l'exercici anterior.

4. **Existència d'invers o oposat**

Per cada P(x) existeix un polinomi (-P(x)) de manera que

$P(x) + (-P(x)) = 0$?

Comprova-ho amb el mateix P(x).

B.4. Calcula l'oposat dels següents polinomis:

a) $12x^4 + 4x^2 - 17x + 4$

b) $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3$

c) $-11 x^5 - 3 x^4 + 8 x^2 + 5 x - 3$

d) $12 y^2 + 9 y - 11$

e) $3 x^2 - 8 x + 13$

f) $- 3 a^5 + 7 a^3 + a^2 + a - 13$

Donats dos polinomis P(x) i Q(x) s'anomena resta del polinomi P(x) i el polinomi Q(x) a l'operació de sumar P(x) amb l'oposat de Q(x): $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$

P(x) és el <u>MINUEND</u>, Q(x) és el <u>SUBTRAHEND</u> i P(x) - Q(x) és la <u>DIFERÈNCIA</u>.

Exemple: $(12 x^4 + 4 x^2 - 17 x + 4) - (2 x^4 + 3 x^3 - 5 x^2 + 3)$

$$
\begin{array}{rrrrr}
12 x^4 & + 0x^3 & + 4x^2 & - 17 x & + 4 \\
- 2 x^4 & - 3 x^3 & + 5x^2 & + 0x & - 3 \\
\hline
10 x^4 & - 3 x^3 & + 9x^2 & -17 x & + 1
\end{array}
$$

B.5. Calcula les restes dels polinomis següents:

a) $(9x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2) - (-11x^5 - 3x^4 + 8x^2 + 5x - 3)$

b) $(13y^3 + 7) - (12y^2 + 9y - 11)$

c) $(6x^3 - 12x^2 + 8x - 7) - (3x^2 - 8x + 13)$

d) $(2a^5 - 7a^3 + a^2 + 15) - (-3a^5 + 7a^3 + a^2 + a - 13)$

B.6. Donats els polinomis següents:

$P(x) = 16x^3 - 32x^2 + 2x - 15$

$Q(x) = 23x^4 + 5x^2 - 2x + 7$

$R(x) = -5x^4 + 3x^3 + x - 5$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $R(x) - P(x)$

c) $R(x) - (Q(x) + P(x))$

d) $(R(x) - Q(x)) + P(x)$

B.7. Troba un polinomi que restant al polinomi $5x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ doni el polinomi $2x^3 - 2x^2 - 4$.

C. MULTIPLICACIÓ

Reflexionem com fem la multiplicació amb números:

C.1.

a) multiplica

30 000 x 200 000

b) escriu la multiplicació anterior amb notació polinòmica

c) multiplica:

$5x^3 \cdot 3x^4$

$- 4x^5 \cdot 6x^2$

d) Explica com s'han de multiplica dos monomis.

e) Completa amb llenguatge simbòlic:

$$ax^n \cdot bx^m =$$

C.2. Calcula els següents productes de monomis:

a) $4\ x^5 \cdot 3\ x^4$

b) $(- 5\ x\ ) \cdot 3\ x^2$

c) $(- 3\ t^2)\ (-5)$

d) $\frac{3}{4}x \cdot 2x^6$

e) $3{,}25x^3 \cdot 4{,}23x^2$

f) $-2{,}34x^2 \cdot 6{,}29$

Per multiplicar un polinomi per un monomi, multiplicarem cada monomi del polinomi pel monomi.

Exemple: $(2\ x^2 + 5\ x - 6) \cdot 3\ x^3 = 6\ x^5 + 15\ x^4 - 18\ x^3$

C.3. Calcula:

a) $(4x^3 + x^2 - 2) \cdot 7x^4$

b) $(-3x^3 + x^2 - 2) \cdot (-x^2)$

c) $(4x^2 + 3x - 2) \cdot x$

d) $(4t^3 - t^2 - 2) \cdot (-6t)$

Producte de polinomis

C.4. Fes la següent operació de números:

$$\begin{array}{r} 10321 \\ \underline{\times 12} \end{array}$$

C.5. Torna-ho a fer escrivint els números amb notació mixta. No oblides els signes.!

Per multiplicar un polinomi per un altre polinomi, multiplicarem el primer polinomi per cadascun dels monomis del segon polinomi i sumarem els monomis dels mateix grau.

Exemple: $(3x^3 + 4x^2 + x + 2) \cdot (3x - 2)$

Per poder sumar ràpidament els monomis del mateix grau ho farem de la següent manera:

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & +4x^2 & +x & +2 \\ & & & 3x & -2 \\ \hline & -6x^3 & -8x^2 & -2x & -4 \\ 9x^4 & +12x^3 & +3x^2 & +6x & \\ \hline 9x^4 & +6x^3 & -5x^2 & +4x & -4 \end{array}$$

Resultat: $(3x^3 + 4x^2 + x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 4$

Quan falti un monomi utilitzarem la notació mixta.

C.6. Fes les següents multiplicacions:

a) $(x + 1)(x + 3)$

b) $(x + 1)(x - 1)$

c) $(3x - 2)(2x + 3)$

d) $(x + 5)^2$

e) $(2x^3 + 4x - 2)(x^3 - 4)$

f) $(-x^3 + 3x - 1/2)(2x^2 + 6)$

C.7. Digues quines de les identitats següents són certes. I en aquelles que siguin falses indica on és l'error.

a) $x^4 \cdot x^3 = x^{12}$

b) $(x^2 + 5)^2 = x^4 + 25$

c) $3 \cdot (x^4 \cdot x^3) = 9x^7$

Propietats del producte de polinomis

Comprova si es compleixen o no les propietats utilitzant els polinomis següents:

$P(x) = x^3 - 4x^2 - 3$

$Q(x) = 2x^2 + x$

$R(x) = x - 1$

1. Propietat commutativa

$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

2. Propietat associativa

$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) [\quad Q(x) \cdot R(x)]$

3. Existència d'element neutre del producte

existeix un polinomi N(x) tal que $P(x) \cdot N(x) = P(x)$?

4. Existència d'invers respecte al producte

Per qualsevol polinomi P(x) existeix un polinomi P'(x) tal que

$P(x) \cdot P'(x) = 1$ (1= el.neutro)

D. DIVISIÓ DE POLINOMIS

Divisió de monomis.

D.1.

a) Fes la divisió dels nombres següents:

$$\frac{60000000}{2000} =$$

b) Fes la divisió anterior amb notació polinòmica.

c) Divideix:

$$\frac{12x^8}{3x^6} =$$

d) Explica com s'han de dividir dos monomis

Completa amb llenguatge simbòlic:

$$\frac{ax^m}{ax^n} = \qquad \text{(amb } m \geq n\text{)}$$

D.2. Calcula:

a) $(4\ x^6) : (x^2)$

b) $(6\ x^7) : (x^5)$

c) $(5\ x^3) : (2\ x^2)$

d) $(9\ x^5) : (x^3)$

e) $(5\ x^4) : (5\ x^4)$

f) $(a\ x^m) : (b\ x^2)$ Com han de ser b i m per poder trobar el quocient ?

Divisió de polinomis

Observa la divisió següent:

$$\begin{array}{r|l} 4\,9\,7 & 1\,2 \\ \cline{2-2} 0\,1\,7 & 41 \\ 5 & \end{array}$$

En el Procediment de la divisió multipliquem i desprès restem, però les restes es fan mentalment. Amb polinomis, per facilitar, les restes es deixen indicades. Observa com podem fer la divisió anterior deixant les restes indicades:

$$\begin{array}{rr|l} & 4\,9\,7 & 1\,2 \\ \cline{3-3} - & 4\,8 & 41 \\ & 0\,1\,7 & \\ & -\ 1\,2 & \\ & 5 & \end{array}$$

D.3. Escriu la divisió anterior amb notació MIXTA. **(No oblidis els signes dels monomis.)**

Per dividir dos polinomis qualsevols ho farem de manera semblant :

Per exemple, per dividir $(5\,x^4 + 6\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2) : (x^3 - 2\,x + 3)$
farem:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5\,x^4 & +\,6\,x^3 & +\,2\,x^2 & -\,4\,x & +\,2 & x^3 - 2\,x + 3 \\ \cline{6-6} -\,5\,x^4 & & +\,10\,x^2 & -\,15\,x & & 5\,x + 6 \\ \cline{1-5} & 6\,x^3 & +\,12\,x^2 & -19\,x & +\,2 & \\ & -\,6\,x^3 & & 12\,x & -18 & \\ \cline{2-5} & & 12\,x^2 & -\,7\,x & -\,16 & \end{array}$$

El quocient és $5\,x + 6$ i **el residu** és $12\,x^2 - 7\,x – 16$

Observa que el grau del residu és més petit que el grau del divisor i no podem seguir la divisió.

D.4. Fes les divisions següents:

a) $(x^5 + 5\,x^4 - 6\,x^2 - 4) : (x^3 + 3\,x^2 - 1)$

b) $(-\,x^5 + 12\,x^4 - 8\,x^3 + x^2) : (x^4 - 2\,x^2 + x)$

D.5. Troba un polinomi tal que, en ser dividit per $x^2 + 1$ doni de quocient $2x^2 + x - 4$ i de residu $3x - 4$.

D.6. Fes la següent divisió: $(x^5 - 2x^4 - 5x^2 - 17x + 8) : (x - 3)$

Ara calcularem el quocient i el residu de la divisió anterior amb un altre procediment:

		1	-2	0	-5	-17	8	← Polinomi en notació posicional
important *	3		3	3	9	12	-15	← nombres que van sortint
		1	1	3	4	-5	7	← **residu**
		Quocient en notació posicional						

*: aquí posem el número que caldria posar en comptes de l'x per a que el divisor sigui zero.

En aquest cas $3 - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Si observes el procediment general de la divisió veuràs com van sortint els nombres d'aquest nou procediment.

Aquest procediment per trobar el quocient i el residu es diu **Regla de Ruffini** i és una forma molt més curta de fer la divisió.
Només la podem fer servir quan el divisor és de la forma x - a.

D.7. Utilitzant els dos mètodes fes la divisió següent: $(x^6 - x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 6) : (x - 2)$. Comprova que dóna el mateix.

D.8. Calcula amb la Regla de Ruffini les següents divisions:

a) $(x^6 - 3x^5 + 9x^3 - x^2 + 1) : (x - 1)$

b) $(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 1) : (x - 3)$

c) $(2x^4 - 3x^3 + 6x + 2) : (x + 3)$. Observa que $(-3) + 3 = 0$ per tant cal aplicar Ruffini amb $x = -3$

d) $(2x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1) : (x - 2)$

e) $(-3x^3 + 2x^2 - 3x) : (x + 1)$

f) $(2x^4 + x^2 - 2x + 1) : (x + 2)$